

ОПТИКА И ФИЗИКА СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

УДК 538.56

Эргодичность случайных процессов

В.В. Носов, В.П. Лукин, Е.В. Носов[✉], А.В. Торгаев*

*Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634055, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1*

Поступила в редакцию 19.05.2025;
после доработки 19.08.2025;
принята к печати 20.08.2025

Эргодические теоремы имеют важное значение при сопоставлении результатов измерений с выводами теории. Для получения «статистического ансамбля» требуется множество опытов в аналогичных условиях, что практически не представляется возможным. Поэтому средние значения вынуждено определяются по данным измерений одного опыта. Для этого используется осреднение эмпирических данных по некоторому интервалу времени или области пространства. На вопрос, насколько такие эмпирические средние близки вероятностным средним, отвечают так называемые теоремы эргодичности. Для стационарных процессов такая теорема была доказана Дж. Тейлором в 1922 г. В настоящей работе доказана эргодическая теорема для нестационарных случайных процессов. Доказательство подтверждает представления О. Рейнольдса (1894 г.), согласно которым интервал временного осреднения должен быть велик по сравнению с характерными периодами пульсационного поля, но мал по сравнению с периодами осредненного поля. Показано, что для умеренных длин реализаций нестационарную турбулентность можно считать локально стационарной (локально однородной). Установлена причина «эволюции уровня» — явления дрейфа или ухода среднего значения, которое заключается в зависимости средних значений гидродинамических полей от длины интервала осреднения и значительно затрудняет определение эмпирических средних значений. Указана приближенная мера для количественных оценок эволюции уровня; показано, что существует такое время осреднения, при котором влияние этого явления минимально. Полученные результаты важны для исследований турбулентности в атмосфере, в которой все гидродинамические элементы нестационарны и имеют выраженный суточный и годовой ход.

Ключевые слова: эргодическая теорема, нестационарный процесс, эволюция уровня, уход среднего значения, турбулентность, Тейлор, Рейнольдс; ergodic theorem, non-stationary process, level evolution, drift of the mean value, turbulence, Taylor, Reynolds.

Введение

Турбулентность присутствует и проявляется в большом числе физических процессов. Обычно она выступает в качестве искажающего фактора. Например, атмосферная турбулентность существенно искажает амплитуду и фазу распространяющихся электромагнитных и звуковых волн. Поэтому исследования турбулентности актуальны и ведутся уже на протяжении более двух сотен лет со времени опубликования уравнений Навье—Стокса (1822 г.).

Цель настоящей работы — доказать эргодическую теорему для случая нестационарных случайных процессов. Для стационарных процессов такая теорема доказана Дж. Тейлором (1922 г.). Установленный нами результат важен для исследований турбулентности в атмосфере, в которой все гидродинамические элементы нестационарны и имеют выраженный суточный и годовой ход. Доказательство подтверждает представления О. Рейнольдса (1894 г.),

согласно которым интервал временного осреднения должен быть велик по сравнению с характерными периодами пульсационного поля, но мал по сравнению с периодами осредненного поля. Теорема позволила установить причину явления «эволюция уровня» (она заключается в нестационарности случайных процессов) и указать приближенную меру для количественных оценок этого явления.

1. Краткий исторический обзор по проблеме осреднения случайных функций

Вследствие чрезвычайной сложности индивидуального описания полей скорости, давления, температуры и других характеристик развитых турбулентных течений еще в конце XIX в. было установлено, что при изучении турбулентности необходимо использовать какие-либо методы осреднения, позволяющие перейти от исходных гидродинамических полей к более плавным и регулярным средним значениям характеристик потока, которые можно исследовать с помощью обычных методов математического анализа. Достаточно подробный исторический

* Виктор Викторович Носов (nosov@iao.ru); Владимир Петрович Лукин (lukin@iao.ru); Евгений Викторович Носов (nev@iao.ru); Андрей Витальевич Торгаев (torgaev@iao.ru).

обзор научных работ, опубликованных по этому направлению в конце XIX — начале XX вв., представлен в монографии А.С. Мониной и А.М. Яглома [1].

На практике при определении среднего значения чаще всего пользуются временным или пространственным осреднением по какому-либо промежутку времени или области пространства. При этом важным является требование, чтобы применение рассматриваемого осреднения к дифференциальным уравнениям гидродинамики позволяло получить достаточно простые уравнения относительно средних значений гидродинамических полей. О. Рейнольдс [2] указал общие условия, которым должно удовлетворять любое осреднение, используемое в гидродинамике. В настоящее время эти условия обычно называются условиями Рейнольдса. Они относятся к любой функции, применяемой для описания турбулентности, в том числе и к случайным функциям (хотя такого понятия во времена Рейнольдса еще не существовало).

Если использовать временное или пространственное осреднение по некоторому интервалу, то можно показать [1], что не все условия Рейнольдса будут точно выполняться. Можно однако интервал осреднения выбрать так, чтобы эти условия выполнялись приблизительно со сравнительно большой степенью точности. Для этого надо чтобы для каждой функции u интервал осреднения был велик по сравнению с характерными периодами пульсационного поля u' ($u' = u - \bar{u}$), но мал по сравнению с периодами осредненного поля $\bar{u}$. Возможность выбора интервала осреднения, промежуточного между периодами пульсационного и осредненного движения, предполагает заранее, что турбулентное движение может быть разбито на сравнительно плавное и медленно меняющееся «среднее движение» и налагающееся на него крайне нерегулярное «пульсационное движение». Наиболее последовательное использование представления о том, что среднее значение $\bar{u}$ и пульсация u' функции u отличаются в первую очередь характерными периодами, состоит в определении среднего значения $\bar{u}$ как части разложения функции u в интеграл Фурье, отвечающей интегрированию по области значений соответствующей переменной (частоты), меньших по абсолютной величине некоторого фиксированного числа ω_M [1].

С развитием теории вероятностей (начало XX в.) вопросы об условиях осреднения Рейнольдса отошли на второй план. В современной статистической гидродинамике подразумевается, что гидродинамические поля турбулентного течения — это случайные поля в смысле, принятом в теории вероятностей. Иначе говоря, каждая конкретная реализация такого поля рассматривается как некий «представитель», извлеченный из «статистического ансамбля всевозможных полей». При этом осреднение любых гидродинамических величин следует понимать как теоретико-вероятностное осреднение по соответствующему ансамблю, и все свойства статистического осреднения, наличия которых требовал Рейнольдс, оказываются вытекающими из обычных свойств

вероятностного среднего. Таким образом, в современной теории турбулентности вопрос о смысле операции осреднения решается иначе, и при этом все условия Рейнольдса оказываются точно выполняющимися [1].

Однако при таком вероятностном подходе сразу возникает вопрос о сопоставлении выводов теории с данными измерений. На практике мы обычно не имеем множества опытов («статистический ансамбль») и вынуждены определять средние значения по данным измерений, проводившихся в течение одного опыта. Во всех таких случаях используется осреднение эмпирических данных по некоторому интервалу времени или области пространства. Поэтому необходимо выяснить, насколько близки эмпирические средние вероятностным средним. На этот вопрос отвечают так называемые теоремы эргодичности.

Современная эргодическая теория является разделом теории динамических систем, изучающим их статистические свойства; она возникла в первой трети XX в. Для нас представляет интерес эргодическая теорема Дж. Тейлора [3], устанавливающая условия сходимости по вероятности временного среднего к статистическому среднему для стационарных случайных функций. Эргодическую теорему Тейлора можно рассматривать как частный случай общей теоремы, впервые доказанной в 1938 г. Е. Служким в [4].

Стационарными случайными функциями (случайными процессами) описываются установившиеся физические процессы с внешними условиями, не меняющимися со временем. Средние значения стационарных случайных функций постоянны, а корреляционные функции зависят только от разности координат точек наблюдения. Однако в случае природных турбулентных потоков трудно гарантировать неизменность всех осредненных характеристик течения. Особенно это относится к турбулентности в атмосфере, где средние значения всех гидродинамических элементов обычно неустойчивы и имеют ярко выраженный суточный и годовой ход. Поэтому представляет интерес обобщение эргодической теоремы Тейлора на случай нестационарных случайных функций. Такое обобщение может рассматриваться как теоретическая опора для проведения корректных натурных экспериментов.

