

А.П. Иванов, В.А. Лойко, В.В. Бердник

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ ПОГЛОЩЕНИЯ В СЛОЯХ СЛАБОПОГЛОЩАЮЩЕЙ ДИСПЕРСНОЙ СРЕДЫ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ТОЛЩИНЫ

Получены формулы для определения показателя поглощения дисперсной среды по измеренным значениям коэффициентов отражения и пропускания слоев конечной толщины. Предложено два способа определения слабых поглощений. Для реализации первого достаточно иметь один образец конечной толщины, второго — два: конечной и бесконечно большой толщин. Показано, что минимальные погрешности, достигаемые в обоих способах, близки. Однако второй способ позволяет определять показатель поглощения с погрешностью, мало отличающейся от минимальной в более широком интервале толщин слоев, чем первый.

В основе известных методов определения показателя поглощения рассеивающей среды ϵ_n лежат асимптотические решения прямой задачи уравнения переноса для толстых слоев [1–3]. В случае слабого поглощения эти решения позволяют получить простые аналитические выражения для расчета характеристик рассеяния слоев по их коэффициентам отражения и пропускания [1, 2, 5] или по коэффициентам яркости на границах слоя [3, 4].

При анализе характеристик поглощения различных дисперсных сред, в том числе атмосферного аэрозоля, осажденного на подложку, не всегда можно считать слой оптически толстым, и названные методы становятся неприменимыми. В данной статье рассмотрена методика определения показателя поглощения дисперсной среды, которая свободна от ограничения, связанного с требованием большой оптической толщины слоя. Предлагаемый подход основан на использовании интегральных уравнений, связывающих яркости на границах слоя с телом яркости в глубинном режиме. Вывод этих уравнений базируется на том, что при определенных условиях освещения уравнение переноса для плоского слоя допускает разделение переменных в усредненных по азимуту коэффициентах яркости [6]. В этом случае интенсивность излучения на оптической глубине $\tau = \epsilon z$ (ϵ — показатель ослабления среды; z — расстояние от верхней границы слоя) запишется в виде $J_\Gamma(\mu, \tau) = \varphi(\mu) \exp(-\Gamma\tau)$, где $\Gamma = \frac{1}{v_{\max}}$; v_{\max} и $\varphi(\mu)$ — наибольшее собственное значение и соответствующая этому значению собственная функция однородного уравнения переноса.

$$(v_{\max} - \mu) \varphi(\mu) = \frac{\Lambda v_{\max}}{2} \int_{-1}^1 x(\mu, \mu_0) \varphi(\mu_0) d\mu_0, \quad (1)$$

где $x(\mu, \mu_0) = \sum_0^N \frac{2l+1}{2} x_l P_l(\mu_0)$; x_l — коэффициенты разложения индикатрисы рассеяния элементарного объема по полиномам Лежандра $P_l(\mu_0)$; N — число членов в разложении; μ и μ_0 — косинусы углов падения и рассеяния; Λ — вероятность выживания фотона, равная отношению показателей рассеяния и ослабления.

Пусть плоскопараллельный слой рассеивающей среды с оптической толщиной τ_0 освещен сверху излучением, угловое распределение которого задается функцией $J_\Gamma(\mu_0)$, а снизу — излучением с угловым распределением $J_\Gamma(-\mu, \tau_0)$, где $\tau_0 = \epsilon z_0$; z_0 — геометрическая толщина слоя. Тогда из слоя вверх выйдет излучение с угловым распределением $J_\Gamma(\mu, 0)$, а вниз с $J_\Gamma(\mu, \tau_0)$. Используя разделение переменных функций $J_\Gamma(\mu, \tau)$, можно записать следующие соотношения, связывающие коэффициенты яркости на границах слоя $\sigma(\mu, \mu_0)$ и $\rho(\mu, \mu_0)$ с собственной функцией $\varphi(\mu)$ однородного уравнения переноса:

