

ВАРИАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ АЭРОЗОЛЕЙ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В АТМОСФЕРЕ

На произвольном интервале времени задача переноса аэрозолей заменяется некоторой задачей оптимального управления. Функционал стоимости выбирается как отклонение исходного решения от решения некоторой задачи с известной диффузией. Рассматривается метеорологическая модель, основанная на концепции искусственной сжимаемости. Результаты модельных численных экспериментов находятся в качественном согласии с имеющимися данными наблюдений и теорией.

1. Введение

Перенос аэрозолей в атмосфере традиционно описывается уравнением конвекции-диффузии. При моделировании процессов переноса в условиях доминирования конвекции возникает проблема построения численных схем для подавления вычислительных колебаний вблизи фронта распространяющейся волны аэрозолей.

Здесь мы рассматриваем подход, который позволяет одновременно подавлять «немонотонности» и ассимилировать в тех же самых рамках дополнительную информацию (если она имеется) о решении уравнений переноса. В настоящей работе, однако, мы рассматриваем только вариационную задачу монотонизации.

Идея применения сопряженных уравнений к метеорологическим задачам была впервые выдвинута Марчуком [1]. В контексте вариационной ассимиляции данных сопряженные уравнения могут использоваться для вычисления градиента функционала стоимости по отношению к исходным данным модели. Этот градиент затем используется для выполнения «шага спуска» в пространстве начальных данных, и процесс итерируется до тех пор, пока не будет получена некоторая удовлетворительная аппроксимация начальных данных, минимизирующая функционал стоимости. Это использование сопряженных уравнений было предложено Пененко [2]. С тех пор многие авторы используют этот подход в контексте ассимиляции данных (см., например, [3]).

Знание пространственного и временного распределения метеорологических переменных является существенным в задачах переноса и трансформации аэрозолей. Трудно определить большие вариации этих полей в сложной области только с помощью измерений. Метеорологические модели стали важными инструментами для получения такой недостающей информации [4].

В большинстве современных негидростатических моделей используется так называемая «негибкая» ап-

проксимация, где звуковые волны фильтруются с помощью модификации уравнения неразрывности. В результате давление нельзя больше определить явным образом. Оно находится с помощью некоторого сложного дифференциального уравнения. Необходимо решить это уравнение на каждом временном шаге, чтобы модифицировать поле давления. Поэтому работать с негибкой системой численно гораздо труднее, чем с системой уравнений, которая получается в гидростатическом случае [9]. За последние годы развитие вычислительных методов позволило разработать негидростатические модели, где звуковые волны не фильтруются [10–12].

Численная модель, способная детально описывать атмосферные процессы, должна не только точно решать соответствующие математические уравнения, но и содержать реалистическое представление земной поверхности. Наиболее широко используются в этой связи координатные системы, «следящие за поверхностью». После соответствующей замены переменных расчетная область становится простой и может быть легко дискретизирована. Однако преобразованные уравнения становятся более сложными. Вообще говоря, преобразующие функции должны быть достаточно гладкими, т.е. в расчетах необходимо ограничиваться только гладкой идеализацией реальной поверхности [9].

Для получения гидродинамических полей, на фоне которых распространяются аэрозоли, в статье рассматривается трехмерная метеорологическая модель, основанная на методе искусственной сжимаемости (ранние версии приведены в [6,7]). Метод искусственной сжимаемости, предложенный Яненко [13] и Чориным [14], был успешно применен к различным задачам динамики жидкости. С помощью этого метода в негидростатической модели можно существенно упростить решение уравнения для давления в сложной области. Конечно-разностный и конечно-элементный варианты модели применяются для поверхности с малыми и большими пространственными градиентами соответственно.

2. Перенос и диффузия аэрозолей

Уравнение конвекции-диффузии для переноса субстанции в атмосфере имеет следующий вид [4]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla (\mathbf{D} \nabla c - \mathbf{v}c) - \lambda c + q. \quad (1)$$

Здесь $c(\mathbf{x}, t)$ – концентрация субстанции; $D(\mathbf{x}, t)$ – тензор дисперсии; $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ – скорость ветра; $\lambda(\mathbf{x}, t)$ описывает химические реакции; $q(\mathbf{x}, t)$ – член источника или стока, $\mathbf{x} \in R^d$, $d = 1, 2, 3$.

