«Оптика атмосферы и океана», **10**, N 10 (1997)

УДК 537.87;621.371

А.П. Шелехов

О РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПРИ ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДОВ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧАХ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДОПЛЕРОВСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Исследуются два подхода к статистическому анализу измерений частоты негауссовского сигнала доплеровского лидара при применении методов возмущений. В первом подходе используется метод возмущений, предложенный для анализа гауссовского случайного сигнала. Второй подход основан на перенормировке параметров среднего спектра. При использовании первого подхода возникают трудности, связанные с неравномерностью аппроксимации и физической интерпретацией полученных результатов. Показано, что в результате перенормировки параметров среднего спектра получается ряд теорий возмущений для оценки доплеровской частоты, который удовлетворяет требованию равномерности аппроксимации и позволяет интерпретировать полученные результаты.

1. Введение

Известно, что использование метода возмущений без удовлетворения требования равномерной аппроксимации приводит к значительным трудностям. В теории колебаний, гидродинамики, теории генерации лазера и других областях физики [1, 2] наличие вековых членов в разложении существенным образом усложняет физическую интерпретацию явлений, которые наблюдаются в эксперименте. Причиной неравномерной аппроксимации и сложностей при физической интерпретации полученных результатов, которые можно преодолеть методом перенормировки, являются нелинейные свойства колебаний, генерации и т.д.

В настоящей статье рассматриваются методические вопросы использования методов возмущений при статистическом анализе измерений частоты сигнала доплеровского лидара. Исследуются два подхода к статистическому анализу измерений частоты негауссовского сигнала доплеровского лидара при применении методов возмущений. В первом подходе используется теория возмущений, предложенная в [6, 7] для анализа гауссовского случайного сигнала. Второй подход основан на перенормировке параметров среднего спектра. Особенностью рассматриваемой задачи является то, что сигнал доплеровского лидара представляет собой негауссовский случайный процесс и только при выполнении условий центральной предельной теоремы статистические свойства становятся гауссовскими [3–5]. Показано, что причиной неравномерности аппроксимации и сложностей при физической интерпретации полученных результатов, которые можно преодолеть методом перенормировки, являются негауссовские свойства сигнала доплеровского лидара.

2. Применение методов возмущений при статистическом анализе доплеровских измерений

Оценка доплеровской частоты для метода спектральной функции [4] имеет вид

$$\hat{\Omega}_d = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{m=-(N_s-1)}^{N_s-1} \omega_m \,\hat{\mathbf{S}}\,(\omega_m)/\,\hat{\mathbf{S}}_0\,, \tag{1}$$

где $\hat{\mathbf{S}}(\omega_m) = \dfrac{1}{MN_s\Delta t} \displaystyle\sum_{i=1}^{M} \left| \sum_{n=0}^{N_s-1} j(t_i + n\Delta t)\, \exp\,(-i\, \omega_m\, n\Delta t) \right|^2$ – оценка спектра;

$$\omega_m = \frac{2\pi m}{N_s\,\Delta t} = \frac{2\pi m}{T_s},\ m = 0, \pm 1, ..., \pm(N_s - 1)\ ;\ \hat{\mathbf{S}}_0 = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{m=-(N_s-1)}^{N_s-1} \hat{\mathbf{S}}(\omega_m);$$

M – число реализаций длиной T_s; Δt – интервал дискретности; $N_s = T_s/\Delta t$, $j(t)$ – сигнал доплеровского лидара. В настоящей работе предполагается, что для сигнала доплеровского лидара справедливо приближение однократного рассеяния оптического излучения на атмосферных частицах, движущихся в турбулентном потоке [3, 4]. Относительно Среды также предполагается, что частицы распределены в рассеивающем объеме равномерно и независимо друг от друга, число частиц подчиняется закону Пуассона, а скорость движения турбулентного потока атмосферы распределена по гауссовскому закону. Флуктуации шума сигнала являются гауссовским белым шумом.

