

# Самофокусировка ультракороткого лазерного импульса супергауссовского пространственного профиля интенсивности

Ю.Э. Гейнц, А.А. Землянов\*

Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН  
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1

Поступила в редакцию 7.05.2008 г.

Представлены результаты теоретического исследования нестационарной самофокусировки в воздухе фемтосекундного лазерного излучения с гауссовским и супергауссовским пространственными профилями интенсивности в режиме одиночной филаментации. Использован формализм усредненных параметров излучения, и получены аналитические соотношения, позволяющие рассчитать основные параметры самофокусировки пучков негауссовского профиля. Установлено качественное и количественное подобие начальной стадии изменения эффективного радиуса таких пучков от обобщенной эволюционной переменной на дистанциях вплоть до глобального нелинейного фокуса.

*Ключевые слова:* ультракороткое лазерное излучение, нестационарная самофокусировка, усредненные параметры пучка, негауссовские пучки.

Усредненное описание волновых пучков на основе формализма эффективных (среднеквадратических) параметров позволяет унифицированно описать эволюцию пучков различного поперечного профиля интенсивности при их распространении в линейной среде [1]. При стационарной самофокусировке лазерного пучка в среде с кубичной керровской нелинейностью также существует подобное описание, по крайней мере, до точки локального коллапса  $z_N$  [2]. При этом для каждого конкретного типа пучка достаточно вычислить несколько величин ( $R_{e0}$ ,  $\theta_D$ ,  $P_c$ ), зависящих только от оптических параметров среды и поперечного профиля напряженности электрического поля волны, чтобы определить величину стационарного эффективного радиуса пучка  $R_e$  в любой точке  $z$  оптической трассы по универсальной эволюционной зависимости:

$$R_e^2(z) = (1 - \eta)(\theta_D z)^2 + R_{e0}^2 \left(1 - \frac{z}{F}\right)^2, \quad z < z_N \text{ при } \eta > 1. \quad (1)$$

Здесь

$$R_e(z) = \left[ \frac{1}{P(z)} \iint_{\mathbf{R}_\perp} d^2 \mathbf{r}_\perp I(\mathbf{r}_\perp, z) |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{gr}|^2 \right]^{1/2} \quad (2)$$

– эффективный (среднеквадратический) радиус (в дальнейшем будем называть его *мгновенным*

эффективным радиусом);  $\mathbf{r}_{gr}$  – радиус-вектор центра тяжести пучка;  $|\mathbf{r}_\perp| = \sqrt{x^2 + y^2}$  – поперечная координата;  $I = c/8\pi|U|^2$  – интенсивность излучения;  $U$  – напряженность электрического поля волны;  $P = \iint_{\mathbf{R}_\perp} d^2 \mathbf{r}_\perp I(\mathbf{r}_\perp, z)$  – мощность импульса;  $R_{e0} = R_e(z=0)$ ;

$$\theta_D = \left[ \frac{1}{k_0^2} \frac{\iint_{\mathbf{R}_\perp} d^2 \mathbf{r}_\perp |\nabla_\perp U(\mathbf{r}_\perp, z=0)|^2}{\iint_{\mathbf{R}_\perp} d^2 \mathbf{r}_\perp |U(\mathbf{r}_\perp, z=0)|^2} \right]^{1/2} \quad (3)$$

– дифракционная расходимость коллимированного пучка такого же поперечного профиля напряженности электрического поля волны  $U(\mathbf{r}_\perp)$ ;  $F$  – начальный радиус кривизны волнового фронта;  $\eta = P_0/P_c$  – параметр самофокусировки, определяемый как отношение начальной мощности импульса  $P_0$  к критической мощности самофокусировки:

$$P_c = P_{cg} G[U(\mathbf{r}_\perp, 0)];$$

$$G[U(\mathbf{r}_\perp, 0)] = \frac{\iint_{\mathbf{R}_\perp} d^2 \mathbf{r} |U(\mathbf{r}_\perp, 0)|^2 \iint_{\mathbf{R}_\perp} d^2 \mathbf{r}_\perp |\nabla_\perp U(\mathbf{r}_\perp, 0)|^2}{2 \iint_{\mathbf{R}_\perp} d^2 \mathbf{r}_\perp |U(\mathbf{r}_\perp, 0)|^4}, \quad (4)$$

где  $P_{cg} = \lambda_0^2 / (2\pi n_0 n_2)$  – критическая мощность для пучка гауссовского профиля;  $\lambda_0$  – длина волны

\* Юрий Эльмарович Гейнц (YGeints@iao.ru); Александр Анатольевич Землянов (zaa@iao.ru).