Современное состояние теории турбулентности подтверждает подход Рейнольдса к разложению турбулентного движения на сравнительно плавное и медленно меняющееся «среднее движение» и налагающееся на него крайне нерегулярное «пульсационное движение». Для пространственных случайных полей было установлено, что если разность точек наблюдения не превышает пространственный масштаб корреляции поля, то структурные функции флуктуаций поля имеют универсальный характер и зависят только от разности координат точек наблюдения [1]. В начале XX в. в теории турбулентности появились понятия однородных и локально однородных (а в дальнейшем и локально изотропных) случайных полей. При переходе к другим

областям в турбулентной среде, также имеющим размер порядка масштаба корреляции и удаленным на расстояние порядка масштаба корреляции, вид зависимости структурных функций от разности координат точек наблюдения не изменяется, однако может поменяться общая интенсивность флуктуаций. Далее появились понятия локально однородных полей с плавно меняющимися средними характеристиками [1, 5]. Как выяснилось, решения различных задач распространения электромагнитных волн в турбулентных локально однородных средах с плавно меняющимися средними характеристиками неплохо подтверждаются экспериментально [5, 6].

Случайные функции, зависящие только от времени (случайные процессы), являются аналогом пространственных случайных полей, поэтому и для них справедливо указанное выше. Стационарность соответствует однородности, а пространственный масштаб корреляции поля — временному масштабу корреляции (времени корреляции). Случайные стационарные процессы с плавно меняющимися средними характеристиками обычно называются квазистационарными [7] (используются и другие названия, например локально стационарные).

Сама по себе модель однородной и изотропной турбулентности непригодна для описания реальных турбулентных течений хотя бы потому, что пространственная однородность предполагает отсутствие у потока каких-либо границ и строгое постоянство его средней скорости. Но математический аппарат этой теории (предложенный в работе Дж. Тейлора, 1935 г. [1]) оказался ценным для описания свойств мелкомасштабных компонент турбулентных течений, так как статистический режим таких компонент, следуя А.Н. Колмогорову (1941 г. [1]), уже естественно предполагать однородным и изотропным. Это сразу серьезно упрощает математические исследования.

Работы Колмогорова послужили основой всего последующего развития теории локальной структуры турбулентности и ее приложений начиная с середины XX в. Благодаря успешному применению приближения однородности (что для случайных процессов соответствует стационарности) в теории турбулентности долгое время считалось общепринятым, что известная теорема эргодичности Тейлора [3], доказанная для стационарных процессов, достаточна для практических целей. Однако уже в середине XX в. в экспериментах было обнаружено «неприятное» явление дрейфа, или ухода среднего значения, названное «эволюцией уровня» [1, 5, 6]. Оно заключается в изменении зарегистрированных средних значений гидродинамических полей со временем. Дальнейший опыт показал, что определение средних значений по экспериментальным записям случайных реализаций — сложная задача, так как результат усреднения сильно зависит от длительности используемых реализаций. Что является причиной эволюции уровня, оставалось непонятным.

Подводя итог историческому обзору научных работ по проблеме осреднения случайных функций, кратко сформулируем основные достигнутые научные результаты. Рейнольдсом были указаны требования, предъявляемые к процессу осреднению функ-

ций (условия Рейнольдса). С развитием теории вероятностей все свойства осреднения полей, наличия которых требовал Рейнольдс, оказались вытекающими из обычных свойств вероятностного среднего. Следовательно, проблему осреднения случайных функций можно было бы считать решенной. Однако, как оказалось, при таком вероятностном подходе проблема осреднения переходит в другую аналогичную проблему — сопоставление выводов теории с данными измерений. Необходимо выяснить, насколько близки эмпирические средние вероятностным средним. На этот вопрос отвечают теоремы эргодичности. Одной из первых была эргодическая теорема Тейлора для стационарных случайных функций. Однако в природных турбулентных потоках трудно гарантировать стационарность. Поэтому представляет интерес обобщение эргодической теоремы Тейлора на случай нестационарных случайных функций. Указанное обобщение можно сделать на основе представлений Рейнольдса. Несмотря на то что во времена Рейнольдса теории вероятностей как науки еще не существовало, идеи, заложенные в условия Рейнольдса, позволяют в настоящее время называть эти условия эргодической гипотезой Рейнольдса для нестационарных случайных функций.

2. Эргодическая теорема Тейлора для стационарных случайных процессов

Пусть $u(t)$ есть случайная функция (случайный процесс, t — время), для которой мы хотим получить статистическое среднее (среднее по ансамблю реализаций, вероятностное среднее, математическое ожидание) $\langle u(t) \rangle$ путем осреднения по времени. Рассмотрим действительный стационарный случайный процесс с известной корреляционной функцией

$$B_u(t_1 - t_2) = \langle [u(t_1) - \langle u \rangle][u(t_2) - \langle u \rangle] \rangle. \quad (1)$$

Вследствие стационарности среднее по ансамблю значение функции постоянно, $\langle u(t) \rangle = \text{const}$, а корреляционная функция четна, $B_u(-t) = B_u(t)$.

Определим среднее по времени $\overline{u(t)}$ случайной функции u за интервал осреднения T

$$\overline{u(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T d\tau u(t - \tau), \quad (2)$$

$$\overline{u(t)} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} d\tau u(t - \tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} d\tau u(t + \tau). \quad (2a)$$

Первое определение (2) соответствует несимметричному интервалу (относительно начала координат, $t = 0$), второе — симметричному. Они отличаются только сдвигом начала координат, определение (2a) совпадает с (2), если в (2) аргумент t заменить на $t + T/2$. Для стационарных случайных функций $u(t)$ оба определения равнозначны, для нестационарных же определение (2a) предпочтительнее, так как в расчетах часто позволяет упростить аналитические выражения. Как видно из (2), временное

среднее от случайной функции само является случайной функцией. При повторном определении $\bar{u}$ по различным участкам аргумента функции $u(t)$ в общем случае будут получаться отличающиеся значения среднего $\bar{u}$.

Вычислим средний квадрат разности между средним по времени и средним по ансамблю

$$\sigma_u^2 = \left\langle \left[\overline{u(t)} - \langle u(t) \rangle \right]^2 \right\rangle. \quad (3)$$

Согласно Рейнольдсу, случайную функцию $u(t)$ можно представить в виде суммы статистического среднего $\langle u(t) \rangle$ и флуктуаций (пульсаций) $u'(t)$, имеющих нулевое статистическое среднее, $u(t) = \langle u(t) \rangle + u'(t)$, $\langle u'(t) \rangle = 0$. Подставим это определение в выражение для $u(t)$ в (3). В этом случае выражение (3) можно записать как

$$\sigma_u^2 = \left\langle \left[A_T(t) + \overline{u'(t)} \right]^2 \right\rangle, \quad A_T(t) = \langle \overline{u(t)} \rangle - \langle u(t) \rangle. \quad (3a)$$

Здесь величина $A_T(t)$ уже не случайная (детерминированная). Тогда из формулы (3a) (возводя в квадрат, осредняя и учитывая, что $\langle \overline{u'(t)} \rangle = 0$) находим

$$\sigma_u^2 = A_T^2(t) + \left\langle \left[\overline{u'(t)} \right]^2 \right\rangle. \quad (3b)$$

Для стационарных случайных процессов статистическое среднее постоянно и не зависит от времени: $\langle u(t) \rangle = \langle u \rangle$. Временное же среднее от постоянной величины, как следует из (2), равно самой этой величине. Поэтому для стационарных случайных процессов $A_T(t) = 0$. Следовательно,

$$\sigma_u^2 = \left\langle \left[\overline{u'(t)} \right]^2 \right\rangle. \quad (3c)$$

Подставляя сюда выражение для $u'(t)$ и учитывая определения (1) и (2), получим

$$\begin{aligned} \sigma_u^2 &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T B_u(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 = \frac{2}{T^2} \int_0^T dt \int_0^t B_u(\tau) d\tau = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T} \right) B_u(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

Исходя из этих представлений, в [4] было показано, что для того чтобы σ_u^2 сходилась к нулю, необходимо и достаточно выполнение условия (условие Слуцкого)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T B_u(\tau) d\tau = 0. \quad (5)$$

Это условие выполняется, если корреляционная функция на бесконечности убывает ($B_u(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$). Однако корреляционную функцию пульсаций гидродинамического поля турбулентного потока всегда можно считать стремящейся к нулю на бесконечности [1]. Поэтому для установившихся стационарных потоков условие Слуцкого выполняется.