При исследовании равномерной аппроксимации рассмотрены случай гауссовской статистики и два случая, которые соответствуют негауссовской статистике сигнала доплеровского лидара. Гауссовская статистика сигнала доплеровского лидара наблюдается при выполнении следующего условия: $d = \infty$ (где $2d$ – характерные размеры рассеивающего объема), которое означает, что влиянием корреляции флуктуаций локальной доплеровской частоты полностью пренебрегается.

Первый случай, который соответствует негауссовской статистике, относится к случаю сильной корреляции флуктуаций локальной доплеровской частоты $d \to 0$. Второй случай, который соответствует негауссовской статистике, – это случай слабой корреляции флуктуаций локальной доплеровской частоты $d \to \infty$. В данном случае влияние корреляционных свойств флуктуаций локальной доплеровской частоты учитывается как возмущающая малая добавка [4, 5]. Таким образом, для первого и второго случаев характерно, что негауссовские свойства сигнала доплеровского лидара проявляются соответственно в максимальной и минимальной форме.

2.1. Анализ гауссовского случайного сигнала методами возмущений

Несмотря на различие в поведении флуктуаций сигнала, случай гауссовской статистики ($d = \infty$) и случай слабой корреляции ($d \to \infty$) имеют общие закономерности. Поэтому рассмотрим отдельно подход к статистическому анализу доплеровских измерений гауссовского случайного сигнала для метода спектральной функции. Подход к статистическому анализу доплеровских измерений гауссовского случайного сигнала предложен в [6, 7] для метода автокорреляционной функции и метода максимального правдоподобия. В данном статистическом анализе последовательно используются два предположения. Сначала предполагается, что в качестве нулевого порядка теории возмущений можно выбрать средние характеристики сигнала доплеровского лидара, например автокорреляционную функцию. Далее, после записи ряда теории возмущений, используется предположение о гауссовских свойствах сигнала. Поэтому представим оценку спектра в виде среднего спектра и возмущающей малой добавки

$$\hat{\mathbf{S}}\,(\omega_m) = \mathbf{s}(\omega_m) + \Delta\mathbf{s}(\omega_m) + \dots\,,\quad \hat{\mathbf{S}}_0 = \mathbf{s}_0 + \Delta\mathbf{s}_0 + \dots\,, \tag{2}$$

где $\mathbf{s}(\omega_m)$ – средний спектр; $\mathbf{s}_0 = \frac{2p}{T_s} \sum_{m=-(N_s-1)}^{N_s-1} \mathbf{s}(\omega_m)$; $\Delta\mathbf{s}(\omega_m)$ и $\Delta\mathbf{s}_0$ – члены первого порядка малости теории возмущений. Из формул (1) и (2) следует, что в первом порядке теории возмущений оценка доплеровской частоты примет следующий вид:

$$\hat{\Omega}_d = \omega_d - \frac{2\pi}{T_s} \sum_{m=-(N_s-1)}^{N_s-1} (\omega_m - \omega_d)\,\Delta\mathbf{s}(\omega_m)/\mathbf{s}_0\,, \tag{3}$$

где ω_d – средняя доплеровская частота.

Далее, следуя работам [6, 7], будем считать, что величина $\Delta\mathbf{s}(\omega_m)$, которая входит в выражение (3), определяется гауссовскими свойствами сигнала доплеровского лидара. В случае гауссовской статистики выражение для ошибки измерений средней доплеровской частоты $\mathrm{var}\,\hat{\Omega}_d = \langle(\hat{\Omega}_d - \omega_d)^2\rangle$, вычисленной на основе формулы (3) при выполнении условия $d = \infty$ как результат усреднения по случайному положению и числу частиц в рассеивающем объеме, по флуктуациям скорости движения турбулентного потока атмосферы, а также по флуктуациям шума, примет вид

$$\mathrm{var}\,\hat{\Omega}_d = \frac{\sqrt{\pi}}{2MT_s}\sqrt{<\Delta\omega'^{\,2}_{d,g}>} + \frac{2}{M\,S/N} + <\Delta\omega'^{\,2}_{d,g}> + \frac{\pi^2}{3MT_s^2\,S^2/N^2}\,, \tag{4}$$