излучения (несущая);  $n_0$  — линейный показатель преломления среды,  $n_2$  — нелинейная добавка к нему, связанная с эффектом Керра;  $k_0 = 2\pi n_0/\lambda_0$  — волновое число. Параметры, заданные выражениями (2)–(4), и являются коэффициентами распространения излучения, зависящими от профиля лазерного пучка.

Преобразуем (1) к следующему виду:

$$R_e^2(z) = R_{e0}^2 \left[ (1-\eta)(z/L_{D^*})^2 + \left(1 - \frac{z}{F}\right)^2 \right], \quad (5)$$

$z < z_N$  при  $\eta > 1$ ,

где введен параметр *обобщенной дифракционной длины*:  $L_{D^*} = R_{e0}/\theta_D$ . Для пучка гауссовского начального поперечного профиля (ГП)

$$U_g(\mathbf{r}_\perp, 0) = \exp\left(-|\mathbf{r}_\perp|^2/2R_0^2\right) \quad (6)$$

с радиусом  $R_0$  (по уровню  $1/e$  от максимума интенсивности) имеем:  $R_{e0} = R_0$ ;  $\theta_D = \theta_{Dg} \equiv 1/(k_0 R_0)$  и  $L_{D^*} = L_{Dg} \equiv k_0 R_0^2$ . Результирующее положение нелинейного фокуса такого пучка  $z_N$  будет определяться с учетом совместного действия начальной и наведенной фокусировок:

$$z_N = z_K F / (z_K + F), \quad (7)$$

где  $z_K = L_D/\sqrt{\eta-1}$  — координата точки поперечного коллапса коллимированного пучка.

Пучок супергауссовского профиля на круговой апертуре (СГП)

$$U_{sg}(\mathbf{r}_\perp, 0) = \exp\left(-|\mathbf{r}_\perp|^{2q}/2R_0^{2q}\right), \quad q=1, 2, 3, \dots, \quad (8)$$

который рассматривается ниже, будет характеризоваться другими значениями критической мощности  $P_c = P_{cg} q \cdot 2^{(1-q)/q}$  и дифракционной длины

$L_{D^*} = L_D \sqrt{\frac{\Gamma(2/q)}{q^2}}$  (для справки: для пучков суперга-

уссовского профиля (7) имеем:  $R_e(0) = R_0 \sqrt{\frac{\Gamma(2/q)}{\Gamma(1/q)}}$ ;

$\theta_D = \theta_{Dg} \sqrt{\frac{q}{\Gamma(1/q)}}$ ). Однако в относительных коор-

динатах  $\bar{z}^* = z/L_{D^*}$  с учетом соответствующего изменения относительной мощности  $\eta$  пучка выражение (5) не теряет своей универсальности и для такого типа пучков.

Самофокусировка короткого лазерного импульса, представляющего собой волновой пакет, ограниченный как в пространстве, так и во времени, приобретает динамический характер. Если условно разбить временной профиль интенсивности импульса на последовательные слои, то каждый из

них будет характеризоваться своим значением мощности  $P_i = P(t_i)$ , где  $t$  — время. Следовательно, согласно (1), (7) каждый слой, вообще говоря, будет иметь свой закон эволюции эффективного радиуса  $R_e(z; t_i)$  и свое положение нелинейного фона  $z_N(t_i)$ , которое тем ближе расположено к началу трассы, чем больше величина  $P_i$ . В результате для наблюдателя, находящегося в лабораторной системе координат, распространение в режиме самофокусировки мощного короткого импульса будет представляться как последовательность локальных фокусов от каждого временного слоя, перемещающихся со скоростью распространения излучения в среде. Эта модель керровской самофокусировки известна в литературе как модель *движущихся фокусов* и впервые была предложена в работе [3].