В работе Тейлора [3] было использовано несколько более сильное, чем (5), условие (условие Тейлора), что существует интеграл от корреляционной функции, определяющий интегральный масштаб корреляции (время корреляции) τ_K случайной функции $u(t)$:

$$\tau_K = \frac{1}{B_u(0)} \int_0^\infty B_u(\tau) d\tau < \infty. \quad (6)$$

На практике это условие тоже обычно выполняется [1].

В случае, когда $T \gg \tau_K$, вторым слагаемым в скобках в формуле (4) можно пренебречь по сравнению с единицей, а интеграл от первого слагаемого выразить через τ_K . В результате получаем главный член асимптотического разложения величины (4) по малому параметру τ_K/T :

$$\sigma_u^2 = \frac{2B_u(0)\tau_K}{T}. \quad (7)$$

Выражение (7) представляет собой содержание эргодической теоремы Тейлора [3] для стационарных случайных процессов. Формула дает оценку скорости сходимости средних по времени к среднему по ансамблю. Из сходимости дисперсии σ_u^2 к нулю при $T \rightarrow \infty$ следует сходимость в среднеквадратичном, из которой вытекает сходимость по вероятности [1]. Это утверждение (вместе с центральной предельной теоремой) следует из известного неравенства П.Л. Чебышёва и рассматривается как один из основных результатов теории вероятностей. Так как статья Тейлора [3] была опубликована ранее работы [4], то и приведенная эргодическая теорема обычно носит его имя.

Временное осреднение, задаваемое формулами (2) или (2a), соответствует осреднению непрерывной функции $u(t)$ на интервале длиной T . Непрерывность осредняемой функции позволяет называть указанное осреднение непрерывным. В связи с быстрым развитием вычислительной техники становятся актуальными вопросы осреднения дискретных случайных процессов. Такие процессы обычно представляют собой последовательность значений случайной функции $u(t_n)$ в точках дискретного аргумента t_n , $n = 1, 2, \dots$. Временное осреднение дискретных процессов (его можно назвать дискретным осреднением) сводится к соответствующим суммам по переменной n . В более сложном случае применяется дискретно-непрерывное усреднение, которое соответствует конечному времени отклика измерителя. При таком усреднении, обычно реализующемся на практике, любая дискретная последовательность эмпирических значений случайной функции сама является частично осредненной по некоторому интервалу изменения аргумента Δt (обычно $\Delta t < T$). Отметим, что для всех вышеуказанных типов дискретного осреднения в случае стационарных случайных процессов эргодические теоремы, аналогичные теореме Тейлора (с применением как условия Слуцкого, так и условия Тейлора), доказаны в работе авторов настоящей статьи [8].

3. Эргодическая теорема для нестационарных случайных процессов

Перейдем теперь к нестационарным случайным процессам. В этом случае среднее по ансамблю значение функции $\langle u(t) \rangle$ непостоянно, т.е. является функцией от времени t .

Вычислим средний квадрат разности между средним по времени и средним по ансамблю σ_u^2 . Эта величина представляется вышеприведенными формулами (3), (3а), (3б). Для нестационарных случайных процессов, в отличие от стационарных, детерминированная функция $A_T(t) = \langle u(t) \rangle - \langle u(t) \rangle$ в выражении (3б) уже не равна тождественно нулю. Вид этой функции зависит от поведения во времени статистического среднего $\langle u(t) \rangle$.

Исследуем вначале функцию $A_T(t)$.

Для этого перейдем в частотную область изменения статистического среднего $\langle u(t) \rangle$ с помощью преобразования Фурье:

$$\langle u(t) \rangle = \int e^{it\omega} w(\omega) d\omega, \quad (8)$$

$$w(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-it\omega} \langle u(t) \rangle dt.$$

Если применить определение (2а) и выражение (8), то

$$\begin{aligned} \overline{\langle u(t) \rangle} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} d\tau \langle u(t - \tau) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} d\tau \int e^{i(t-\tau)\omega} w(\omega) d\omega = \\ &= \int e^{it\omega} w(\omega) F_T(\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (9)$$

$$F_T(\omega) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} d\tau e^{-i\tau\omega} = \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}. \quad (10)$$

Функция осреднения $F_T(\omega)$ в (10) — четная и с ростом частоты ω значительно убывает (при $\omega \gg \omega_T$, где $\omega_T = 2\pi/T$; следовательно, частоту ω_T можно назвать частотой осреднения). Это следует из рис. 1,

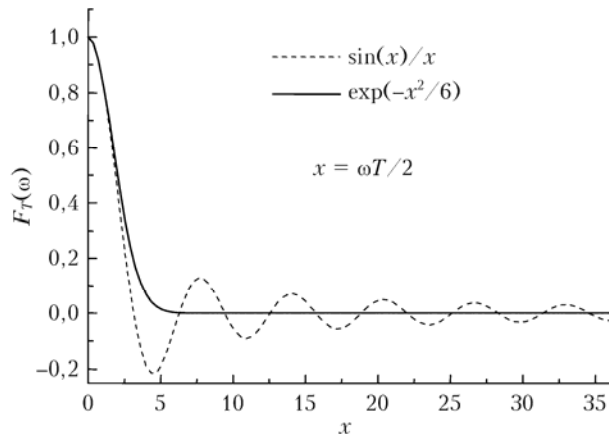


Рис. 1. Частотный фильтр $F_T(\omega)$, подавляющий высокие частоты ω в функции $\langle u(t) \rangle$ за счет ее осреднения по времени

на котором показана функция $F_T(\omega)$. Здесь же приведена ее аппроксимация гауссоидой. Как видно, в области, существенной для интегрирования ($\omega \lesssim \omega_T$), значения $F_T(\omega)$ и ее гауссовой аппроксимации практически совпадают.

Функции, подобные $F_T(\omega)$, широко применяются в теории фильтрации для описания спектральных окон. Несмотря на более слабое по сравнению с гауссоидой убывание на бесконечности, такого убывания вполне достаточно, чтобы подавить высокие частоты в спектрах реальных процессов, встречающихся на практике [7].

Как видно из формул (9) и (10), множитель $F_T(\omega)$ выполняет роль частотного фильтра, подавляющего высокие частоты ω в преобразовании Фурье от детерминированной функции $\langle u(t) \rangle$. Этот фильтр возникает за счет временного осреднения (за время T). Фильтр $F_T(\omega)$ локализован в области $|\omega| \leq \omega_T$ и подавляет частоты ω , большие, чем ω_T .

Подставив выражения (8) и (9) в определение величины $A_T(t)$, получаем

$$A_T(t) = \overline{\langle u(t) \rangle} - \langle u(t) \rangle = \int e^{it\omega} w(\omega) [F_T(\omega) - 1] d\omega. \quad (11)$$

Далее мы воспользуемся представлением Рейнольдса [2] о том, что среднее значение $\langle u(t) \rangle$ и пульсации $u'(t)$ функции $u(t)$ отличаются в первую очередь характерными периодами. Как отмечено в историческом обзоре А.С. Мониной и А.М. Яглома [1], наиболее последовательное применение указанного представления Рейнольдса состоит в определении среднего значения $\langle u(t) \rangle$ как части разложения функции $u(t)$ в интеграл Фурье, отвечающей интегрированию по области значений частот, меньших по абсолютной величине некоторого фиксированного числа ω_M . Это означает, что спектр среднего значения $w(\omega)$ не равен нулю (локализован) только в области изменения аргумента, где $|\omega| \leq \omega_M$.