Предположим, что в пространстве задача (1) имеет вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = H(\varphi), \quad (2)$$

где H – некоторый регулярный оператор в пространстве. Например, можно использовать центральные разности для получения высокой пространственной аппроксимации. Если конвекция доминирует над диффузией, то центральные разности приводят к появлению больших вычислительных колебаний численного решения.

Пусть имеем некоторую дополнительную информацию о поведении физического решения в виде «наблюдений» $\hat{\varphi}(t_i)$ и $\hat{\varphi}(t_1), \dots, \hat{\varphi}(t_n)$ находятся при временах $t_1 < \dots < t_n$. Ищем решение $\varphi(t)$, минимизирующее функционал

$$\begin{aligned} J[\varphi(t)] = & \sum_{i=1}^n [\varphi(t_i) - \hat{\varphi}(t_i), \varphi(t_i) - \hat{\varphi}(t_i)] + \\ & + \sum_{i=1}^n [\nabla(\varphi(t_i) - \hat{\varphi}(t_i)), \nabla(\varphi(t_i) - \hat{\varphi}(t_i))], \end{aligned}$$

где $[\cdot]$ – скалярное произведение.

Далее рассмотрим линеаризованное уравнение для возмущений

$$\frac{d}{dt} \delta\varphi = A(t) \delta\varphi \quad (3)$$

с начальным условием $\delta\varphi(t_1)$ и сопряженное уравнение

$$\frac{d}{dt} \delta^*\varphi = A^*(t) \delta^*\varphi. \quad (4)$$

Здесь $A^*(t)$ – сопряженный оператор к $A(t)$.

Один цикл для получения градиента функционала по отношению к начальному полю содержит: 1) один расчет прямой модели, 2) один расчет сопряженной модели в обратном направлении для определения градиента.

Получив градиент, можно использовать некий алгоритм спуска для нахождения коррекции к начальным условиям. В качестве «наблюдений» мы

используем аппроксимации, полученные из следующего ряда:

$$c = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k / (\text{Re})^k, \quad (5)$$

где Re – число Рейнольдса нашей задачи. Этот ряд приводит к последовательности гиперболических уравнений, которые можно решить, например, методом характеристик.

Идея использования этого ряда в некоторой задаче оптимального управления была предложена в работе [5], хотя в реальных расчетах в качестве ограничения использовался некий вариант «подгонки фронта». В нашей работе мы обобщаем этот метод для разработки единого подхода, который годится для конечно-разностных, конечно-элементных или спектральных аппроксимаций.

В качестве примера приведем результаты расчета переноса пассивной примеси над горным гребнем. Формы и размер гребня, а также триангуляция расчетной области показаны на рис. 1.

Область имеет общую высоту 500 м, горизонтальный размер 10 км, высота холма 300 м. Сетка состоит из 296 треугольных элементов с горизонтальным размером ячейки сетки 500 м и вертикальным размером 50 м.

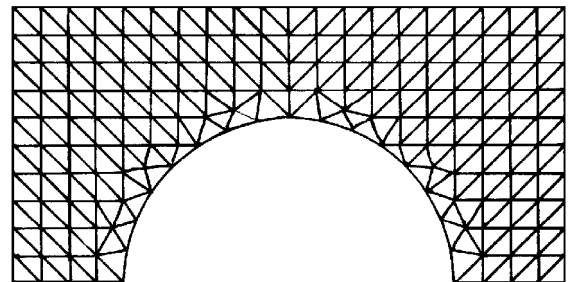


Рис. 1. Триангуляция области

На рис. 2 показано поле концентрации примеси для горизонтальной скорости 10 м/с и вертикальной скорости 3 м/с. Горизонтальный коэффициент диффузии равен $100 \text{ м}^2/\text{с}$, вертикальный коэффициент диффузии $10 \text{ м}^2/\text{с}$. Источник загрязнения с нормализованной интенсивностью 1 расположен на левой границе на высоте 100 м.