Введем в рассмотрение *интегральный эффективный радиус* пучка  $R_{eg}$ , который характеризует пространственный размер зоны сосредоточения плотности энергии излучения [4]:

$$R_{eg}^2(z) = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} P(z, t) dt \right]^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} P(z, t) R_e^2(z; t) dt =$$

$$= \frac{1}{E(z)} \int_{-\infty}^{\infty} dt \iint_{R_1} d^2 \mathbf{r}_\perp I(\mathbf{r}_\perp, z; t) \left( \mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{gr}(t) \right)^2, \quad (9)$$

где  $E$  — полная энергия импульса. Подставив (5) в (9), получим закон изменения квадрата интегрального эффективного радиуса при самофокусировке:

$$R_{eg}^2(z) = R_{eg0}^2 \left[ (1-\eta^*)(z/L_{D^*})^2 + \left(1 - \frac{z}{F}\right)^2 \right]. \quad (10)$$

Здесь

$$R_{eg0} = R_{eg}(z=0); \quad \eta^* = \left[ P_c \int_{-\infty}^{\infty} P(z, t) dt \right]^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} P^2(z, t) dt$$

— среднее по импульсу значение параметра фокусировки. Данное выражение предсказывает поперечный коллапс пучка в целом на дистанции  $\bar{z}_K^* = z_K/L_{D^*} = 1/\sqrt{\eta^*-1}$ . Для гауссовского временного профиля импульса

$$P(t) = P_0 \exp\{-\tau^2\},$$

где  $P_0$  — пиковое значение;  $\tau = t/t_p$  — безразмерное время;  $t_p$  — длительность по уровню  $1/e$ , получим  $\eta^* = \eta_0/\sqrt{2}$  ( $\eta_0 = \eta(t=0)$ ). Таким образом, качественное поведение интегрального эффективного радиуса пучка при его нестационарной самофокусировке может быть описано в рамках стационарной теории с помощью выражения (5), но с другим параметром самофокусировки  $\eta^*$ .

Этот вывод подтверждается и численными расчетами, проведенными нами в рамках модели нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) для пучков гауссовского и супергауссовского поперечного профилей интенсивности. Как известно, данное уравнение описывает распространение ультракороткого лазерного излучения и кроме дифракции пучка и частотной дисперсии среды учитывает ряд нелинейных эффектов, ответственных за амплитудную и фазовую самомодуляцию световой волны. В наиболее часто употребляемой форме (см., например, [5]) НУШ имеет следующую структуру:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{2n_0k_0} \nabla_{\perp}^2 + i \frac{k_0''}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} U(\mathbf{r}_{\perp}, z; t) - ik_0(\tilde{n}_2 - n_p)U(\mathbf{r}_{\perp}, z; t) + \frac{\alpha_N}{2} U(\mathbf{r}_{\perp}, z; t) = 0. \quad (11)$$

Здесь  $k_0'' = \partial^2 k / \partial \omega^2$  (0,21 фс<sup>2</sup>/см при  $\lambda_0 = 800$  нм) – дисперсия групповой скорости светового импульса в воздухе;

$$\tilde{n}_2 = \frac{n_2}{2} \left[ |U|^2 + \int_{-\infty}^t dt' \Lambda(t-t') |U(t')|^2 \right]$$

– кубичная нелинейность показателя преломления с учетом мгновенной и инерционной составляющих эффекта Керра;  $n_p$  – изменение показателя преломления среды за счет генерации плазмы в канале излучения;  $\alpha_N$  – коэффициент нелинейного поглощения, учитывающий потери энергии излучения при фотоионизации газа и разогреве плазмы;  $\Lambda$  – функция отклика молекулы.

Численное решение уравнения (11) было проведено для модельных пучков гауссовского (6) и супергауссовского (8) поперечных профилей огибающей светового поля со следующими параметрами: длительность импульса  $t_p = 60$  фс, радиус пучка  $R_0 = 1,0$  мм, несущая длина волны  $\lambda_0 = 800$  нм. Излучение считалось изначально коллимированным ( $F = \infty$ ), параметр самофокусировки  $\eta$  равнялся 10. Для пучка гауссовского профиля это соответствовало пиковой мощности  $P_0 = 32$  ГВт ( $P_c = 3,2$  ГВт), а для пучка супергауссовского профиля с параметром геометрии  $q = 4$  согласно (4) величина  $P_0$  была примерно в 2,4 раза выше ( $G \approx 2,4$ ). Поскольку начальные профили излучения задавались в форме идеальных, гладких функций, то в процессе распространения пучка возникал только один осевой световой филамент.

На рис. 1 показан ход нормированного на начальное значение интегрального эффективного радиуса лазерных пучков различного профиля интенсивности при распространении излучения в воздухе. Данные здесь представлены в зависимости от размерного расстояния по трассе.

Качественное рассмотрение графиков позволяет выделить три характерные пространственные области, отражающие различные стадии нестационарной самофокусировки излучения [5]: 1) зона поперечного сжатия пучка к глобальному нелинейному фокусу и формирования в его окрестности филамента; 2) зона резкого увеличения эффективной площади пучка после нелинейного фокуса; 3) зона линейного распространения прошедшего нелинейную среду излучения. Супергауссовский пучок, как видно из рис. 1, значительно раньше формирует нелинейный фокус и имеет затем существенно большую угловую расходимость, чем пучок ГП.