Частоту ω_M можно назвать характерной частотой изменения статистического среднего значения $\langle u(t) \rangle$ (или максимальной частотой статистического среднего). Она является верхней (положительной) границей диапазона $|\omega| \leq \omega_M$. Как известно, циклическая частота ω связана с соответствующим временным периодом T_ω соотношением $\omega = 2\pi/T_\omega$. Учитывая это равенство, максимальной частоте ω_M можно поставить в соответствие временной период T_M ($\omega_M = 2\pi/T_M$) и назвать его минимальным периодом статистического среднего.

В представлениях Рейнольдса речь идет только о спектре среднего значения. На спектр же пульсаций $u'(t)$ никаких ограничений не накладывается, и он не обязан быть локализован в противоположной области изменения аргумента ($|\omega| \geq \omega_M$), как это первоначально [1] предполагалось при обсуждении условий осреднения Рейнольдса. Как мы увидим ниже, характерным периодом пульсаций $u'(t)$ служит время корреляции τ_K случайной функции $u(t)$. Соответствующую времени τ_K частоту ω_K ($\omega_K = 2\pi/\tau_K$) можно назвать частотой корреляции.

С помощью введенных обозначений гипотезу эргодичности Рейнольдса для нестационарных процессов (необходимо, чтобы интервал временного осреднения был велик по сравнению с характерными периодами пульсационного поля, но мал по сравнению с периодами осредненного поля) теперь можно записать в виде неравенств $T_M \gg T \gg \tau_K$. В частотной области эти неравенства выглядят как $\omega_M \ll \omega_T \ll \omega_K$.

Рассмотрим пока только первое неравенство в частотной области $\omega_M \ll \omega_T$ и вернемся к выражению (11). Из представлений Рейнольдса следует, что спектр среднего значения $w(\omega)$ локализован в области $|\omega| \leq \omega_M$, а функция фильтра $F_T(\omega)$ — в области $|\omega| \leq \omega_T$. Поэтому, если выполняется интересующее нас неравенство $\omega_T \gg \omega_M$, то в пределах меньшего диапазона $|\omega| \leq \omega_M$ величина $F_T(\omega)$ будет близка к единице ($F_T(\omega) \approx 1$). Следовательно, $w(\omega) F_T(\omega) \approx w(\omega)$ и в выражении (11) $w(\omega) [F_T(\omega) - 1] \approx 0$. Это означает, что если выполняется неравенство $\omega_T \gg \omega_M$, то, как видно из (11), $A_T(t) \approx 0$. Причем приближенное равенство $A_T(t) \approx 0$ выполняется для всех значений времени t . Ясно, что так и должно быть согласно представлению Рейнольдса, когда $\omega_T \gg \omega_M$ (или $T \ll T_M$). Однако желательно установить вид главного члена разложения по малому параметру ω_M/ω_T .

Более точные оценки скорости сходимости к нулю величины $A_T(t)$ при $\omega_T \gg \omega_M$ можно дать, если в соответствии с представлениями Рейнольдса воспользоваться гауссовой аппроксимацией спектра среднего значения:

$$w(\omega) = w(0) \exp(-\omega^2/\omega_M^2). \quad (12)$$

Как показывают данные многочисленных экспериментов, проведенных в природных случайно неоднородных средах [1, 5, 6], спектры средних значений $\langle u(t) \rangle$ случайных процессов $u(t)$ неплохо (в среднем без мелких деталей) описываются выражением (12). Это подтверждается также данными многолетних измерений в атмосфере, выполненных авторами настоящей статьи. В то же время спектр (преобразование Фурье) самих случайных процессов $u(t)$, как правило, не имеет такого выраженного убывания на больших частотах, как в (12), и убывание спектров $u(t)$ с ростом частоты происходит более медленно (чаще степенным образом).

Спектр среднего значения (12) соответствует нестационарному случайному процессу. Из него, как частный случай, должен вытекать спектр среднего значения стационарного процесса. Таким спектром, как известно и видно из (8), является функция $c \cdot \delta(\omega)$, где c — постоянная величина ($c = \langle u(0) \rangle = \langle u \rangle = \text{const}$), а $\delta(\omega)$ — дельта-функция. Указанный спектр получается из (12) при $\omega_M \rightarrow 0$, если в (12) постоянную $w(0)$ считать равной величине $c/(\sqrt{\pi}\omega_M)$, которая для каждого конкретного значения ω_M тоже постоянна.

Примем также гауссову аппроксимацию фильтра $F_T(\omega)$. В соответствии с данными рис. 1

$$F_T(\omega) = \exp\left(-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right), \quad \omega_1 = 2\frac{\sqrt{6}}{T} = \frac{\sqrt{6}}{\pi}\omega_T = 0,78\omega_T, \quad (13)$$

где, как и выше, $\omega_T = 2\pi/T$ — частота осреднения.

Подставим аппроксимации (12) и (13) в выражения (8) и (9) и проинтегрируем. Тогда

$$A_T(t) = \overline{\langle u(t) \rangle} - \langle u(t) \rangle = c_* \left[\left(1/\sqrt{1+x}\right) \exp(-\alpha/(1+x)) - \exp(-\alpha) \right], \quad (14)$$

где для краткости введены обозначения $\alpha = t^2\omega_M^2/4$, $x = \omega_M^2/\omega_1^2$, $c_* = w(0)\sqrt{\pi}\omega_M = c$. Как видно из (14), для принятых аппроксимаций $\langle u(t) \rangle$ также представляется гауссоидой

$$\langle u(t) \rangle = c_* \exp(-\alpha) = \langle u(0) \rangle \exp(-t^2\omega_M^2/4). \quad (15)$$

Так как частота ω_1 отличается от ω_T только постоянным множителем порядка единицы (см. (13)), то для нас в равенстве (14) существенны только малые значения величины x , отвечающие интересующему нас (и выполняющемуся на практике) условию $\omega_M/\omega_T \ll 1$ (или $T \ll T_M$).

Раскладывая выражение (14) в степенной ряд по малому параметру x , получаем

$$A_T(t) = c_* \exp(-\alpha) \times \left[(-1/2 + \alpha)x + (1/2)(3/4 - 3\alpha + \alpha^2)x^2 + \dots \right]. \quad (16)$$

Для того чтобы в (16) можно было ограничиться первым членом разложения, необходимо, чтобы при $\alpha \lesssim 1$ выполнялось условие $x \ll 1$, а при $\alpha \gg 1$ — условие $x\alpha \ll 1$.

Условие $\alpha \gg 1$ ($t \gg T_M/\pi$) не представляет большого интереса, так как соответствует очень быстрому (экспоненциальному) убыванию функции $A_T(t)$ до нуля с ростом времени t (см. выражения (14), (16)). Кроме того, как видно из (15), при безграничном увеличении времени, на котором рассматривается случайный процесс, изменяется и само понятие среднего ($\langle u(t) \rangle = 0$). Это означает, что неограниченный рост времени сглаживает (выравнивает) все неоднородности процесса (как случайные, так и средние).