где $<\Delta\omega'^{\,2}_{d,g}>$ – средняя полуширина спектра $\mathbf{s}(\omega_m)$; S/N – отношение сигнал-шум. Формула (4) имеет простую физическую интерпретацию. Из данной формулы видно, что первых два слагаемых являются функцией средней полуширины спектра $\mathbf{s}(\omega_m)$. Следовательно, они характеризуют величину ошибки измерений средней доплеровской частоты, которая возникает в результате уширения спектра. Последнее слагаемое отлично от нуля при $<\Delta\omega'^{\,2}_{d,g}> = 0$, поэтому оно является мерой статистической неопределенности измерений частоты гармонического колебания на фоне шума. Таким образом, для гауссовского случайного сигнала ошибка измерений средней доплеровской частоты определяется двумя факторами: уширением спектра и мерой статистической неопределенности измерений гармонического колебания на фоне шума. Отметим, что выражение (4) совпадает с аналогичной формулой для метода автокорреляционной функции, полученной в [6, 7]. Данное совпадение является следствием того, что методы автокорреляционной и спектральной функций по своей сути относятся к неоптимальному приему и поэтому должны иметь одинаковую точность.

2.2. Статистический анализ доплеровских измерений негауссовского сигнала при использовании метода возмущений [6, 7]

Рассмотрим первый подход к статистическому анализу измерений частоты негауссовского сигнала доплеровского лидара при применении методов возмущений. Данный подход основан на использовании метода возмущений, приведенного в работах [6, 7].

Будем считать, что разложение (2), а также ряд теории возмущений для оценки доплеровской частоты (3) справедливы для негауссовских случайных сигналов. Однако в отличие от вывода формулы (4) предположим, что величина $\Delta\mathbf{s}(\omega_m)$, которая входит в выражение (3), определяется негауссовскими свойствами сигнала доплеровского лидара. Величина ошибки измерений средней доплеровской частоты $\mathrm{var}\,\hat{\Omega}_d = <(\hat{\Omega}_d - \omega_d)^2>$, вычисленная на основе формулы (3), примет вид

$$\mathrm{var}\,\hat{\Omega}_d =$$

$$= \sigma^2_{\omega_d}\int |p(\mathbf{r}_m)|^2\,|p(\mathbf{r}_n)|^2\,R_{\omega_d}(\mathbf{r}_m,\mathbf{r}_n)d\mathbf{r}_m\,d\mathbf{r}_n + \frac{\sqrt{\pi}}{2MT_s}\sigma_{\omega d}\int |p(\mathbf{r}_m)|^2\,|p(\mathbf{r}_n)|^2\,\frac{1+R_{\omega_d}(\mathbf{r}_m,\mathbf{r}_n)}{\sqrt{1-R_{\omega_d}(\mathbf{r}_m,\mathbf{r}_n)}}\,d\mathbf{r}_m\,d\mathbf{r}_n +$$

$$+ \frac{2}{MS/N}\sigma^2_{\omega_d} + \frac{\pi^2}{3MT_s^2\,S^2/N^2}\,, \tag{5}$$

где $\sigma^2_{\omega_d}R_{\omega_d}(\mathbf{r}_m,\mathbf{r}_n) = <\omega'_d(\mathbf{r}_m)\,\omega'_d(\mathbf{r}_n)>$; $\sigma^2_{\omega_d}$ – дисперсия; $R_{\omega_d}(\mathbf{r}_m,\mathbf{r}_n)$ – нормированная корреляционная функция; $\omega'_d(\mathbf{r}_m)$ – флуктуации локальной доплеровской частоты; $p(\mathbf{r}_m)$ – пересечение диаграмм направленности [4, 5].