Рис. 1. Эволюция вдоль трассы распространения интегрального эффективного радиуса пучков гауссовского (1) и супергауссовского (2) поперечных профилей с относительной начальной мощностью  $\eta = 10$

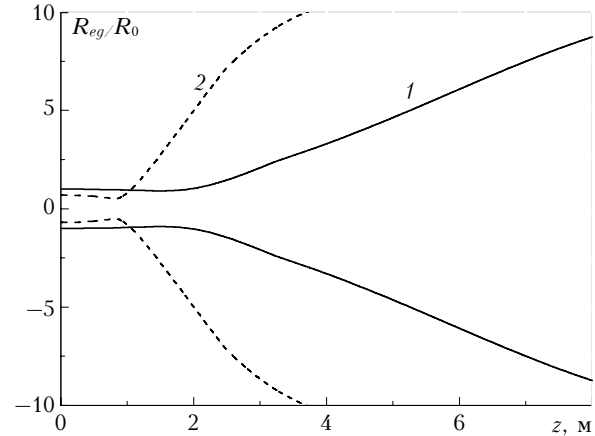


Рис. 1. Эволюция вдоль трассы распространения интегрального эффективного радиуса пучков гауссовского (1) и супергауссовского (2) поперечных профилей с относительной начальной мощностью  $\eta = 10$

Рис. 2 показывает те же данные, что и рис. 1, но для нормированных величин: глобальный эффективный радиус  $\bar{R}_{eg} = R_{eg}/R_{eg0}$  отнесен к его значению в начале трассы  $R_{eg0} = R_{eg}(z=0)$ , а расстояние  $\bar{z}^*$  рассчитано для каждого пучка в соответствии с его начальным профилем интенсивности.

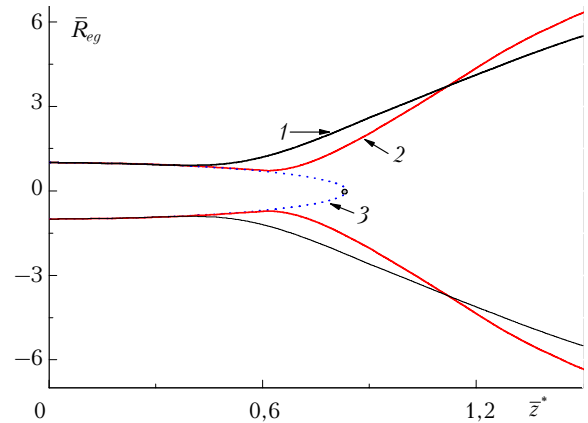


Рис. 2. То же, что и на рис. 1, при выборе обобщенных координат. Расчет по формуле (10) соответствует кривой 3; точка – расчетное положение коллапса пучка в целом ( $\bar{z}_K^*$ )

В рассматриваемом случае это дало величину отношения обобщенных дифракционных длин пучков:  $L_{D^*}(\text{ГП})/L_{D^*}(\text{СП}) \approx 2,9$ , т.е. «скорость» ди-

фракции пучка СГП почти в 3 раза выше, чем пучок гауссовского профиля.

Из рис. 2 видно, что в обобщенных координатах начальная стадия пространственной эволюции эффективного радиуса (поперечное сжатие) обоих пучков подобна и дается зависимостью (10). Сжимаясь, каждый пучок в дальнейшем формирует глобальную фокальную перетяжку, расположение по трассе  $z_g$  и поперечный размер которой зависят от конкретного профиля излучения. Здесь, если сравнивать между собой рис. 1 и 2, пучок СГП характеризуется более медленным по трассе самовоздействием, но имеет при этом более узкую фокальную перетяжку, чем пучок гауссовского профиля. Это прямое следствие квазиравномерного распределения интенсивности пучка СГП вблизи его оси, в результате чего световой пучок СГП под действием эффекта Керра фокусируется как единое целое, в отличие от пучка ГП, у которого интенсивность в центре возрастает опережающими темпами по сравнению с его периферией.