$$\int_0^1 \mu_0 \sigma(\mu, \mu_0) \varphi(\mu_0) d\mu_0 + e^{-\Gamma\tau_0} \int_0^1 \mu_0 \rho(\mu, \mu_0) \varphi(-\mu_0) d\mu_0 = (e^{-\Gamma\tau_0} - e^{-\tau_0/\mu}) \varphi(\mu); \quad (2)$$

$$e^{-\Gamma\tau_0} \int_0^1 \mu_0 \sigma(\mu, \mu_0) \varphi(-\mu_0) d\mu_0 + \int_0^1 \mu_0 \rho(\mu, \mu_0) \varphi(\mu_0) d\mu_0 = (1 - e^{-\Gamma\tau_0} e^{-\tau_0/\mu}) \varphi(-\mu). \quad (3)$$

В слабопоглощающих слоях тело яркости в глубинном режиме является линейной функцией μ_0 [1]:

$$\varphi(\mu_0) = 1 + \alpha\mu_0, \quad (4)$$

где параметр α определяется свойствами среды и должен быть найден по измерениям углового распределения излучения на границах слоя.

Подставляя (4) в (2) и (3) и полагая $\mu = 1$, получим следующие соотношения, справедливые для слоев произвольной толщины:

$$\sigma_1 + \alpha\sigma_2 + t(\rho_1 - \alpha\rho_2) = (t - T)(1 + \alpha); \quad (5)$$

$$t(\sigma_1 - \alpha\sigma_2) + (\rho_1 + \alpha\rho_2) = (1 - tT)(1 - \alpha), \quad (6)$$

где

$$\sigma_n = \int_0^1 \mu_0^n \sigma(\mu = 1, \mu_0) d\mu_0; \quad \rho_n = \int_0^1 \mu_0^n \rho(\mu = 1, \mu_0) d\mu_0; \\ t = e^{-\Gamma\tau_0}; \quad T = e^{-\tau_0}.$$

Для удобства введем коэффициенты $k_\sigma = \sigma_2/\sigma_1$ и $k_\rho = \rho_2/\rho_1$, зависящие от свойств среды и толщины слоя. Тогда формулы (5), (6) примут вид

$$\sigma_1(1 + \alpha k_\sigma) + t\rho_1(1 - \alpha k_\rho) = (t - T)(1 + \alpha); \quad (7)$$

$$t\sigma_1(1 - \alpha k_\sigma) + \rho_1(1 + \alpha k_\rho) = (1 - tT)(1 - \alpha). \quad (8)$$

Обратим внимание на то, что в силу симметрии $\sigma(\mu, \mu_0)$ и $\rho(\mu, \mu_0)$ по переменным μ и μ_0 угловые распределения $\sigma(\mu_0) = \sigma(\mu = 1, \mu_0) = \sigma(\mu_0, \mu = 1)$ и $\rho(\mu_0) = \rho(\mu = 1, \mu_0) = \rho(\mu_0, \mu = 1)$ можно определять, измеряя зависимости коэффициентов яркости выходящего из слоя излучения от угла при нормально падающем на слой пучке излучения. Из формул (5)–(8) следует:

$$\alpha = \sqrt{\frac{(1 - \rho_1^2) - (\sigma_1 + T)^2}{(1 + k_\rho \rho_1)^2 - (k_\sigma \sigma_1 + T)^2}}; \quad (9)$$

$$t = \frac{(\sigma_1 + T) + \alpha(k_\sigma \sigma_1 + T)}{(1 - \rho_1) + \alpha(1 + k_\rho \rho_1)}; \quad (10)$$

$$\Gamma = -\frac{1}{\tau_0} \ln t. \quad (11)$$

Связь между параметрами α , Λ , Γ можно найти, используя соотношения (1) и (4). Подставим (4) в (1), умножим обе части (1) на μ и возьмем интеграл по μ в пределах $[-1; 1]$. Тогда

$$\alpha = 3(1 - \Lambda)/\Gamma. \quad (12)$$

Используя (11) и (12), можно найти показатель поглощения слоя:

$$\varepsilon_n = \varepsilon(1 - \Lambda) = \frac{1}{3} \frac{1}{z_0} \alpha (-\ln t), \quad (13)$$

т.е. значение ε_n определяется по данным о геометрической толщине слоя и о моментах коэффициентов яркости на границах слоя.

