«Оптика атмосферы и океана», **8**, N 10(1995)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК (535.2+535.241):621.373.8

Ю.Н. Исаев

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ ДЛЯ ГРАДИЕНТА ФАЗЫ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ПРИЕМНОЙ АПЕРТУРЫ

В работе приводится аналитический метод восстановления коэффициентов разложения фазы через ее градиент, при этом геометрия приемной апертуры и базис разложения могут быть произвольными.

Для повышения эффективности лазерных систем, работающих в условиях атмосферных искажений, применяются методы адаптивной оптики. Измерения искаженного волнового фронта и последующая его коррекция позволяют существенно уменьшить дрожание, мерцание и размытие оптических пучков и изображений. При описании фазовых искажений световых полей на атмосферных трассах используются их разложения на моды в системе базисных функций, представляющие собой ряды типа Фурье:

$$S_N(x,y) = \sum_{k=1}^{\mathbf{N}} a_k\,\Psi_k(x,y)\,, \tag{1}$$

где функциями разложения являются ортонормированные полиномы, вид которых определяется геометрией приемной апертуры. В частности, для круглой апертуры это будут полиномы Цернике, для квадратной – $e^{i(xn+ym)}$ или полиномы Эрмита–Чебышева.

Вектор коэффициентов $\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k,)^T$ уравнения (1) вычисляется из условия минимума функционала

$$\min \rho(S, S_N) = \sqrt{\int_D (S - S_N)^2\, \mathrm{d}\rho}\;. \tag{2}$$

Здесь D – область, ограниченная приемной апертурой. Минимизация функционала (2) эквивалентна решению матричного уравнения

$$\Phi\mathbf{A} = \mathbf{B}\,, \tag{3}$$

где

$$\mathbf{B} = \{< S, \Psi_1,>, < S, \Psi_2>, \ldots\}^{\mathrm{T}}\,; \tag{4}$$

Ψ_i – базис разложения; $\Phi = \| <\Psi_i, \Psi_j> \|$ – квадратичная матрица; $<f,g> = \int f\,g\,d^2\rho$ – скалярное произведение.

В силу специфики квадратического детектирования в качестве датчика фазового фронта в адаптивных оптических системах фазового сопряжения обычно используются датчики интерференционного и гартмановского типов, которые измеряют наклоны фазового фронта (градиенты) в дискретном множестве точек. Следовательно, нам известен градиент фазы

$$\nabla S(x,y) = \sum_{k=1}^{\mathbf{N}} a_k\,\nabla\,\Psi_k(x,y)\,. \tag{5}$$

В этом случае применяется следующее матричное уравнение [1 – 4]:

$$F\mathbf{A} = \mathbf{C}\,, \tag{6}$$

где $F = \|<\nabla\Psi_i,\nabla\Psi_j>\|$ – квадратичная матрица; $\mathbf{C} = \|<\nabla S,\nabla\Psi_i>\|$ – матрица-строка. Отметим, что матрица F содержит градиенты фазы, измеренные экспериментально, и может быть так, что система окажется плохо обусловленной, т.е. ее определитель близок к нулю. В данной ситуации восстановление коэффициентов разложения фазы становится затруднительным. Автором предлагается аналитический подход для определения коэффициентов разложения фазы при известном ее градиенте.

Прежде всего найдем связь фазы с ее градиентом. Для комплексной функции $f(z) = S(x,y) + i\,V(x,y),\ x,y \in \overline{D}$ справедлива формула Бореля–Помпею [5]

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{t-z} - \frac{1}{\pi}\int\int\frac{\partial f}{\partial z^*}\frac{\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{t-z} = \begin{cases} 0\,,\ z\in D_1, \\ f(z),\ z\in D, \end{cases} \tag{7}$$

где $D_1 = R^2/\overline{D}$, R^2 – двухмерное вещественное евклидово пространство.

