«Оптика атмосферы и океана», **8**, N 10(1995)

УДК 621.396.96

В.А. Хлусов

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ МАТРИЦЫ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ НЕВЗАИМНЫХ СРЕД

Рассмотрены вопросы оптимальной параметризации несимметричных комплексных операторов, принадлежащих пространству конгруэнтных преобразований. Предлагается оптимальная группа параметров матрицы обратного рассеяния (ОМР) произвольной среды, достаточным и неизбыточным образом характеризующих ее свойства обратного рассеяния электромагнитных волн и имеющих четкую физическую интерпретацию.

Показано, что невзаимные свойства среды отображаются в инвариантных характеристиках ее матрицы обратного рассеяния, обусловливающих ее асимметрию.

Известные в настоящее время экспериментальные данные позволяют говорить о том, что в случае, когда в зоне эффективной области обратного рассеяния электромагнитных волн присутствует магнитное либо электрическое поле, обусловленное сторонними источниками, матрица обратного рассеяния (ОМР) несимметрична [1]. Факт несимметрии ОМР ставит задачу исследования несимметричных комплексных операторов в пространстве конгруэнтных преобразований. Именно такой тип преобразований описывает представления ОМР в различных поляризационных базисах. Для симметричных матриц (описывающих взаимные среды) данное преобразование позволяет определить их каноническую форму представления (диагональный вид) и ввести достаточную и неизбыточную группу четко интерпретируемых параметров, характеризующих «внутренние» свойства рассеяния сред, описываемых этими операторами. Кратко отметим физический смысл этих параметров: ε_0 – угол эллиптичности собственного базиса ОМР; θ_0 – угол ориентации собственного базиса ОМР относительно измерительной системы координат; $\dot{\lambda}_1$, $\dot{\lambda}_2$ – собственные числа ОМР.

Угол эллиптичности ε_0 и угол ориентации θ_0 определяют эллиптичность и ориентацию большой оси эллипса поляризации электромагнитной волны. При облучении ею исследуемой среды (описываемой ОМР) мощность наблюдаемого отраженного сигнала на выходе взаимного одноканального анализатора–формирователя поля излучения достигает экстремальных значений. При этом коэффициенты отражения для двух ортогональных волн с углом эллиптичности ε_0 и $-\varepsilon_0$ и углом ориентации θ_0 и $\theta_0 \pm \pi/2$ соответственно пропорциональны собственным числам $\dot{\lambda}_1$, $\dot{\lambda}_2$ ОМР исследуемой среды, которые и являются характеристиками экстремальных значений отражательной способности среды в одноканальном однопозиционном методе.

Одноканальный однопозиционный метод описывается выражением

$$\dot{U}_p(t) = \dot{U}_0(t)\, \tilde{\mathbf{h}}\, S\, \mathbf{h}\,, \tag{1}$$

где ~ (тильда) – означает операцию транспонирования; $\dot{U}_p(t)$ – наблюдаемый отраженный скалярный сигнал; S – ОМР среды; $\dot{U}_0(t)$ – скалярный сигнал, возбуждающий поле в раскрыве анализатора-формирователя измерительной системы;

$$\mathbf{h} = L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \tag{2}$$

– вектор, описывающий поле излучения одноканального взаимного анализатора–формирователя при возбуждении его скалярным сигналом $\dot{U}_0(t)$. Оператор L в (2) описывает поляризационные свойства анализатора-формирователя поля и принадлежит группе вращений векторов Джонса в пространстве их стереографической проекции на сферу Пуанкаре. Он может быть представлен в мультипликативной форме

$$L = R_\theta\, F_\varepsilon = \begin{pmatrix} \cos\theta\,; & -\sin\theta \\ \sin\theta\,; & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varepsilon\,; & j\sin\varepsilon \\ j\sin\varepsilon\,; & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \tag{3}$$

и параметризован двумя независимыми параметрами ε и θ, определяющими эллиптичность и ориентацию вектора **h** в выражении (2). Наблюдаемый сигнал $\dot{U}_p(t)$ в выражении (1) для некоторых $\varepsilon = \pm\,\varepsilon_0$, $\theta = \theta_0 \pm \frac{\pi}{2}$ принимает экстремальное (по мощности) значение, пропорциональное числам $\dot{\lambda}_1$, $\dot{\lambda}_2$ ОМР. Используя (2) в (1), имеем

$$|\,\dot{U}_p(t)\,|^2_{\max} = \left|\,\dot{U}_0(t)\,(1;\,0)\,\widetilde{L}_0\, S\, L_0 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right|^2, \tag{4}$$

при этом

$$S_0 = \widetilde{L}_0\, S\, L_0 = \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где S_0 – представление симметричной ОМР в собственном поляризационном базисе. Подробное изложение и доказательство приведенных утверждений содержится в [2,3].