Нетрудно видеть, что соотношение (11) переходит в известную формулу

$$\varepsilon_n = q\Gamma \cdot \Gamma\varepsilon, \quad (13a)$$

где $q = (3 - x_1)^{-1}$. Входящие в (13a) параметры $q\Gamma$ и $\Gamma\varepsilon$ находят по измеренным значениям коэффициента отражения бесконечно толстого слоя и коэффициентов пропускания оптически толстых слоев [3–5, 10]. Заметим, что при таком подходе (в отличие от предлагаемого в данной работе) необходимо иметь не один, а несколько образцов.

Оценим область применения полученных соотношений (9), (10), используя известные результаты о $\sigma(\mu)$ и $\rho(\mu)$. Расчет, проведенный с помощью данных, опубликованных в [7], показал, что при $\Lambda \geq 0,99$ погрешность определения t , α и ε_n по формулам (9), (10), (13) для слоя с оптической толщиной $\tau_0 = 1$ не превышает 3,5% и уменьшается при $\Lambda \rightarrow 1$. Расчет по формулам, приведенным в [3, 5] для такого оптически тонкого слоя при $\Lambda \geq 0,99$, дает погрешность $\sim 50\%$. Численная проверка с использованием формул для определения коэффициентов яркости, полученных в [3], показала, что отличие в значениях параметров Λ и τ , использованных для расчета коэффициентов яркости $\sigma(\mu)$ и $\rho(\mu)$ согласно [3], и в значениях этих параметров, определенных по формулам (10)–(11), не превышает 10% для $\Gamma = 0 \div 0,25$, $\tau_0 = 5 \div 30$, $x_1 = -\frac{2}{3} \div \frac{2}{3}$ (значение x_1 использованное в данной работе, связано с \bar{x}_1 , использованным в [3], соотношением $\bar{x}_1 = \frac{3}{2}x_1$).

Обратим внимание на то, что параметры k_σ и k_p входят в уравнения (7) и (8) в виде коэффициентов при параметре α , значение которого мало. Поэтому можно ожидать, что если коэффициенты k_σ и k_p изменяются не очень сильно при вариации оптических параметров среды и толщины слоя, то их влияние мало и для определения параметров α и t достаточно ограничиться знанием лишь первых моментов коэффициентов яркости σ_1 и ρ_1 . Чтобы определить характер изменения коэффициентов k_σ и k_p , были рассчитаны коэффициенты яркости $\sigma(\mu)$ и $\rho(\mu)$ для слоев оптической толщиной $\tau_0 = 1, 2, 3$ и для бесконечно толстого слоя по таблицам, приведенным в [6, 7]. Полученные результаты показывают, что для среды с индикатрисой рассеяния $x(\mu) = 1$ при $\tau_0 \leq 3$ и бесконечно толстого слоя, когда $x(\mu) = 1 + \frac{3}{2}x_1\mu$ при $x_1 = 0, 2/3$, значения k_σ изменяются в пределах $0,64 - 0,67$, а k_p — в пределах $0,64 - 0,68$. Экспериментальные результаты для нескольких слабопоглощающих объектов таковы: один слой фильтровальной бумаги имеет $k_\sigma = 0,71$, $k_p = 0,68$; четыре слоя — $k_\sigma = 0,71$, $k_p = 0,69$; слой BaSO_4 с $z_0 = 3$ мм имеет $k_p = 0,68$; стекло МС = 14 с $z_0 = 0,5 - 6$ мм имеет $k_\sigma = 0,72$.