Проведем анализ формулы (5) для случая гауссовской статистики и для двух случаев, которые соответствуют негауссовской статистике сигнала доплеровского лидара. В случае гауссовской статистики сигнала доплеровского лидара ($d = \infty$) вкладом корреляционных свойств флуктуаций локальной доплеровской частоты полностью пренебрегаем, т.е. $R_{\omega_d}(\mathbf{r}_m,\mathbf{r}_n) = 0$. При этом выражение для ошибки измерений (5) совпадает с формулой (4), если учесть тот факт, что $<\Delta\omega'^{\,2}_{d,g}> = \sigma^2_{\omega_d}$. Данное совпадение является естественным, т.к. изначально разложение (2), а также ряд теории возмущений (3) являются основными предположениями при статистическом анализе доплеровских измерений гауссовского случайного сигнала, а асимптотика $d = \infty$ формулы (5) соответствует случаю гауссовской статистики.

Если для гауссовской статистики поведение уравнения (5) согласуется с формулой (4) и, следовательно, с результатами [6, 7], то анализ данного уравнения для двух случаев, которые соответствуют негауссовскому сигналу доплеровского лидара, приводит к противоречивым результатам. Для сильной корреляции, т.е. в первом случае, выражение $1 - R_{\omega_d}(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n) \to 0$ и соответствующая подынтегральная функция в формуле (5) неограниченно возрастает так, что величина $\mathrm{var}\,\hat{\Omega}_d \to \infty$ при $d \to 0$.

С физической точки зрения неограниченное поведение ошибки измерений при $d \to 0$ является противоречивым результатом. Действительно, с одной стороны, $\mathrm{var}\,\hat{\Omega}_d \to \infty$ означает, что среднюю доплеровскую частоту невозможно измерять при сильной корреляции. С другой стороны, при $d \to 0$ измеряется частота случайного гармонического колебания на фоне шума. Следовательно, неопределенность измерений средней доплеровской частоты, связанная с уширением спектра, исчезает. Поэтому величина ошибки измерений средней доплеровской частоты должна определяться конечной величиной, которая связана с флуктуациями частоты гармонического колебания и мерой статистической неопределенности измерений средней частоты гармонического колебания на фоне шума.

Таким образом, поведение ошибки измерений при $d \to 0$ аналогично поведению решения, например, в теории колебаний [1, 2] до применения методов перенормировки. Ошибка измерений средней доплеровской частоты и энергия колебаний неограниченно возрастают, что противоречит физическому смыслу. Случай $d \to 0$ характеризуется тем, что негауссовские свойства сигнала доплеровского лидара проявляются в максимальной форме. Поэтому можно прийти к выводу, что причиной неравномерности аппроксимации и сложностей при физической интерпретации полученных результатов являются негауссовские свойства сигнала доплеровского лидара.

Сложный для физической интерпретации результат получается также при слабой корреляции ($d \to \infty$). В данном случае выражение для ошибки измерений средней доплеровской частоты примет следующий вид:

$$\mathrm{var}\,\hat{\Omega}_d = \sigma^2_{\omega_d} \int |p(\mathbf{r}_m)|^2 \, |p(\mathbf{r}_n)|^2 \; R_{\omega_d}(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n) d\mathbf{r}_m \, d\mathbf{r}_n +$$

$$+ \frac{\sqrt{\pi}}{2MT_s} \sigma_{\omega_d} \int |p(\mathbf{r}_m)|^2 \, |p(\mathbf{r}_n)|^2 \left(1 + \frac{3}{2} R_{\omega_d}(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n)\right) d\mathbf{r}_m \, d\mathbf{r}_n + \frac{2}{MS/N} \sigma^2_{\omega_d} + \frac{\pi^2}{3MT_s^2 S^2/N^2} . \qquad (6)$$

Для слабой корреляции в поведении ошибки измерений средней доплеровской частоты должны наблюдаться общие закономерности с поведением той же величины, но для гауссовской статистики. Поэтому следует ожидать, что второй и третий члены правой части формулы (6) должны иметь вид, подобный выражению (4). Однако величина $\mathrm{var}\,\hat{\Omega}_d$ не может быть представлена как функция средней полуширины спектра, т.е.