Однако ясно, что неограниченный рост времени, на котором рассматривается случайный процесс (например, условие $t \gg T_M$), на практике не выполняется. Время t как аргумент случайной функции $u(t)$, условно говоря, задает «длину» функции $u(t)$. Если фиксировать начало оси времени $t = 0$ и некоторый положительный момент времени $t = t_R$ и не интересоваться временами большими, чем t_R , то интервал $(0, t_R)$ называется длиной случайной выборки. Этот интервал (а чаще просто значение t_R) называется также длиной реализации. Длина реализации обычно определяется задачами и техническими возможностями экспериментатора. В существующей экспериментальной практике длина реализации не бывает чрезмерно большой. Сама процедура проведения эксперимента обычно опирается на имеющиеся теоретические представления об изучаемом физическом процессе [1, 5–7]. Такие представле-

ния позволяют условно разделить изучаемый процесс на регулярную «среднюю» (медленную) и «случайную» (быструю) составляющие. Граница между этими составляющими и дает оценку величины T_M . После продолжительных экспериментальных исследований значение T_M уточняется. Для этого приходится обращаться также к данным о низкочастотных спектрах гидродинамических элементов (см., например, спектр ван дер Ховена, 1957 г. [1]). В настоящее время для заметно нестационарных ситуаций [1, 5–7] в теории атмосферной турбулентности величина T_M оценивается в несколько минут (обычно 3–5), а в метеорологии – в десятки минут (обычно 20). В ситуациях, близких к стационарным, указанные значения T_M могут значительно увеличиться. При этом типичные эксперименты проводятся на длине «случайной» составляющей, временные периоды которой меньше, чем T_M . Следовательно, в типичных случаях длина случайной выборки (длина реализации) t_R не превышает значения T_M (т.е. $t_R \lesssim T_M$). Это означает, что $t \lesssim T_M$ и $\alpha \lesssim 1$.

Высказанные соображения о реальной длине реализации подтверждают принятые в современной теории турбулентности взгляды на нестационарные случайные процессы как локально стационарные (для пространственных случайных полей – как локально однородные). Если время внутри одной реализации t не превышает минимальный период статистического среднего T_M (точнее, $t < T_M/\pi$), то, как видно из (15), $\langle u(t) \rangle \approx \langle u \rangle = \text{const}$. Это и означает, что внутри такой реализации приближенно наблюдается режим стационарного случайного процесса. Следовательно, нестационарные случайные процессы можно считать локально стационарными, если экспериментальные случайные выборки имеют умеренную длину ($t_R < T_M/\pi$).

Можно отметить также, что при выполнении условия $t \lesssim T_M$ приближенный режим стационарного случайного процесса будет наблюдаться даже для больших времен t . Для этого, естественно, необходимо увеличить величину периода T_M (следовательно, уменьшить частоту ω_M). Длина интервала локализации ($|\omega| \leq \omega_M$) спектра среднего значения $w(\omega)$ уменьшится. При неограниченном увеличении времени t интервал локализации спектра стягивается в одну точку $\omega = 0$, и тогда $w(\omega) = c\delta(\omega)$.

Таким образом, в выражении (16) можно считать $\alpha \lesssim 1$ (и $t \lesssim T_M$) и ограничиться первым членом разложения при условии $x \ll 1$ (что соответствует условию $T \ll T_M$). Тогда

$$A_T(t) = c \cdot \exp(-\alpha)(-1/2 + \alpha)x. \quad (17)$$

Подставляя в (17) обозначения из выражения (14), можно $A_T(t)$ также записать в виде

$$\begin{aligned} A_T(t) &= \langle u(t) \rangle (\pi^2/6)(-1/2 + t^2\omega_M^2/4)(\omega_M^2/\omega_T^2) = \\ &= \langle u(t) \rangle (\pi^2/6)(-1/2 + t^2\omega_M^2/4)(T/T_M)^2. \end{aligned} \quad (17a)$$

Как видно, $A_T(t)$ как функция времени t представляется достаточно сложным выражением, что не очень удобно для практических целей. В то же время величина $A_T^2(t)$ является слагаемым в инте-

ресующем нас представлении для дисперсии σ_u^2 (выражение (3b)). Если мы укажем верхнюю оценку функции $A_T(t)$ по времени $A_{T \max}(t) \leq A_{T \max}$, то из сходимости к нулю этой верхней оценки будет следовать сходимость к нулю самой функции $A_T(t)$ и ее квадрата. Такую максимальную оценку можно получить, варьируя в (17) параметр α в диапазоне $0 \leq \alpha \leq 1$. Тогда $A_{T \max} = (c*/2)x$ и в обозначениях, принятых в (14), имеем

$$\begin{aligned} A_{T \max}(t) &= \langle u(0) \rangle (\pi^2/12)(T/T_M)^2 = \\ &= 0,82\langle u(0) \rangle (T/T_M)^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Отсюда

$$A_{T \max}^2(t) = 0,67\langle u(0) \rangle^2 (T/T_M)^4. \quad (19)$$

В зависимости от системы единиц, в которых измеряется функция $u(t)$, осредненное значение этой функции в нуле $\langle u(0) \rangle$ может оказаться отрицательным, поэтому здесь и далее в оценках максимальных величин под максимальным значением функции в нуле понимается его модуль.

Представления (18) и (19) имеют гораздо более простой вид, чем выражение (17a). Для оценок среднее стационарного процесса $\langle u(0) \rangle$ в (19) можно заменить на максимальное теоретическое $\langle u(t) \rangle$ либо эмпирическое $\langle u(t) \rangle$ значение. Как видно из (19), с уменьшением времени осреднения T величина $A_{T \max}^2$ существенно убывает. Например, по сравнению со случаем $T/T_M = 1$ при $T/T_M = 1/2$ она убывает в 16 раз, при $T/T_M = 1/3$ – в 81 раз и т.д.

Исследуем теперь второе слагаемое $\langle [u'(t)]^2 \rangle$ в выражении (3b). Это слагаемое должно соответствовать второму неравенству Рейнольдса в частотной области ($\omega_T \ll \omega_K$), из которого следует $\tau_K \ll T$. Оценки времени корреляции τ_K на практике обычно не вызывают затруднений. Для атмосферы (температура и продольная скорость) они приведены в нескольких опубликованных работах авторов настоящей статьи (см. [9]). Так, например, в типичных условиях (безразличная стратификация) $\tau_K \leq 10$ –15 с. В отдельных редких случаях (сильно неустойчивая или сильно устойчивая стратификация) оно больше, но не превышает 45–60 с. Поэтому даже обычное для атмосферной турбулентности двухминутное осреднение (при такой же или большей длине реализации), как правило, позволяет считать неравенство $\tau_K \ll T$ выполненным.

Корреляционная функция нестационарного действительного процесса $u(t)$ зависит не только от разности точек t_1, t_2 , но и от каждой точки отдельно:

$$\begin{aligned} B_u(t_1, t_2) &= \langle [u(t_1) - \langle u(t_1) \rangle][u(t_2) - \langle u(t_2) \rangle] \rangle = \\ &= \langle u'(t_1) u'(t_2) \rangle. \end{aligned} \quad (20)$$

По известной корреляционной функции B_u стандартным образом определяется коэффициент корреляции b_u случайной функции $u(t)$:

$$b_u(t_1, t_2) = \frac{B_u(t_1, t_2)}{B_u^{1/2}(t_1, t_1) B_u^{1/2}(t_2, t_2)}. \quad (21)$$

Так как корреляционная функция $B_u(t_1, t_1)$ в совпадающих точках ($t_2 = t_1$) равна дисперсии $\sigma_u^2(t_1)$ функции $u(t)$, то

$$B_u(t_1, t_2) = \sigma_u(t_1)\sigma_u(t_2)b_u(t_1, t_2). \quad (22)$$

Отсюда видно, что как $B_u(t_1, t_2)$, так и $b_u(t_1, t_2)$ от перестановки местами аргументов не изменяются, т.е. $B_u(t_1, t_2) = B_u(t_2, t_1)$, $b_u(t_1, t_2) = b_u(t_2, t_1)$.