Пусть D является областью, ограниченной апертурой, Γ – его границей. Считая, что на границе фаза равна нулю, (7) можно переписать

$$-\frac{1}{\pi}\int\int\frac{\partial f}{\partial z^*}\frac{\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{t-z} = f(z)\,, \tag{8}$$

здесь $\partial/(\partial z^*) = (1/2)\,[\partial/(\partial x)] + i\,[\partial/(\partial y)]$. В силу линейной независимости мнимой и реальной частей (8) можно переписать, оставляя лишь ее действительную часть

$$S(x,y) = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\int\int\frac{\partial f}{\partial z^*}\frac{\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{t-z} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_D\int\frac{(\partial S/\partial\xi)\,(x-\xi) + (\partial S/\partial\eta)\,(x-\eta)}{(x-\xi)^2 + (x-\eta)^2}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = <\nabla S, \frac{1}{z}>, \tag{9}$$

где $1/z$ – фундаментальное решение оператора Коши–Римана. Так как элементы вектора $\mathbf{A}$ определяются как

$$a_k = <\Psi_k, S>, \tag{10}$$

то, подставляя в данное выражение (10) уравнение (9), получим

$$a_k = <\Psi_k, <\nabla S, 1/z>> = <\nabla S, <\Psi_k, 1/z>> = <\nabla S, \mathbf{G}_k>\,, \tag{11}$$

где $\mathbf{G}_k$ – векторные полиномы, определяемые соотношением

$$\mathbf{G}_k = <\Psi_k, 1/z>\,, \tag{12}$$

или в развернутом виде:

$$\mathbf{G}_k = \{G_{kx}, G_{ky}\}\,,$$

$$G_{kx}(x_0, y_0) = \int\limits_D\int\frac{\Psi_k(x,y)\,(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \tag{13}$$

$$G_{ky}(x_0, y_0) = \int\limits_D\int\frac{\Psi_k(x,y)\,(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{14}$$

Отметим, что полученные полиномы обладают свойством ортогональности $<\mathbf{G}_n,\mathbf{G}_m> = \delta_{nm}$, что существенно упрощает задачу определения коэффициентов разложения фазы.

Следовательно, для того чтобы определить коэффициенты разложения фазы (1) в базисе Ψ_k через ее градиент, необходимо градиент фазы ∇S разложить в ряд по векторным полиномам $\mathbf{G}_k$, которые образуются в результате свертки базисных функций с фундаментальным решением Коши–Римана, при этом область интегрирования свертки должна определяться геометрией апертуры.

Для круглой апертуры в случае, когда фаза разлагается по полиномам Цернике, векторные полиномы $\mathbf{G}_k$, полученные в декартовой системе координат, приводятся в [6,7]. Те же векторные полиномы в полярной системе координат для частного случая получены в [8] решением краевой задачи для круглой апертуры.

Таким образом, в данной статье предлагается аналитический метод определения коэффициентов разложения фазы через ее градиенты при произвольном базисе разложения и произвольной геометрии апертуры.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Проект 94-02-04995-а.

1. Безуглов Д.А., Мищенко Е.Н., Серпенинов О.В. // Оптика атмосферы. 1991. Т. 4. N 2. С. 161.
2. Безуглов Д.А. // Оптика атмосферы. 1991. Т. 4. N 12. С. 1303.
3. Edward P. Wallner // JOSA. V. 73. N 12. P. 1771–1776.
4. Peterson D.P., Cho K.H. // JOSA. 1986. V. 3. N 6. P. 818–825.
5. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984. 320 с.
6. Аксенов В.П., Исаев Ю.Н. //Оптика атмосферы. 1991. Т. 4. N 12. С. 1321–1325.
7. Исаев Ю.Н. Разработка методов и численно-аналитическое моделирование восстановления параметров лазерных пучков: Дис. ... канд. ф.-м. наук. Томск: ИОА, 1995. 135 с.
8. Gavrielides // Optics Letters. 1982. V. 7. N 11. P. 526–528.

Институт оптики атмосферы СО РАН,
г. Томск

Поступила в редакцию
15 июня 1995 г.

Yu. N. Isaev. **Analytical Method of Determination of Vector Orthogonal Polynomials for the Phase Gradient under Arbitrary Geometry of Receiving Aperture.**

The analytical method to retrieve the coefficients of the phase expansion from its gradients is described. In this case the geometry of receiving aperture and basis of the expansion can be arbitrary.