$$\mathrm{var}\,\hat{\Omega}_d \neq \sigma^2_{\omega_d} \int |p(\mathbf{r}_m)|^2 \, |p(\mathbf{r}_n)|^2 R_{\omega_d}(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n) d\mathbf{r}_m \, d\mathbf{r}_n + \frac{\sqrt{\pi}}{2MT_s} \sqrt{<\Delta\omega'^2_{d,g}>} + \frac{2}{MS/N} <\Delta\omega'^2_{d,g}> + \frac{\pi^2}{3MT_s^2 S^2/N^2} , \qquad (7)$$

и следовательно, иметь вид, подобный выражению (4). Поэтому, с нашей точки зрения, дать простую физическую интерпретацию выражения (6) в случае слабой корреляции сложно.

Таким образом, применение методов возмущений [6, 7] приводит к трудностям при статистическом анализе измерений доплеровской частоты негауссовского сигнала. Это – неравномерность аппроксимации и сложности при физической интерпретации полученных результатов при слабой и сильной корреляции.

Формула (5) совпадает с аналогичным выражением в [8, 9] при $S/N \to \infty$ и $p(\mathbf{r}_m) = p(z_m)$, где z_m – проекция вектора $\mathbf{r}_m$ на направление измерений. Совпадение результатов говорит о том, что подход к статистическому анализу доплеровских измерений, предложенный в работах [8, 9], приводит к тем же самым трудностям: к неравномерной аппроксимации и к сложностям при физической интерпретации. Следует отметить, что в настоящей работе, в отличие от [8, 9], не делалось предположения $\Delta\mathbf{s}_0 = 0$. Поэтому вывод формулы (5) с методической точки зрения является более корректным и в большей степени соответствует основным предположениям [6, 7].

2.3. *Статистический анализ доплеровских измерений негауссовского сигнала при использовании метода возмущений, основанного на перенормировке параметров среднего спектра*

Второй подход применения метода возмущений позволяет преодолеть перечисленные выше трудности, связанные с расходимостью рядов теории возмущений и со сложностями при физической интерпретации полученных результатов. Данный подход основан на перенормировке параметров среднего спектра. Известно [1, 2], что в теории нелинейных колебаний, например, для получения равномерной аппроксимации возмущают не только решение, но и параметры самого решения, т.е. частоту колебаний. Это приводит к тому, что решение уже в нулевом порядке зависит от параметров нелинейности. При статистическом анализе измерений доплеровской частоты для получения равномерной аппроксимации будем возмущать как спектр, так и параметры среднего спектра. В качестве параметров спектра выбраны моменты среднего спектра. Например, первый момент ω_d и второй момент $\langle\Delta\omega'^2_{d,g}\rangle$ среднего спектра после перенормировки примут следующий вид:

$$\omega_d \Rightarrow \omega_d + \omega'_{ng} = \omega_d + \int |p(\mathbf{r}_m)|^2\, \omega'_d(\mathbf{r}_m)\, d\mathbf{r}_m\,, \tag{8}$$

$$\langle\Delta\omega'^2_{d,g}\rangle \Rightarrow \Delta\omega'^2_{d,ng} = \frac{1}{2}\int |p(\mathbf{r}_m)|^2\, |p(\mathbf{r}_n)|^2 \left(\omega'_d(\mathbf{r}_m) - \omega'_d(\mathbf{r}_n)\right)^2 d\mathbf{r}_m\, d\mathbf{r}_n\,. \tag{9}$$