Более сильное поперечное сжатие супергауссовского пучка приводит и к более высокой его угловой расходимости после глобального фокуса. Однако формирующаяся на линейной стадии распространения предельная расходимость излучения  $\theta_{D\infty} = \lim_{z \rightarrow \infty} \theta_D(z)$ , т.е. после прохождения импульсом слоя нелинейности среды, как для ГП, так и для СГП, имеет близкие значения и существенно превышает ее начальную дифракционно обусловленную величину (для приведенных данных более чем в 30 раз).

Представляется важным получить оценку координаты положения глобального нелинейного фокуса пучка  $z_g$ , поскольку в данной точке реализуется максимальное по трассе значение среднеквадратической плотности энергии излучения  $w_e(z) = E(z)/[\pi R_{eg}^2(z)]$  [4]. Как видно из рис. 3, где показана пространственная эволюция эффективного размера лазерных пучков разных профилей, ход интегрального радиуса пучка  $R_{eg}$  [выражение (9)] наиболее близко соответствует поведению мгновенного эффективного радиуса  $R_e$  [выражение (2)], вычисленного в момент времени  $\tau = 0$ , т.е. в центре временного профиля импульса. Эволюция мгновенного эффективного радиуса в других временных сечениях импульса, как, например, представленные на рис. 3 поперечные размеры пучка во временных слоях на переднем и заднем фронтах импульса, демонстрирует качественно иное поведение вследствие более низкого значения мощности в срезах и влияния плазмы (подробнее об этом см. [6]).

Отметим, что положение центра глобальной фокальной перетяжки пучка  $z_g$  (кружок на рис. 3) при этом достаточно точно соответствует координате локального нелинейного фокуса центрального временного среза импульса  $z_l$  (крест на рис. 3):  $z_g \approx z_l$ . Данное обстоятельство позволяет приближенно рассчитать дистанцию глобальной самофоку-

сировки импульса как целого путем замены всего импульса одним временным слоем.

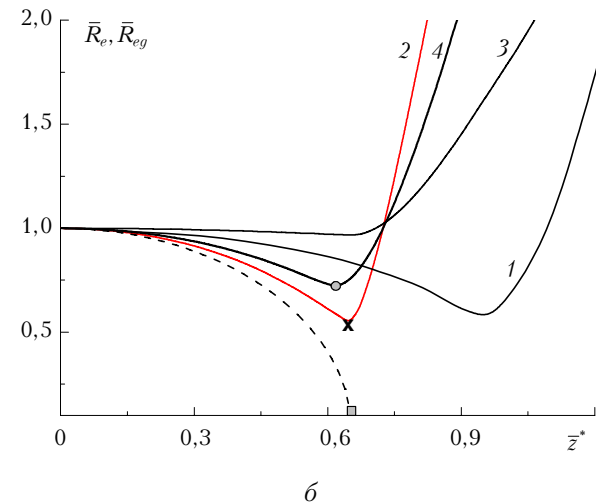
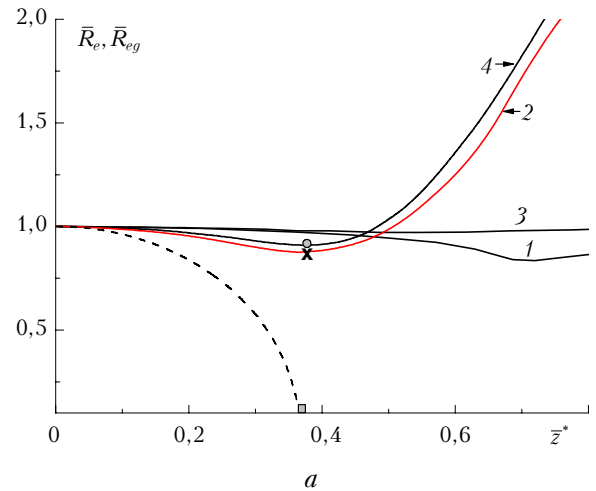


Рис. 3. Изменение мгновенного (кривые 1–3) и интегрального (4) эффективных радиусов световых пучков ГП (а) и СГП (б) вдоль трассы распространения при  $\eta = 10$ . Значения мгновенного радиуса вычислены для моментов времени  $\tau = -1$  (1); 0 (2); 1 (3). Штриховая линия – расчет по формуле (1)

Используя затем для этого слоя стационарную теорию самофокусировки (1), получим оценку координаты глобального нелинейного фокуса как точки керровского коллапса  $z_N$  центрального слоя (прямоугольник на рис. 3):

$$\bar{z}_g \approx \bar{z}_N = \left[ \frac{L_D \sqrt{\eta_G - 1}}{kR_0^2} + \frac{1}{F} \right]^{-1}, \quad (12)$$