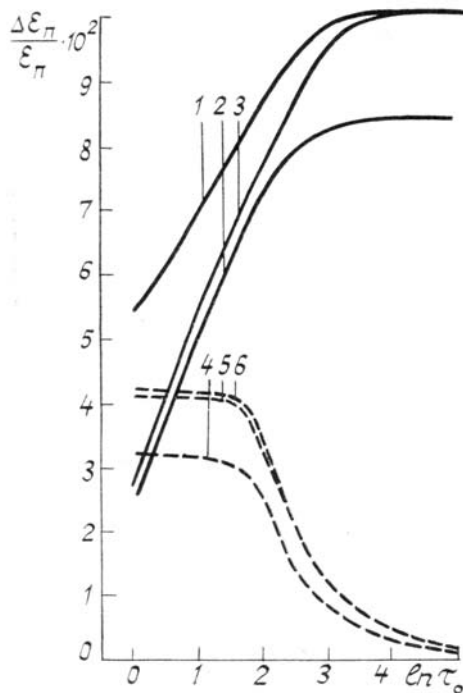


Рис. 1. . Зависимость $\Delta\varepsilon_n/\varepsilon_n$ от τ_0 при $\Delta k_p = 0,2$, $\Delta k_\sigma = 0$ (сплошные линии); $\Delta k_p = 0$, $\Delta k_\sigma = 0,2$ (штриховые) для $x_1 = 0$, $1 - \Lambda = 10^{-4}$ (1, 4); $x_1 = 2/3$, $1 - \Lambda = 10^{-2}$ (2, 5); $x_1 = 2/3$, $1 - \Lambda = 10^{-4}$ (3, 6)

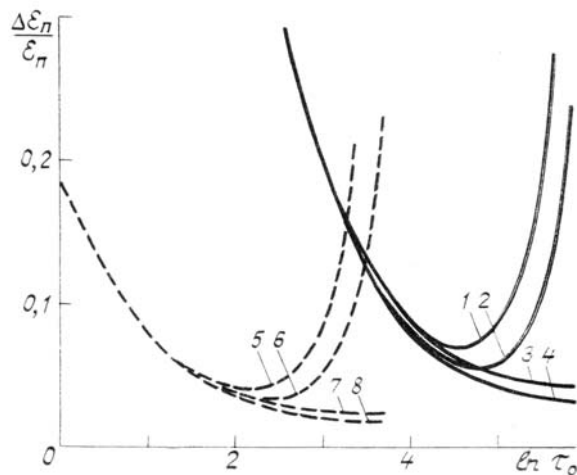


Рис. 2. Зависимость $\Delta\varepsilon_n/\varepsilon_n$ от τ_0 для первого способа определения ε_n при $\Delta k_\sigma = \Delta k_p = 0$: 1 — $\Delta\sigma_1 = 0,001$, $\Delta\rho_1 = 0$, $x_1 = 0$; 2 — $\Delta\sigma_1 = 0,001$, $\Delta\rho_1 = 0$, $x_1 = 2/3$; 3 — $\Delta\sigma_1 = 0$, $\Delta\rho_1 = 0,001$, $x_1 = 0$; 4 — $\Delta\sigma_1 = 0$, $\Delta\rho_1 = 0,001$, $x_1 = 2/3$; 5 — $\Delta\sigma_1 = 0,005$, $\Delta\rho_1 = 0$, $x_1 = 0$; 6 — $\Delta\sigma_1 = 0,005$, $\Delta\rho_1 = 0$, $x_1 = 2/3$; 7 — $\Delta\sigma_1 = 0$, $\Delta\rho_1 = 0,005$, $x_1 = 0$; 8 — $\Delta\sigma_1 = 0$, $\Delta\rho_1 = 0,005$, $x_1 = 2/3$. $1 - \Lambda = 10^{-4}$ — сплошные линии; $1 - \Lambda = 10^{-2}$ — штриховые

Рассмотрим влияние погрешностей Δk_p и Δk_σ задания коэффициентов k_p и k_σ на относительную погрешность $\nabla\varepsilon_n/\varepsilon_n = \frac{1}{\varepsilon_n(k_p, k_\sigma, \tau_0)}[\varepsilon_n(k_p + \Delta k_p, k_\sigma + \Delta k_\sigma, \tau_0) - \varepsilon_n(k_p, k_\sigma, \tau_0)]$. Зависимость погрешности