Подставляя выражение для $u'(t)$ и учитывая определения (2) и (20), получим

$$\langle [u'(t)]^2 \rangle = \frac{1}{T^2} \int_0^T dt_1 \int_0^T dt_2 B_u(t - t_1, t - t_2). \quad (23)$$

Выполним в (23) замену переменных $\tau' = t_1 - t_2$, $t' = (t_1 + t_2)/2$, что соответствует $t_1 = t' + \tau'/2$, $t_2 = t' - \tau'/2$. При этом изменится область интегрирования (квадрат в переменных t_1, t_2 переходит в ромб в переменных t', τ'). Введя для краткости функцию $f(t_1, t_2)$, имеем

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2) &= B_u(t - t_1, t - t_2), \quad f(t_1, t_2) = f(t_2, t_1), \\ \frac{1}{T^2} \int_0^T dt_1 \int_0^T dt_2 f(t_1, t_2) &= \\ &= \frac{1}{T^2} \left[\int_0^T d\tau' \int_{\tau'/2}^{T-\tau'/2} dt' + \int_{-T}^0 d\tau' \int_{-\tau'/2}^{T+\tau'/2} dt' \right] \times \\ &\times f(t' + \tau'/2, t' - \tau'/2). \end{aligned}$$

Заменой τ' на $-\tau'$ второй интеграл здесь сводится к первому от функции $f(t' - \tau'/2, t' + \tau'/2)$, которая представляет собой ту же самую функцию f (что и в первом интеграле), но с переставленными местами аргументами. Так как $f(t_1, t_2) = f(t_2, t_1)$, то правая часть последнего соотношения равна удвоенному первому слагаемому. Следовательно,

$$\begin{aligned} f(t' + \tau'/2, t' - \tau'/2) &= B_u(t - t' - \tau'/2, t - t' + \tau'/2) = \\ &= B_u(t - t' + \tau'/2, t - t' - \tau'/2) \end{aligned}$$

и выражение (23) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \langle [u'(t)]^2 \rangle &= \frac{2}{T^2} \int_0^T d\tau' \int_{\tau'/2}^{T-\tau'/2} dt' B_u(t_* + \tau'/2, t_* - \tau'/2), \\ t_* &= t - t'. \end{aligned} \quad (24)$$

В статистической физике [7] обычно используются краткие обозначения

$$\begin{aligned} B(t, \tau) &= B_u(t + \tau/2, t - \tau/2), \\ b(t, \tau) &= b_u(t + \tau/2, t - \tau/2), \end{aligned}$$

выделяющие в виде функций двух переменных зависимости от суммарной «медленной» t и разностной «быстрой» τ переменных. Такие обозначения важны для нестационарных процессов. Пусть, например, $B(t, \tau)$ меняется с изменением переменной t гораздо медленнее, чем с изменением сдвиговой переменной τ . Это означает, что характерные времена

изменения по t и τ существенно разные. Если T_K — наибольший масштаб по τ , а t_K — наименьший по t , то $t_K \gg T_K$. В этом случае, как показано в [7], амплитуда двумерного преобразования Фурье функции $B(t, \tau)$ локализована в плоскости частотных координат в виде вытянутой полосы длиной $1/T_K$ вдоль частотной оси, соответствующей переменной τ в функции $B(t, \tau)$. Ширина этой полосы составляет $1/t_K$. Она отсчитывается в поперечном направлении, соответствующем переменной t в функции $B(t, \tau)$, поэтому указанную ширину полосы можно связать с шириной ω_M ($\omega_M = 2\pi/T_M$) одномерного спектра среднего значения, введенного на основе представлений Рейнольдса (см. формулу (12)), т.е. $\omega_M = 2\pi/T_M \sim 1/t_K$. Как следует из [7], $B(t, 0)$ тоже должна быть медленной функцией от t , т.е. мало меняться на интервалах t порядка T_K .

В работе [7] также установлено, что в этом случае двумерная и одномерная плотности вероятностей случайного процесса $u(t)$ являются медленными функциями. Медленной функцией будет и среднее значение $\langle u(t) \rangle$. Сам случайный процесс с первыми и вторыми моментами ($\langle u(t) \rangle$, $\langle u^2(t) \rangle$, $B(t, \tau)$ и др.), мало меняющимися по t на наибольшем характерном интервале флуктуаций T_K , называется квазистационарным [7]. Такое определение позволяет распространить свойства первого момента, выявленные на основе представлений Рейнольдса ($\langle u(t) \rangle$ (15)), на вторые моменты процесса. Для этого следует приравнять характерные времена изменения: $t_K = T_M$, $T_K = \tau_K$. Тогда аналогичными (15) формулами будут описываться не только $\langle u(t) \rangle$, но и вторые моменты (например, $\sigma_u^2(t) = B(t, 0)$ и др.), рассматриваемые как медленные функции от t .

В указанных обозначениях, согласно (22),

$$B(t, \tau) = \sigma_u(t + \tau/2)\sigma_u(t - \tau/2)b(t, \tau). \quad (25)$$

Учитывая (25), соотношение (24) можно записать в виде (где по-прежнему $t_* = t - t'$)

$$\begin{aligned} \langle [u'(t)]^2 \rangle &= \\ &= \frac{2}{T^2} \int_0^T d\tau' \int_{\tau'/2}^{T-\tau'/2} dt' \sigma_u(t_* + \tau'/2)\sigma_u(t_* - \tau'/2)b(t_*, \tau'). \end{aligned} \quad (26)$$

Разложим теперь внутренний интеграл в (26) в степенной ряд по быстрой переменной τ' (кроме функции $b(t_*, \tau')$). Для этого введем время корреляции $\tau_K(t)$ (обобщенное условие Тейлора):

$$\tau_K(t) = \int_0^\infty d\tau b(t, \tau) < \infty.$$

При интересующем нас условии малости времени корреляции $\tau_K(t)$, по сравнению со временем осреднения T ($\tau_K(t) \ll T$), появляющиеся в выражении (26) интегралы по переменной τ' от коэффициента корреляции на отрезке $(0, T)$ можно заменить на интегралы на интервале $(0, \infty)$. Относительная погрешность такой замены (например, для одно-

масштабного коэффициента корреляции) составляет очень малую величину: $\exp[-(T/\tau_K)^2](\tau_K/T) \ll 1$, поэтому

$$\int_0^\infty d\tau' (\tau')^n b(t, \tau') = \beta_n [\tau_K(t)]^{n+1},$$

$$n = 0, 1, \dots; \beta_n = \text{const}, \beta_0 = 1.$$

Интегрирование по t' во внутреннем интеграле в (26) можно распространить на всю ось t' , если ввести в рассмотрение характеристическую функцию $p(t', \tau')$ интервала $\tau'/2 \leq t' \leq (T - \tau'/2)$:

$$p(t', \tau') = \theta(t' - \tau'/2) - \theta(t' - [T - \tau'/2]),$$

где $\theta(x)$ — функция «ступенька» [$\theta(x) = 1$ при $x > 0$; $\theta(x) = 0$ при $x < 0$]. Следует иметь в виду, что разложение $p(t', \tau')$ в ряд по τ' содержит обобщенные функции

$$p(t', \tau') = p(t', 0) + p'_\tau(t', 0)\tau' + \dots =$$

$$= [\theta(t') - \theta(t' - T)] - (1/2)[\delta(t') + \delta(t' - T)]\tau' + \dots$$

Нам еще потребуются оценки производных от $\sigma_u(t)$ и $\tau_K(t)$, рассматриваемых как медленные функции от t . Если для краткости обозначить любую медленную функцию буквой $q(t)$, то, принимая во внимание сказанное выше про аналогию этих величин с медленной функцией $\langle u(t) \rangle$ (см. формулу (15)), получаем (обозначения совпадают с принятыми в (14), (15))

$$q(t) = q(0)\exp(-\alpha) = q(0)\exp(-t^2\omega_M^2/4),$$

$$q(t)_{\max} = q(0),$$

$$q(t)\dot{\gamma}_t = q(0)\exp(-t^2\omega_M^2/4)(-2t\omega_M^2/4) =$$

$$= q(t)(-\alpha^{1/2}\omega_M) = q(0)(-\alpha^{1/2})\exp(-\alpha)(2\pi/T_M),$$

$$|q(t)\dot{\gamma}_t|_{\max} = q(0)(2\pi/T_M).$$

Максимальные оценки по времени здесь получены (аналогично выражению (18)) варьированием параметра α в диапазоне $0 \leq \alpha \leq 1$. Дифференцируя далее, убеждаемся, что каждое увеличение порядка производной $q(t)$ приводит к дополнительному множителю ω_M ($\omega_M = 2\pi/T_M$), малому по сравнению с другими характерными частотами.