Для случая несимметричных ОМР (невзаимные среды) приведение их к диагональному виду конгруэнтным преобразованием вида (5) невозможно, что, в свою очередь оставляет открытым вопрос об оптимальной параметризации таких сред (либо их ОМР). (Автору не удалось найти работы, в которых такая параметризация разработана).

Рассмотрим общую форму представления декартовой несимметричной ОМР в различных поляризационных базисах. Будем считать, что в общем случае декартова ОМР произвольной среды задана четырьмя комплексными числами

$$S_g = \begin{pmatrix} \dot{S}_{11} & \dot{S}_{12} \\ \dot{S}_{21} & \dot{S}_{22} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

причем $\dot{S}_{21} \sim \dot{S}_{12}$ (следствие невзаимных свойств среды). Представим оператор S_g в виде разложения по ортогональной системе матриц Паули, дополненной единичной матрицей

$$\delta_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\ \delta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ \delta_3 = j\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

при этом оператор S_g принимает вид

$$S_g = A_0\,\delta_0 + A_1\,\delta_1 + A_2\,\delta_2 + A_3\,\delta_3 = \sum_{i=0}^{3} A_i\,\delta_i\,, \tag{8}$$

где коэффициенты разложения

$$A_i = 0{,}5\ \mathrm{Sp}\,\{S_g\,\delta_i\,\}\,; \tag{9}$$

Sp – след оператора, стоящего в фигурных скобках в (9).

Используя (6), (7) в выражении (8), запишем

$$S_g = 0{,}5\,\{(\dot{S}_{11}+\dot{S}_{22})\delta_0 + (\dot{S}_{11}-\dot{S}_{22})\delta_1 + (\dot{S}_{12}+\dot{S}_{21})\,\delta_2 + (\dot{S}_{12}-\dot{S}_{21})\delta_3\}. \tag{10}$$

Очевидно, что три первых члена разложения (10) образуют симметричный оператор

$$S_g^c = \begin{pmatrix} \dot{S}_{11} & 0{,}5(\dot{S}_{12} + \dot{S}_{21}) \\ 0{,}5(\dot{S}_{12} + \dot{S}_{21}) & \dot{S}_{22} \end{pmatrix},$$

$$S_g = S_g^c + \dot{\Delta} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где $\dot{\Delta} = 0{,}5(\dot{S}_{12} - \dot{S}_{21})$, а четвертый член разложения есть антисимметричный оператор с весовым коэффициентом $\dot{\Delta}$. Найдем представление декартового оператора S_g в произвольном базисе с параметрами ε, θ

$$S_\varepsilon = \tilde{L}\, S_g\, L = \tilde{F}_\varepsilon\, \tilde{R}_\theta\, S_g\, R_\theta\, F_\varepsilon\,. \tag{12}$$

Используя выражения для операторов R_θ, F_ε (см. выражение (3)), получим

$$S_\varepsilon = \tilde{L}\, S_g\, L = \tilde{L} \left\{ S_g^c + \dot{\Delta} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} L = \tilde{L}\, S_g^c\, L + \dot{\Delta} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

т.к. для любых возможных L справедливо

$$\tilde{L} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \to i\, n\, V\,, \tag{14}$$

т.е. оператор δ_3 в разложении (8) инвариантен к вращениям (преобразованиям), определяемым оператором L и имеет неизменный вид во всех возможных базисах представления. Из выражения (13) следует чрезвычайно важный вывод: разность внедиагональных элементов ОМР инвариантна к параметрам базиса описания ОМР, обусловлена только невзаимными свойствами среды и является ее объективной характеристикой.

Поскольку первое слагаемое в выражении (13) описывает конгруэнтное унитарное преобразование симметричного оператора S_g^C, постольку для некоторых $\varepsilon = \varepsilon_0$ и $\theta = \theta_0$

$$\tilde{L}_0\, S_g^c\, L_0 = \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

и, следовательно, в базисе описания с параметрами ε_0, θ_0 несимметричный декартов оператор S_g (см. выражение (6)) принимает вид

$$S_0 = \tilde{L}_0\, S_g\, L_0 = \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_2 \end{pmatrix} + \dot{\Delta} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Представление (16) позволяет ввести следующие параметры несимметричной ОМР: ε_0, θ_0 – параметры собственного базиса «симметричной» части ОМР; $\dot{\lambda}_1$ $\dot{\lambda}_2$ – собственные числа «симметричной» части ОМР; $\xi = \sqrt{2}\dot{\Delta}/\|S_g\|$ – комплексный коэффициент невзаимности среды ($\|\ \|$ – знак евклидовой нормы).