$\Delta \varepsilon_n / \varepsilon_n$ от τ_0 для индикатрисы вида $x(\mu) = 1 + \frac{2}{3}x_1\mu$ показана на рис. 1. Из рисунка видно, что относительная погрешность определения ε_n , обусловленная неточностью задания k_p , увеличивается с ростом оптической толщины слоя, оставаясь меньше 11% даже для очень малого поглощения, когда $1 - \Lambda = 10^{-4}$. Расчет показывает, что при $\Delta k_p = 0,02$ значение $\Delta \varepsilon_n / \varepsilon_n$ не превышает 1,2%. Погрешность $\Delta \varepsilon_n / \varepsilon_n$, обусловленная неточностью задания k_σ , уменьшается с увеличением τ_0 и не превышает 5%, если $\Delta k_\sigma = 0,2$; если же $\Delta k_\sigma = 0,02$, то $\Delta \varepsilon_n / \varepsilon_n$ не превышает 0,5%. Согласно приведенным выше данным для реальных слабопоглощающих сред k_σ и k_p мало изменяются: $k_\sigma \cong 0,71$, $k_p \cong 0,68$ с погрешностью $\Delta k_\sigma = \Delta k_p \cong 0,01$. Поэтому для них величину ε_n можно определять, измеряя только коэффициенты пропускания σ_1 и отражения ρ_1 .

Проведем анализ влияния погрешностей измерения σ_1 и ρ_1 на точность определения ε_n . Рассчитаем относительную погрешность $\Delta \varepsilon_n / \varepsilon_n = \frac{1}{\varepsilon_n(\sigma_1, \rho_1, k_p, k_\sigma)} [\varepsilon_n(\sigma_1 + \Delta \sigma_1, \rho_1 + \Delta \rho_1, k_p, k_\sigma) - \varepsilon_n(\sigma_1, \rho_1, k_p, k_\sigma)]$ в зависимости от оптической толщины τ_0 при $k_\sigma = 0,71$, $k_p = 0,68$. На рис. 2 приведены результаты расчетов для среды со сферической индикатрисой рассеяния элементарного объема (кривые 1, 3, 5, 7) и вытянутой индикатрисой рассеяния $x = 1 + \mu$ (кривые 2, 4, 6, 8). Зависимости $\Delta \varepsilon_n / \varepsilon_n(\tau_0)$ при $\Delta \rho_1 = 0$ обнаруживают минимум. При увеличении Λ его положение смещается в сторону больших оптических толщин и увеличивается минимальная погрешность. С увеличением вытянутости индикатрисы $x(\mu)$ происходит некоторое смещение минимума в сторону больших τ_0 и снижается значение минимальной возможной погрешности определения ε_n . При $1 - \Lambda = 10^{-4}$ и $x_1 = \frac{2}{3}$ — минимальная погрешность определения ε_n , обусловленная погрешностью измерения $\Delta \sigma_1 = 0,001$, равна $\delta_\sigma \varepsilon_n = 5,6\%$ и достигается при оптической толщине $\tau_0 \cong 120$. Зависимость $\Delta \varepsilon_n / \varepsilon_n(\tau_0)$ при $\Delta \sigma_1 = 0$ носит монотонно убывающий характер и совпадает с $\left. \frac{\Delta \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \right|_{\Delta \rho_1=0}$ при малых оптических толщинах, что подтверждается расчетами ε_n с использованием экспериментальных данных, полученных в [8, 9] для стекла МС-14. Проведенные расчеты показали, что с уменьшением толщины слоя стекла случайные отклонения ε_n от среднего значения увеличиваются. Это объясняется тем, что согласно оценкам, сделанным в работе [9], для стекла МС-14 $1 - \Lambda \cong 2 \cdot 10^{-5}$ и $\varepsilon_n \cong 120 \text{ мм}^{-1}$. Следовательно, слой толщиной $z_0 = 0,3 - 6 \text{ мм}$ попадают в область левой ветви кривой

$$\left. \frac{\Delta \varepsilon_n}{\varepsilon_n}(\tau_0) \right|_{\Delta \rho_1=0}.$$

Рассмотрим еще одну возможность определения ε_n . Она состоит в измерении не только коэффициентов яркости $\sigma(\mu)$ и $\rho(\mu)$ слоев конечной толщины, но и коэффициента яркости бесконечно толстого слоя $\rho_\infty(\mu)$. Действительно, при $t \rightarrow 0$ (как следует из (8))

$$\alpha = \frac{1 - \rho_{1\infty}}{1 + k_p \rho_{1\infty}}, \tag{14}$$

где $\rho_{1\infty} = \int_0^1 \rho_\infty(\mu) d\mu$.