Эргодическая гипотеза Рейнольдса для нестационарных процессов предполагает одновременное выполнение двух неравенств: $\omega_M \ll \omega_T \ll \omega_K$. Потому условие $\omega_M/\omega_T \ll 1$ должно выполняться. Из (14), (16), (18) следует, что для всяких функций $q(t)$, рассматриваемых как медленные функции от t ,

$$\overline{q(t)}_{\max} = q(t)_{\max} [1 + O(\omega_M^2/\omega_T^2)].$$

Поэтому максимальные значения как самой медленной функции $q(t)$, так и ее временного среднего, можно считать практически совпадающими.

Принимая во внимание указанные соображения, после разложения внутреннего интеграла в формуле (26) в степенной ряд по быстрой переменной τ' , получаем

$$\langle [\overline{u'(t)}]^2 \rangle = \frac{2}{T^2} \int_0^T dt' [\tau_K(t_*) \sigma_u^2(t_*) + R(t_*) \tau_K(t_*)^3 \beta_2 + \dots] -$$

$$- \frac{1}{T^2} \{ [\sigma_u^2(t) \tau_K(t)^2 + \sigma_u^2(t-T) \tau_K(t-T)^2] \beta_1 +$$

$$+ [R(t) \tau_K(t)^4 + R(t-T) \tau_K(t-T)^4] \beta_3 + \dots \},$$

$$R(t) = (1/4) [\sigma_u(t) (\sigma_u)_t'(t) - ((\sigma_u)_t'(t))^2].$$

Здесь, как и выше, $t_* = t - t'$, поэтому данное выражение можно представить в более кратком виде, сохранив только первый член разложения по малому параметру $\tau_K(t)/T$ (так как $T_M \gg T \gg \tau_K$, то два последних отношения из трех, выписанных ниже в правой части, имеют более высокий порядок малости по сравнению с первым):

$$\langle [\overline{u'(t)}]^2 \rangle = \frac{2}{T} \overline{\sigma_u^2(t) \tau_K(t)} +$$

$$+ O\left(\frac{\tau_K^2(t)}{T^2}, \frac{\tau_K^2(t) \tau_K(t)}{T_M^2 T}, \frac{\tau_K^2(t) \tau_K^2(t)}{T_M^2 T^2}\right).$$

Для максимальной оценки по времени отсюда имеем

$$\langle [\overline{u'(t)}]^2 \rangle_{\max} = 2\sigma_u^2(0) \frac{\tau_K(0)}{T} + O\left(\frac{\tau_K^2(0)}{T^2}\right). \quad (27)$$

Сравнивая эргодическую теорему Тейлора (выражения (3с), (7) с учетом равенств $B_u(0) = \sigma_u^2(0)$ и $\tau_K = \tau_K(0)$) с этой максимальной оценкой, видим, что они в точности совпадают.

Объединяя максимальные оценки (19) и (27) для обоих слагаемых в равенстве (3б), имеем

$$\sigma_u^2 \leq \sigma_u^2|_{\max}, \quad (28)$$

$$\sigma_u^2|_{\max} = A_T^2 \max + \langle [\overline{u'(t)}]^2 \rangle_{\max} =$$

$$= 0,67 \langle u(0) \rangle^2 (T/T_M)^4 + 2\sigma_u^2(0) \tau_K(0)/T.$$

Формула (28) представляет собой содержание эргодической теоремы для нестационарных случайных процессов. Она дает оценку скорости сходимости средних по времени к среднему по ансамблю. Из сходимости дисперсии σ_u^2 к нулю при $\sigma_u^2|_{\max} \rightarrow 0$ следует сходимость в среднеквадратичном, из которой вытекает сходимость по вероятности [1]. Выбрав желательную нам степень точности, т.е. наибольшую ошибку $\sigma_u^2|_{\max}$, которую еще можно считать допустимой при замене $\langle u(t) \rangle$ на $u(t)$, мы можем определить по формуле (28) и требуемый период осреднения T . Как видно из формулы (28), интервал осреднения T можно выбрать так, чтобы условие малости величины $\sigma_u^2|_{\max}$ приблизительно выполнялось со сравнительно большой степенью точности. Для этого необходимо, чтобы интервал временного осреднения был велик по сравнению с характерным периодом пульсационного поля ($T \gg \tau_K$), но мал по сравнению с минимальным периодом статистического среднего ($T_M \gg T$). Именно такие условия ($T_M \gg T \gg \tau_K$) и были приняты при доказательстве эргодической теоремы для нестационарных

случайных процессов (28). Ясно, что наименьшая погрешность (28) будет наблюдаться при наибольшей разнице между границами указанного диапазона T_M и τ_K , в частности, для стационарного процесса, когда $T_M \rightarrow \infty$ и формула (28) переходит в эргодическую теорему Тейлора (7).

Выражение для $\sigma_u^2|_{\max}$ в (28) как функция времени осреднения T имеет экстремум (минимум) в точке $T = T_{\text{extr}}$, где

$$T_{\text{extr}} = 0,94\tau_K\mu^{2/5}(T_M/\tau_K)^{4/5},$$

$$\mu = \sigma_u(t)|_{\max}/\langle u(t) \rangle|_{\max} = \sigma_u(0)/\langle u(0) \rangle. \quad (29)$$

Величина μ в формуле (29) является отношением максимального во времени стандартного отклонения $\sigma_u(t)|_{\max}$ случайной функции $u(t)$ к ее максимальному среднему значению $\langle u(t) \rangle|_{\max}$. Дисперсия же $\sigma_u^2(t)|_{\max}$ пропорциональна, как известно, интенсивности турбулентности, поэтому μ естественно назвать относительной силой турбулентности. Для краткости назовем величину μ просто силой турбулентности.

Сама же величина $\sigma_u^2|_{\max}$ в формуле (28) в экстремальной точке $T = T_{\text{extr}}$ не равна нулю, но минимальна и статистическим образом задает минимальный уровень отклонения эмпирического временного среднего $\bar{u}(t)$ от теоретического статистического среднего $\langle u(t) \rangle$ (которое, как известно, является первым моментом от плотности вероятности случайного процесса $u(t)$ и обычно называется математическим ожиданием). Именно отклонения эмпирического среднего от теоретического среднего, которые проявляются в экспериментах и зависят от времени осреднения T , приводят к явлению «эволюции уровня». Как указывалось выше, это явление было обнаружено в экспериментах еще в середине XX в. [1, 5, 6]. Приемлемых объяснений ему не было. Теперь мы видим, что причиной эволюции уровня является обычная нестационарность случайных процессов (неоднородность случайных полей).

Величина $\sigma_u^2|_{\max}$ в экстремальной точке $T = T_{\text{extr}}$ может служить приближенной мерой, фиксирующей минимальное отклонение эмпирического среднего от теоретического. Удобно в качестве такой относительной меры E принять корень из указанной величины, нормированный на среднее значение:

$$E = \{[\sigma_u^2|_{\max}]_{T=T_{\text{extr}}}\}^{1/2}/\langle u(t) \rangle|_{\max} =$$

$$= [\sigma_u^2|_{\max}]^{1/2}|_{T=T_{\text{extr}}}/\langle u(0) \rangle. \quad (30)$$

Подставив в выражение для $\sigma_u^2|_{\max}$ в (28) в качестве времени осреднения T величину T_{extr} (29) и используя определение (30), получаем

$$E = 1,63\mu^{4/5}\left(\frac{\tau_K}{T_M}\right)^{2/5}. \quad (30a)$$

Меру E можно назвать критерием эволюции уровня. Он приблизительно показывает, насколько (в долях $\langle u(t) \rangle|_{\max}$) в экспериментах минимально отклоняется эмпирическое среднее от теоретического среднего.

Так как минимум величины $\sigma_u^2|_{\max}$ наблюдается только в экстремальной точке $T = T_{\text{extr}}$, то для других времен осреднения T , отличающихся от T_{extr} ($T \neq T_{\text{extr}}$), аналогичные относительные отклонения эмпирических средних от теоретических будут больше, чем E . Для уменьшения этого эффекта в экспериментах времени осреднения T следует выбирать близкими к T_{extr} , для чего, согласно (29), необходимо как можно точнее определять значения времен τ_K и T_M (и иметь оценки величин $\sigma_u(0)$, $\langle u(0) \rangle$, задающих параметр μ). Несмотря на вероятностный характер экстремального времени осреднения T_{extr} , оно может служить практическим ориентиром при проведении экспериментов.