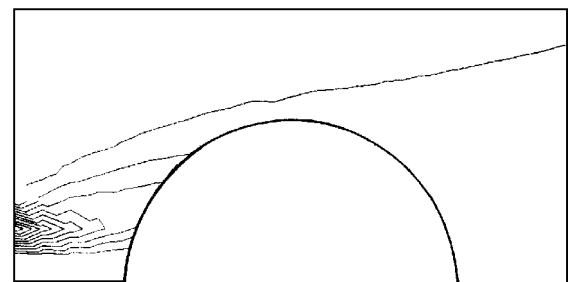


Рис. 2. Поле концентрации примеси

3. Метеорологическая модель

Основные уравнения движения, тепла, влаги и неразрывности, которые мы приведем здесь в трехмерной постановке, следующие:

$$\frac{dU}{dt} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z} = f_1 (V - V_g) - f_2 W + R_u,$$

$$\frac{dV}{dt} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = -f_1 (U - U_g) + R_v,$$

$$\frac{dW}{dt} + \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{gP}{C_s} = f_2 U + g \frac{\bar{\rho} \theta'}{\bar{\theta}} + R_w,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = R_\theta, \quad \frac{ds}{dt} = R_s,$$

$$\frac{1}{C_s} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{\rho} \theta'}{\bar{\theta}} \right).$$

Здесь $U = \bar{\rho}u$, $V = \bar{\rho}v$, $W = \bar{\rho}w$, $P = p'$, где p' , θ' – отклонения от основного состояния давления \bar{p} и потенциальной температуры $\bar{\theta}$; s – удельная влажность; C_s – скорость звуковой волны; u_g , v_g – компоненты геострофического ветра, представляющие синоптическую часть давления; f_1, f_2 – параметры Кориолиса; g – гравитационная постоянная.

Для произвольной функции φ

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial u\varphi}{\partial x} + \frac{\partial v\varphi}{\partial y} + \frac{\partial w\varphi}{\partial z}.$$

Члены R_u , R_v , R_w , R_θ , R_s описывают процессы подсеточного масштаба. Для параметризации турбулентности используем простую схему, основанную на вычислении пути смещения Блакадара [8]. Оцениваются обычные логарифмические профили ветра между поверхностью и первым слоем в атмосфере. Для длины шероховатости берем 0,1 м.

Для верхней границы полагаем условие

$$w = 0, \quad u = u_g, \quad v = v_g, \quad \theta = \theta_i,$$

где θ_i – постоянное значение, задаваемое основным состоянием.

Для нижней границы полагаем

$$w = 0, \quad \theta = \theta_s(x, y)$$

– то же значение, что и основное состояние на том же уровне. Турбулентные потоки через поверхностный слой определяются из теории подобия Монина–Обухова [8].

Для боковых границ в настоящем исследовании используются условия равенства нулю нормальных производных для всех рассчитываемых полей.

Как конечно-разностный, так и конечно-элементный варианты модели существенно используют метод искусственной сжимаемости для уравне-

ний типа Навье–Стокса [13–14]. Конечно-разностный вариант расчета описан в [6]. Для конечно-элементного случая пространственная дискретизация исходных уравнений основывается на методе взвешенных невязок. Зависимые переменные представляются в виде

$$P = \sum_{i=1}^m \beta_i(\bar{\mathbf{x}}) P_i(t),$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i(\bar{\mathbf{x}}) \varphi_i(t),$$

где φ может быть U , V , W , θ , s . При этом в дискретной области m узлов отводится для P и n узлов – для остальных переменных. Аппроксимирующие функции $\alpha_i(\bar{\mathbf{x}})$ являются кусочно-непрерывными билинейными полиномами (для рассматриваемого здесь двумерного варианта модели), функции $\beta_i(\bar{\mathbf{x}})$ для P являются кусочно-постоянными.

Рассматривается сетка Аракавы, где P определяется в центре каждого элемента. После подстановки в исходные уравнения, умножения каждого уравнения на соответствующую весовую функцию (β_i для уравнения неразрывности и α_i для всех других уравнений) и интегрирования по частям получаем нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. При этом диффузионные члены реализуются 2×2 квадратурными формулами Гаусса, все остальные интегралы представляются одноточечными формулами.

Дискретизация по времени проводится стандартным способом на этапы переноса и адаптации [6]. На первом этапе применяются схемы типа Кранка–Николсон. На этапе адаптации реализация уравнения для давления проводится прямым методом в сочетании с временными итерациями [6].

Приведем результаты конечно-разностного эксперимента для метеорологического потока над изолированным холмом. Холм высотой 500 м расположен в центре области 10×10 км. Вершина области 5 км. Геострофический поток распространяется с запада на восток со скоростью 5 м/с. В качестве основного состояния принимается стандартная атмосферная стратификация с градиентом 3,5 К/км. Выше 1500 м расположен абсорбирующий слой. Расчетная сетка состоит из $31 \times 31 \times 16$ точек с горизонтальным размером сетки 333 м и переменным вертикальным размером.