Используя это значение α , определяют сначала t по формуле (10), а затем величину ε_n — по формуле (13).

Рассмотрим погрешность определения ε_n по такой методике. Очевидно, что в этом случае она определяется вкладом погрешностей измерения $\rho_{1\infty}$, σ_1 , ρ_1 . Вклад погрешности, обусловленной неточностью измерения $\rho_{1\infty}$ при $1 - \Lambda = 10^{-4}$ и $x(\mu) = 1$, представлен кривой 1 на рис. 3. Кривые 2 и 3 на этом рисунке показывают вклад ошибок измерения σ_1 и ρ_1 в погрешность определения ε_n .

Проведем сравнение погрешностей определения ε_n в обоих способах. Как видно из рис. 3, погрешности, обусловленные ошибками измерения ρ_1 и $\rho_{1\infty}$, уменьшаются с увеличением толщины слоя, причем для тонких слоев погрешность, вносимая неточностью измерения ρ_1 существенно меньше, чем для первого способа (см. рис. 2). Погрешность, обусловленная ошибкой измерения σ_1 при $\tau_0 \cong 115$, меньше аналогичной погрешности первого способа. При увеличении τ_0 эта погрешность для обоих способов увеличивается и вносит основной вклад в суммарную погрешность определения ε_n . Как показывают расчеты, зависимости составляющих погрешности от поглощения и от вытянутости индикатрисы рассеяния элементарного объема $x(\mu)$ носят такой же характер, как и в первом способе. При уменьшении Λ все составляющие относительной погрешности уменьшаются, а минимум в зависимости

$\frac{\Delta \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \Big|_{\Delta \rho_1 \neq 0}$ от τ_0 смещается в сторону меньших τ_0 , при увеличении вытянутости индикатрисы рассеяния все составляющие относительной погрешности также уменьшаются, а минимум в зависимости $\frac{\Delta \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \Big|_{\Delta \rho_1 = 0}$ от τ_0 смещается в сторону больших τ_0 .

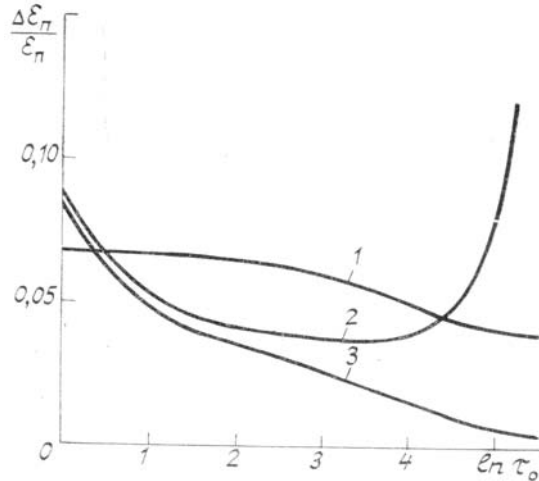


Рис. 3. Зависимость $\Delta \varepsilon_n / \varepsilon_n$ от τ_0 для второго способа определения ε_n при $1 - \Lambda = 10^{-4}$: 1 - $\Delta \sigma_1 = \Delta \rho_1 = 0$, $\Delta \rho_{1\infty} = 0,001$; 2 - $\Delta \rho_1 = \Delta \rho_{100} = 0$, $\Delta \sigma_1 = 0,001$; 3 - $\Delta \sigma_1 = \Delta \rho_{100} = 0$, $\Delta \rho_1 = 0,001$