Из формул (8) и (9) видно, что в нулевом порядке частота, на которой достигается максимум оценки спектра после перенормировки, и его полуширина зависят от случайных параметров. Вместо разложения (2) и ряда теории возмущений для оценки доплеровской частоты (3) имеем, соответственно, следующие формулы:

$$\hat{\mathbf{S}}(\omega_m) = \mathbf{S}(\omega_m) + \Delta\mathbf{S}(\omega_m) + \ldots\,, \quad \hat{\mathbf{S}}_0 = \mathbf{S}_0 + \Delta\mathbf{S}_0 + \ldots\,, \tag{10}$$

$$\hat{\Omega}_d = \omega_d + \omega'_{ng} - \frac{2\pi}{T_s}\sum_{m=-(N_s-1)}^{N_s-1}(\omega_m - (\omega_d + \omega'_{ng})\, \Delta\mathbf{S}(\omega_m)/\,\mathbf{S}_0\,, \tag{11}$$

где $\mathbf{S}(\omega_m)$, $\mathbf{S}_0 = \frac{2\pi}{T_s}\sum_{m=-(N_s-1)}^{N_s-1}\mathbf{S}(\omega_m)$ – члены нулевого порядка малости; $\Delta\mathbf{S}(\omega_m)$ и $\Delta\mathbf{S}_0$ – члены первого порядка малости теории возмущений.

Величина ошибки измерений средней доплеровской частоты $\mathrm{var}\,\hat{\Omega}_d = \langle(\hat{\Omega}_d - \omega_d)^2\rangle$, вычисленная с использованием формулы (11) как результат усреднения по случайному положению и числу частиц в рассеивающем объеме, по флуктуациям скорости движения турбулентного потока атмосферы, а также по флуктуациям шума, запишется в следующей форме:

$$\mathrm{var}\,\hat{\Omega}_d = \sigma^2_{\omega_d}\int |p(\mathbf{r}_m)|^2\, |p(\mathbf{r}_n)|^2\, R_{\omega_d}(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n) d\mathbf{r}_m\, d\mathbf{r}_n +$$

$$+ \frac{\sqrt{\pi}}{MT_s}\int |p(\mathbf{r}_m)|^2\, |p(\mathbf{r}_n)|^2 \left\{\frac{\langle(\omega'_d(\mathbf{r}_n) - \omega'_{ng})\,(\omega'_d(\mathbf{r}_m) - \omega'_{ng})\rangle}{\left[\frac{1}{2}\langle(\omega'_d(\mathbf{r}_n) - \omega'_d(\mathbf{r}_m))^2\rangle\right]^{1/2}} +\right.$$

$$\left. + \frac{\langle(\omega'_d(\mathbf{r}_n) - \omega'_d(\mathbf{r}_m))\,(\omega'_d(\mathbf{r}_n) - \omega'_{ng})\rangle \langle(\omega'_d(\mathbf{r}_m) - \omega'_d(\mathbf{r}_n))\,(\omega'_d(\mathbf{r}_m) - \omega'_{ng})\rangle}{2\left[\frac{1}{2}\langle(\omega'_d(\mathbf{r}_n) - \omega'_d(\mathbf{r}_m))^2\rangle\right]^{3/2}}\right\} d\mathbf{r}_m\, d\mathbf{r}_n +$$

$$+ \frac{2}{MS/N}\int |p(\mathbf{r}_m)|^2\, \langle(\omega'_d(\mathbf{r}_m) - \omega'_{ng})^2\rangle\, d\mathbf{r}_m + \frac{\pi^2}{3MT_s^2\, S^2/N^2}\,. \tag{12}$$

Исследуем поведение уравнения (12) в случае гауссовской статистики сигнала доплеровского лидара, а также в случае слабой и сильной корреляции. При $d = \infty$, т.е. в случае гауссовской статистики, формула (12) совпадает с формулой (4). Данный факт говорит о том, что условия перенормировки выбраны верно.