Рис. 3 и 4 показывают горизонтальные сечения потенциальной температуры на уровнях 20 и 400 м соответственно. На нижних уровнях поток стремится повернуться налево, в то время как на верхних уровнях течение почти симметрично. Результаты модельных численных экспериментов находятся в качественном согласии с имеющимися данными наблюдений и теорией [15].

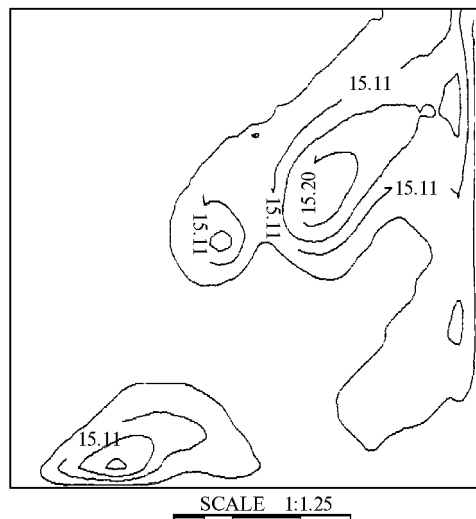


Рис. 3. Потенциальная температура на уровне 20 м

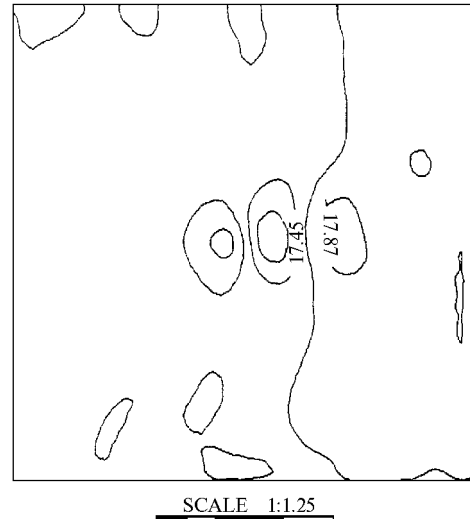


Рис. 4. Потенциальная температура на уровне 400 м

1. Марчук Г.И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Л.: Гидрометеиздат, 1974. 303 с.
2. Пененко В.В. // Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука, 1975. С. 61–76.
3. Le Dimet F.X., Talagrand O. // Tellus. 1986. V. 38A. N 2. P. 97–110.
4. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 319 с.
5. Bensabat J., Zeitoun D.G. // Int. J. Numer. Methods in Fluids. 1990. V. 10. P. 623–636.
6. Юдин М.С. // Методы математического моделирования в задачах охраны природной среды и экологии. Новосибирск: ВЦ СО АН, 1991. С. 130–132.
7. Yudin M.S. // Bull. Nov. Comp. Center, Num. Model. in Atmosph. 1995. V. 2. P. 101–107.
8. Пененко В.В., Алоян А.Е. Модели и методы для задач охраны окружающей среды. Новосибирск: Наука, 1985. 256 с.
9. Clark T. // J. Comp. Phys. 1977. V. 24. P. 186–215.
10. Tapp M., White P. // Quart. J. Roy. Met. Soc. 1976. V. 102. N. 432. P. 277–296.
11. Klemp J., Wilhelmson R. // J. Atmos. Sci. 1978. V. 35. N. 6. P. 1070–1096.
12. Ikawa M. // J. Meteor. Soc. Japan. 1988. V. 66. N. 10. P. 753–776.
13. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 120 С.
14. Chorin A. // J. Comp. Phys. 1967. V. 2. P. 12–26.
15. Clark T., Gall R. // Mon. Wea. Rev. 1982. V. 110. N. 7. P. 766–791.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск, Россия
Боннский университет, Бонн, Германия

Поступила в редакцию
4 февраля 1998 г.

M.S. Yudin, K. Widerotter. Variational Algorithms for the Simulation of Aerosols and Hydrodynamic Fields in the Atmosphere.

For any time interval, the problem of aerosol transport is replaced by an optimal control problem. The cost function is chosen so as to force the solution of a convection-diffusion equation to the solution of a hyperbolic problem. A meteorological model based on the artificial compressibility approach is considered. The results of numerical experiments are in qualitative agreement with available observational data and theory.