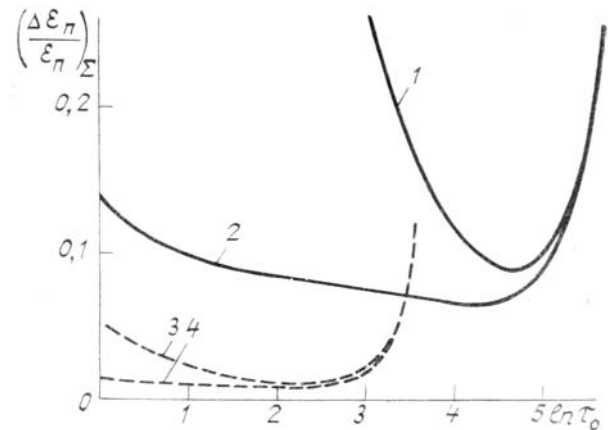


Рис. 4. Зависимость $(\Delta \varepsilon_n / \varepsilon_n)_\Sigma$ от τ_0 для первого и второго способов определения ε_n при $\Delta \rho_1 = \Delta \sigma_1 = \Delta \rho_{1\infty} = 0,001$: 1, 3 - первый способ; 2, 4 - второй способ. $1 - \Lambda = 10^{-4}$ - сплошные линии; $1 - \Lambda = 10^{-2}$ - штриховые

В заключение приведем данные о суммарной относительной погрешности определения показателя поглощения в обоих способах. Для определения суммарной погрешности используем известное правило сложения дисперсий случайных величин. Зависимость суммарной погрешности $\left(\frac{\Delta \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \right)_\Sigma$ от $\ln \tau_0$

для обоих способов при $\Delta \rho_1 = \Delta \sigma_1 = \Delta \rho_{1\infty} = 10^{-3}$ представлена на рис. 4. Из него видно, что минимальные погрешности, достигаемые в первом и втором способах, близки по своим значениям, однако второй способ позволяет определять ε_n с погрешностью, мало отличающейся от минимальной в более широком интервале толщин слоев, чем первый.

1. Розенберг Г. В. // Спектроскопия светорассеивающих сред: Изд-во АН БССР, 1963. С. 5.
2. Розенберг Г. В., Сахновский М. Ю., Гуминецкий С. Г. // Оптика и спектроскопия. Т. 23. Вып. 5. С. 799.
3. Зега Э. П., Бушмакова О. П., Кацев И. Д., Коновалов М. В. // ЖПС. 1979. Т. 30. Вып. 5. С. 900-907.
4. Зега Э. П., Кацев И. Л. // ЖПС. 1980. Т. 33. Вып. 3. С. 550.
5. Зега Э. П., Значенко М. П., Кацев И. Л. // ЖПС. 1980. Т. 33. Вып. 4. С. 735.
6. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972. 384 с.
7. Мороженко О. В., Яновицкий Е. Г. Таблицы для расчета штенсивностей впроминювания атмосфер. Киев: Наук. думка, 1964. 144 с.
8. Войшвилло М. А. // Оптика и спектроскопия. 1971. Т. 31. Вып. 2. С. 275.
9. Войшвилло М. А. // Оптика и спектроскопия. 1971. Т. 31. Вып. 3. С. 458.
10. Розенберг Г. В. // УФН. 1967. Т. 91. Вып. 4. С. 569.

Институт физики АН БССР,
Минск

Поступила в редакцию
28 июля 1989 г.

A. P. Ivanov, V. A. Loiko, V. V. Berdnik. **Determination of the Absorption Coefficient of Layers of a Weakly Absorbing Dispersed Medium with Arbitrary Thickness.**

Formulas are derived for calculating the absorption coefficient of a dispersed medium using measured values of finite-thickness layers reflectivity and transmissivity. Two methods for determining weak absorptions are proposed. For the first method to be realized, it is sufficient to have one sample of finite thickness, for the second one two samples are needed: of finite and infinite thickness. It is shown that the second method permits one to determine the absorption coefficient with an error only slightly differing from the minimum one in a wider range of thicknesses than the first one.