В случае сильной корреляции ($d \to 0$) подынтегральные функции второго и третьего членов правой части выражения (12) стремятся к нулю, поэтому величина ошибки измерений принимает вид

$$\operatorname{var} \hat{\Omega}_d = \sigma^2_{\omega_d} + \frac{\pi^2}{3MT_s^2 S^2/N^2} \neq \infty \,. \tag{13}$$

Из формулы (13) видно, что данная аппроксимация является равномерной в отличие от результата (5). С физической точки зрения в случае $d \to 0$ поведение ошибки измерений, которое описывается уравнением (12), не является противоречивым результатом. Как уже отмечалось, в этом случае измеряется частота случайного гармонического колебания на фоне шума. Первое слагаемое в правой части формулы (13) является флуктуациями частоты гармонического колебания. Второе слагаемое описывает меру статистической неопределенности измерений частоты гармонического колебания на фоне шума. Таким образом, применение методов перенормировки при статистическом анализе измерений частоты негауссовского сигнала доплеровского лидара, как и, например, в теории колебаний [1, 2], позволяет получить результаты, которые не противоречат физическому смыслу.

Рассмотрим физический смысл выражения (12) при слабой корреляции ($d \to \infty$). В этом случае ошибка измерений средней доплеровской частоты имеет вид

$$\operatorname{var} \hat{\Omega}_d = \sigma^2_{\omega_d} \int |p(\mathbf{r}_m)|^2 |p(\mathbf{r}_n)|^2 R_{\omega_d}(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n) d\mathbf{r}_m\, d\mathbf{r}_n + \frac{\sqrt{\pi}}{MT_s}\sqrt{<\Delta\omega'^{\,2}_{d,ng}>} + \frac{2}{M\, S/N} + <\Delta\omega'^{\,2}_{d,ng}> + \frac{\pi^2}{3MT_s^2 S^2/N^2}, \tag{14}$$

где $<\Delta\omega'^{\,2}_{d,ng}> = \frac{1}{2}\int |p(\mathbf{r}_m)|^2 |p(\mathbf{r}_n)|^2 <(\omega'_d(\mathbf{r}_m) - \omega'_d(\mathbf{r}_n))^2> \mathbf{r}_m\, \mathrm{d}\mathbf{r}_n$ – средняя полуширина спектра $\mathbf{S}(\omega)$.

Члены правой части уравнения (14) имеют следующий физический смысл. Первое слагаемое соответствует той части ошибки измерений, которая определяется флуктуациями частоты. На данной частоте достигается максимум спектра $\mathbf{S}(\omega)$. Второе и третье слагаемые являются функцией полуширины спектра $\mathbf{S}(\omega)$ и имеет вид, подобный выражению (4). Это означает, что статистическая неопределенность измерения средней доплеровской частоты, определяемая этими слагаемыми, является следствием уширения спектра $\mathbf{S}(\omega)$. Четвертое слагаемое – мерой статистической неопределенности измерений частоты гармонического колебания на фоне шума. Таким образом, в случае слабой корреляции ($d \to \infty$) поведение ошибки измерений средней доплеровской частоты имеет общие закономерности с поведением той же величины для гауссовской статистики ($d = \infty$), что не противоречит физическому смыслу.

3. Заключение

Таким образом, рассмотрены два подхода к статистическому анализу измерений частоты негауссовского сигнала доплеровского лидара при применении методов возмущений. В первом подходе используется метод возмущений, предложенный в [6, 7] для анализа гауссовского случайного сигнала. Второй подход основан на перенормировке параметров среднего спектра. Получены выражения для оценки доплеровской частоты (3) и (11), а также выражения для ошибки измерений средней доплеровской частоты (5) и (12).

При использовании теории возмущений, предложенной в [6, 7], возникают две основные трудности. Это неравномерность аппроксимации и сложности при физической интерпретации полученных результатов. Неравномерность аппроксимации проявляется в том, что ошибка измерений средней доплеровской частоты неограниченно возрастает в случае сильной корреляции. Основные сложности при физической интерпретации наблюдаются в случаях как сильной, так и слабой корреляции. При сильной корреляции сложности с интерпретацией являются следствием неограниченного роста ошибки измерений средней доплеровской частоты, что противоречит физическому смыслу. Как было показано, в случае слабой корреляции, когда вклад негауссовских свойств в исследуемые величины учитывается как возмущающая малая добавка, поведение второго и третьего членов правой части формулы (5) не имеет вида, подобного выражению (4), что затрудняет объяснение данного результата.