Определим наблюдаемый сигнал $\dot{U}_p(t)$ в одноканальной однопозиционной системе при облучении невзаимной среды, описываемой оператором S_g (см. выражение (11)). Подставляя в выражение (1) вместо оператора S оператор S_g , имеем

$$\dot{U}_p(t) = \dot{U}_0(t)\, \tilde{\mathbf{h}}\, S_g\, \mathbf{h} \tag{17}$$

и, используя выражение (2) для **h**, получим

$$\dot U_p(t) = \dot U_0(t)\,(1;0)\,\tilde L\left\{S_g^c + \dot\Delta\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \dot U_0(t)\,(1;0)\,\tilde L\,S_g^c L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad (18)$$

поскольку для любых возможных L справедливо

$$(1;0)\,\tilde L\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0\,. \quad (19)$$

Таким образом, наблюдаемый в одноканальной системе сигнал (18), в случае невзаимной среды, зависит только от «симметричной» части ее ОМР и достигает экстремальных (по мощности) значений при облучении среды собственными поляризациями ее «симметричной» части, т.е. при облучении полем, описываемым вектором

$$\mathbf{h}_0 = L_0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = R_{\theta_0}\,F_{\varepsilon_0}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad (20)$$

где ε_0, θ_0 – параметры собственного базиса симметричной части ОМР. Именно поэтому параметры ε_0, θ_0 и $\dot\lambda_1$, $\dot\lambda_2$ – определенные для несимметричного оператора (11), имеют тот же практический смысл, что и соответствующие параметры симметричных ОМР, рассмотренные выше.

Физический смысл параметра ξ – коэффициента невзаимности среды, заключается в следующем. Очевидно, что квадрат нормы оператора S_g в (11) равен сумме квадратов норм симметричной и антисимметричной ее частей, т.к.

$$\|S_g\|^2 = \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{2} |\dot S_{ij}|^2 = |\dot S_{11}|^2 + |\dot S_{22}|^2 + |\dot S_{12}|^2 + |\dot S_{21}|^2 = |\dot S_{11}|^2 + |\dot S_{22}|^2 + 0{,}5\,|\dot S_{12} + \dot S_{21}|^2 + 0{,}5\,|\dot S_{12} - \dot S_{21}|^2, \quad (21)$$

и поскольку первые три слагаемых в правой части (21) определяют квадрат нормы оператора S_g^C (см. выражение (11)), а четвертое слагаемое есть квадрат нормы антисимметричного оператора в правой части выражения (11), можем записать

$$\|S_g\|^2 = \|S_g^c\|^2 + 2\,|\dot\Delta|^2, \quad (22)$$

где $\dot\Delta = 0{,}5(\dot S_{12} - \dot S_{21})$. Из выражения (22) следует, что величина отношения квадратов норм ОМР и несимметричной ее части равна

$$2\,|\dot\Delta|^2/\|S_g\|^2 = |\xi|^2, \quad (23)$$

и, следовательно, величина модуля коэффициента невзаимности среды несет информацию о соотношении эффективной площади рассеяния (ЭПР) взаимной и невзаимной частей ее полной ЭПР. Очевидно, что для всех взаимных сред коэффициент невзаимности равен нулю, и для произвольных сред модуль величины ξ принадлежит интервалу $0 \div 1$. Аргумент коэффициента ξ определяет разность абсолютных фаз операторов симметричной и антисимметричной частей ОМР и, по-видимому, отражает факт разнесения взаимной и невзаимной ее частей в пространстве подобно тому, как разность фаз собственных чисел $\dot\lambda_1$, $\dot\lambda_2$ определяет разнесение элементов модели среды (например, вибраторов в двухвибраторной модели рассеивателя [2]) вдоль линии визирования.

В заключение отметим, что предлагаемая параметризация ОМР произвольной среды оптимальным образом описывает «внутренние», рассеивающие ее свойства, при этом оптимальность определяется неизбыточным и достаточным характером этих параметров, а также четкой физической интерпретацией каждого из них.

1. Boerner W.M., Yamaguchi Y. // A State-of-the-Art Review in Radar and its Applications in Remote Sensing, IEEE Aerosp. and Electron. Syst. Mag. 1990. N 5. P. 3–6.

2. К а н а р е й к и н Д . Б . , П а в л о в Н . Ф . , П о т е х и н В . А . Поляризация радио-локационных сигналов. М.: Сов. радио, 1966. 440 с.
3. Б о г о р о д с к и й В.В., К а н а р е й к и н Д.Б., К о з л о в А.И. Поляризация рассеянного и собственного радиоизлучения земных покровов. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 279 с.

Томская академия систем управления и радиоэлектроники

Поступила в редакцию
21 февраля 1995 г.

V . A . K h l u s o v . **Parametrization of Non-mutual Media Backscattering Matrix.**

Optimal parametrization of non-symmetric complex operators from the congruent transformations space is treated. An optimal group of parameters for the back-scattering matrix of arbitrary medium is proposed, characterizing sufficiently and non-excessively its electromagnetic wave backscattering properties and allowing for explicit physical interpretation.

Non-mutual properties of the media are shown to be mapped into invariant characteristics of its backscattering matrix stipulating its asymmety.