где приведенный параметр самофокусировки  $\eta_G$  вычисляется с учетом конкретного поперечного профиля интенсивности в пучке:  $\eta_G = GP_0/P_{cg} = G\eta_0$  (в рассматриваемом случае для пучка СГП  $\eta_G \approx 2,4\eta_0$ ). Тогда сам размер фокальной перетяжки

пучка  $R_{eg}(z_g)$  находится по (10) подстановкой  $\bar{z}^* = \bar{z}_g^*$ , а нормированная эффективная фокальная плотность энергии импульса как

$$\bar{w}_g = \frac{w(\bar{z}_g^*)}{w(0)} \approx \frac{1}{\pi[(1-\eta^*)(\bar{z}_g^*)^2 + (1-\bar{z}_g^*/\bar{F})^2]} \quad (13)$$

Здесь начальное фокусное расстояние пучка для унификации записи нормировано на обобщенную дифракционную длину:  $\bar{F} = F/L_D^*$ .

Из полученных оценочных выражений (10), (12), (13) видно, как влияют начальные параметры лазерного пучка на характеристики самофокусировки импульса излучения. Например, уменьшение мощности пучка  $P_0$  без изменения его поперечного профиля эквивалентно снижению параметра самофокусировки  $\eta_G$ , что приведет к соответствующему удалению глобального нелинейного фокуса пучка  $z_g$ , увеличению степени поперечного сжатия пучка (уменьшение  $R_{eg}(z_g)$ ) и росту относительной плотности энергии в фокусе  $\bar{w}_g$ . Аналогичный эффект произведет и уменьшение начального геометрического радиуса пучка  $R_0$  при сохранении на прежнем уровне пиковой интенсивности в импульсе.

Таким образом, на основе численного решения нелинейного уравнения Шредингера проведен теоретический анализ нестационарной самофокусировки в воздухе ультракороткого лазерного импульса с различным поперечным распределением интенсивности. Использован формализм усредненных параметров излучения. Установлено, что в режиме

одиночной филаментации, по крайней мере для двух различных пространственных профилей интенсивности светового пучка, гауссовского и супергауссовского, существует подобие эволюции их интегральных эффективных радиусов, заключающееся в их единой функциональной зависимости (10) от обобщенной эволюционной переменной на дистанции вплоть до глобального нелинейного фокуса. В дальнейшем отмеченное подобие не наблюдается и пространственный ход эффективного радиуса пучка после прохождения им нелинейного фокуса зависит от начального профиля излучения.

1. *Siegman A.E.* Lasers. Oxford University Press: Mill Valley, CA. 1986. 568 p.
2. *Власов В.Н., Петрищев В.А., Галанов В.И.* Усредненное описание волновых пучков в линейных и нелинейных средах (метод моментов) // Изв. вузов. Радиофиз. 1971. Т. 14. № 9. С. 1353–1363.
3. *Lugovoi V.N., Prokhorov A.M.* A possible explanation of the smallscale self-focusing filaments // JETP Lett. 1968. V. 7. N 5. P. 117–119.
4. *Землянов А.А., Гейнц Ю.Э.* Интегральные параметры мощного фемтосекундного лазерного излучения при филаментации в воздухе // Оптика атмосф. и океана. 2005. Т. 18. № 7. С. 574–579.
5. *Землянов А.А., Гейнц Ю.Э.* Эволюция эффективных характеристик лазерного излучения фемтосекундной длительности при самовоздействии в газовой среде // Оптика и спектроскопия. 2008. Т. 104. № 5. С. 852–864.
6. *Землянов А.А., Гейнц Ю.Э.* Режим нестационарного самовоздействия острофокусированного мощного фемтосекундного лазерного импульса в воздухе // Оптика атмосф. и океана. 2008. Т. 21. № 9. С. 793–802.

*Yu.E. Geints, A.A. Zemlyanov.* **Self-focusing of ultrashort laser pulse with super-Gaussian spatial intensity profile.**

Results of theoretical investigations of non-stationary self-focusing in air of femtosecond laser radiation with Gaussian and super-Gaussian intensity spatial profile in single filamentation regime are presented. The formalism of effective beam parameters is used; the analytical expressions allowing calculating key parameters of non-stationary self-focusing of beams with non-Gaussian spatial profiles are derived. Qualitative and quantitative similarity of initial stage in spatial evolution of effective radius of super-Gaussian beam depending on generalized evolutionary variable on distances up to global nonlinear focus is established.