На рис. 2 приведены соответствующие формулам (29) и (30a) экстремальное значение времени осреднения T_{extr} и критерий эволюции уровня E в атмосферной турбулентности ($T_M = 5$ мин) в зависимости от силы турбулентности μ .

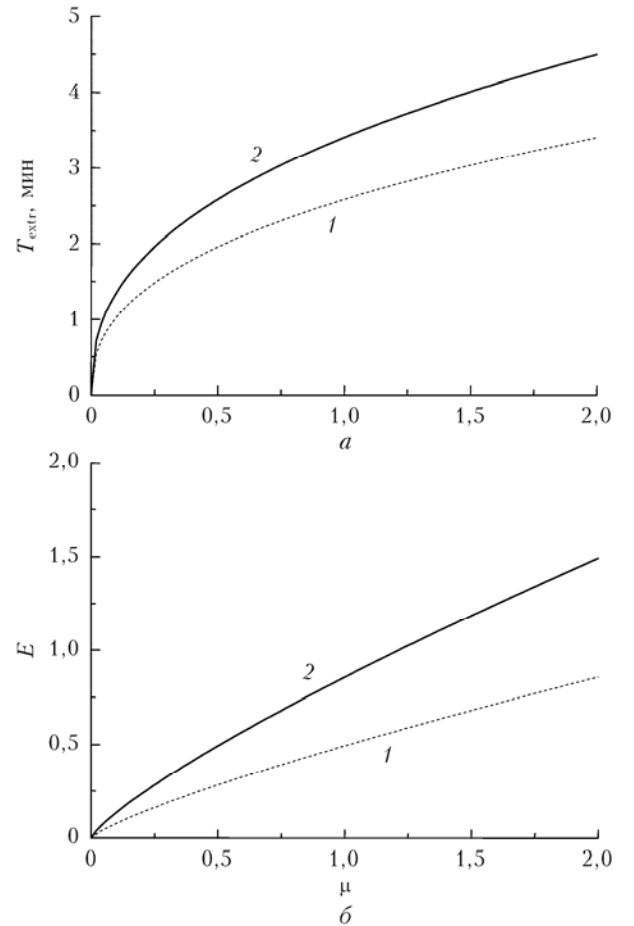


Рис. 2. Экстремальное значение времени осреднения T_{extr} (a) и критерий эволюции уровня E (б) в атмосферной турбулентности ($T_M = 5$ мин) в зависимости от силы турбулентности μ при $\tau_K = 15$ с (1) и 60 с (2)

Как видно из рис. 2, для типичных атмосферных условий (обычно безразличная стратификация и малые времена корреляции τ_K) T_{extr} находится в интересующем нас диапазоне $T_M > T_{\text{extr}} > \tau_K$ (кривая 1 на рис. 2, a)), а критерий эволюции уровня E

не превышает единицы (кривая 1 на рис. 2, б)). В редких нетипичных случаях (например, сильно устойчивая стратификация и большие времена корреляции τ_K), когда значения μ становятся больше единицы (в основном за счет малости $\langle u(0) \rangle$, см. (29)), T_{extr} становится сравнимым с T_M (кривая 2 на рис. 2, а)), а критерий эволюции уровня E превышает единицу (кривая 2 на рис. 2, б)). Как отмечалось в [1], в указанном случае недостаточно обычного времени осреднения и нужно увеличивать длину реализации (и соответственно время T_M).

Заключение

В настоящей работе доказана эргодическая теорема для нестационарных случайных процессов. Этот результат важен для исследований турбулентности в атмосфере, в которой все гидродинамические элементы нестационарны и имеют выраженный суточный и годовой ход. Доказательство подтверждает представления Рейнольдса, согласно которым интервал временного осреднения должен быть велик по сравнению с характерными периодами пульсационного поля, но мал по сравнению с периодами осредненного поля. Показано, что для умеренных длин экспериментальных случайных выборок в нестационарной турбулентности приближенно реализуются локально стационарные случайные процессы (локально однородные случайные поля).

Установлена причина «эволюции уровня» — обнаруженного в экспериментах явления дрейфа, или ухода среднего значения. Это явление значительно затрудняет определение средних значений по экспериментальным записям случайных реализаций, так как выяснилось, что результат усреднения сильно зависит от длительности используемых реализаций и длины интервала осреднения. Явление эволюции уровня было обнаружено в экспериментах еще в середине XX в. Приемлемых объяснений этому явлению не было. Доказанная нами эргодическая теорема позволила установить, что причиной эволюции уровня является нестационар-

ность случайных процессов (неоднородность случайных полей). Указана приближенная мера для количественных оценок явления эволюции уровня. Показано, что существует такое время осреднения T (названное нами экстремальным T_{extr}), при котором эффект эволюции уровня минимален. Поэтому в экспериментах времени осреднения T следует выбирать близкими к T_{extr} .

Финансирование. Исследование выполнено в рамках научной программы Национального центра физики и математики (проект «Физика высоких плотностей энергии. Этап 2023–2025»). Разработка методологии измерений, анализа и расчетов с использованием инфраструктуры ИОА СО РАН выполнена в рамках госзадания ИОА СО РАН.

Список литературы

1. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Т. 1. М.: Наука, 1965. 639 с.; Т. 2. М.: Наука, 1967. 720 с.
2. Reynolds O. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion // *Phil. Trans. Roy. Soc. London*. 1894. V. 186. P. 123–161.
3. Taylor G.I. Diffusion by continuous movements // *Proc. London Math. Soc.* 1922. V. s2-20, iss. 1. P. 196–212.
4. Slutsky E. Sur les fonctions aleatoires presque periodiques et sur la decomposition des fonctions aleatoires stationnaires en composantes // *Actual. Sci. Industr.* 1938. N 38. P. 33–55.
5. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.
6. Гурвич А.С., Кон А.И., Миронов В.Л., Хмелевцов С.С. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1976. 277 с.
7. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Часть I. Случайные процессы. М.: Наука, 1976. 496 с.
8. Nosov V.V., Lukin V.P., Nosov E.V., Torgaev A.V. Discrete-uninterrupted averaging in Taylor ergodic theorem // *Proc. SPIE*. 2006. V. 6160. P. 616034-1–15. DOI: 10.1117/12.675919.
9. Nosov V.V., Lukin V.P., Nosov E.V., Torgaev A.V. Temporal correlation of temperature fluctuations in a stratified atmosphere // *Proc. SPIE*. 2022. V. 12341 1M [12341-269]. DOI: 10.1117/12.2645089.

V.V. Nosov, V.P. Lukin, E.V. Nosov, A.V. Torgaev. **Ergodicity of random processes.**

Ergodic theorems are important when comparing measurement results with theoretical conclusions. Compilation of a “statistical ensemble” requires numerous experiments under similar conditions, which is practically impossible. Therefore, average values are necessarily derived from the measurement data of a single experiment by averaging the empirical data over a certain time range or spatial region. The question of how close such empirical averages are to probability averages is answered by so-called ergodic theorems. An ergodic theorem for stationary processes was proved by G. Taylor in 1922. In this work, we have proved an ergodic theorem for the case of non-stationary random processes. The proof confirms the ideas of O. Reynolds (1894), according to which the time averaging interval should be large compared to the characteristic periods of a pulsation field, but small compared to the periods of the averaged field. The cause of the drift of the mean value, which consists in the dependence of the average values of hydrodynamic fields on averaging interval length and significantly complicates the determination of empirical average values, is found. An approximate measure for quantitative assessments of this phenomenon is suggested; the existence of an averaging time at which the influence of this phenomenon is minimal is shown. The results are important for studies of atmospheric turbulence, where all hydrodynamic elements are non-stationary and show pronounced daily and annual variations.