В рамках второго подхода удается построить теорию возмущений и получить выражения для оценки доплеровской частоты и ошибки измерений средней доплеровской частоты, которые удовлетворяют требованию равномерной аппроксимации и позволяют интерпретировать полученные результаты. При сильной корреляции величина ошибки измерений средней доплеровской частоты определяется величиной, которая конечна и соответствует данному случаю с физической точки зрения. Ошибка измерений определятся флуктуациями частоты гармонического колебания и мерой статистической неопределенности измерений частоты гармонического колебания на фоне шума. В случае слабой корреляции ошибка измерений средней доплеровской частоты определяется флуктуациями частоты, на которой достигается максимум спектра $\mathbf{S}(\omega)$, средней полушириной спектра $\mathbf{S}(\omega)$ и мерой статистической неопределенности измерений частоты гармонического колебания на фоне шума.

Сравнивая два подхода применения теории возмущений, можно прийти к выводу, что они совпадают, если считать ω'_{ng} бесконечно малым параметром при конечных значениях остальных величин рассматриваемой задачи. Поэтому при использовании разложения (2), а также ряда теории возмущений (3) для анализа негауссовских сигналов неявно предполагается, что величины $\omega'_{ng} = 0$, $\langle\omega'^2_{ng}\rangle = 0$ и т.д. Равенство нулю данных величин означает, что влиянием корреляций флуктуаций локальной доплеровской частоты можно пренебречь: $R_{\omega_d}(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n) = 0$. Следовательно, такие явления, как негауссовские свойства сигнала, пространственное усреднение $\omega'_d(\mathbf{r}_m)$ по рассеивающему объему, учитываются неправильно или не в полной мере. Строго говоря, неправильный учет корреляции приводит к тому, что, например, формулу (5) можно считать достоверной только в случае гауссовской статистики ($d = \infty$). Таким образом, подход к статистическому анализу измерений доплеровской частоты, основанному на применении методов возмущений [6, 7], не приводит к повышению точности при учете негауссовских свойств сигнала.

1. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.
2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 624 с.
3. Шелехов А.П. //Оптика атмосферы и океана. 1993. Т. 6. N 9. С. 1091–1101.
4. Shelekhov A.P. // Proc. SPIE on Lidar Techniques for Remote Sensing. V. 2310. 1994.
5. Afanas'ev A.L., Shelekhov A.P. // Coherent Radar. V. 19. 1995. OSA Technical Digest Series (Optical Society of America, Washington DC, 1995). P. 124–127.
6. Zrnic D.S. // IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. 1977. V. AES-13. N 4. P. 344–354.
7. Zrnic D.S. // IEEE Trans. Aerosp. Electron. V. GE-17. 1979. N 4. P. 113–129.
8. Banakh V.A., Smalikho I.N. et al. //Appl. Opt. 1995. V. 34. N 12. P. 2055–2067.
9. Banakh V.A., Haring R. et al. Laser Remote Sensing of the Mean Wind in the Atmospheric Boundary Layer. DLR-Forschungsbericht 95–13. 1995. 83 p.

Институт оптики атмосферы СО РАН,
Томск

Поступила в редакцию
17 декабря 1996 г.

A.P. Shelekhov. **Uniform Approximation in Small Perturbations Method Used for Statistical Analysis of Doppler Measurements.**

Two approaches are treated in the paper to the statistical analysis of measurements of non-Gaussian signal of Doppler lidar when using the perturbation method. The first approach uses the perturbation method proposed for analysis of Gaussian random signal. The second one is based on renormalization of mean spectrum parameter. The first approach presents difficulties stem from the approximation nonuniformity and physical interpretation of the obtained results. It is shown in the paper, that the renormalization of the mean spectrum parameter results in a series of perturbation theory for the Doppler frequency estimation, which complies with the requirement of the approximation uniformity and allows an interpretation of the obtained results.