

## Визуализация поля скоростей в атмосфере по рассеянному излучению

В.А. Банах, А.В. Фалиц\*

*Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН  
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1*

Поступила в редакцию 17.04.2008 г.

Представлены результаты анализа возможностей визуализации 2-D-поля скоростей в атмосфере по рассеянному лазерному излучению частицами, движущимися в турбулентном воздушном потоке. Показано, что визуализация поля скоростей в потоке возможна по смещению крупномасштабных неоднородностей интенсивности спекл-структуры, возникающей в оптическом изображении подсвечиваемой лазером области рассеивающего слоя вследствие рассеяния лазерного излучения находящимися в слое частицами, увлекаемыми воздушным потоком.

*Ключевые слова:* визуализация, поле скоростей, лазерное излучение, рассеяние, спекл-структура, когерентное изображение.

### Введение

Известные методы бесконтактного лазерного определения скорости потоков жидкости или газа [1–5] по принципу измерения подразделяются на два вида. К одному из них относятся методы, основанные на регистрации доплеровского сдвига частоты рассеянного лазерного излучения. Доплеровский сдвиг частоты связан со скоростью движения рассеивающих частиц, увлекаемых потоком, что позволяет определять с высокой точностью продольную относительно зондирующего луча компоненту скорости потока. Если распределение скоростей в потоке неоднородно, то измерения с использованием лазерных доплеровских анемометров требуются проводить в различных областях потока.

Относящиеся к другому виду распространенные способы измерения и визуализации поля скоростей в газовых и жидкостных потоках основаны либо на регистрации когерентных изображений совокупности частиц, находящихся в потоке (particle image velocimetry (PIV)), либо спекл-структуры поля, рассеянного на этих частицах, — лазерная спекл-фотография или спекл-интерферометрия — с последующим корреляционным анализом пар изображений, полученных в различающиеся моменты времени. Эти методы уступают в точности доплеровским измерениям скорости или дают лишь качественную картину поля скоростей в потоке, но преимущество их в том, что они позволяют оперативно получать информацию о динамике потока в целом, а не в отдельных его частях, как при использовании лазерных доплеровских анемометров.

Применение указанных методов для определения скоростей предполагает наличие частиц, которые увлекаются потоком и рассеивают излучение. Для этого исследуемый поток искусственно «засеивается» рассеивающими частицами. Важно, чтобы размеры засеиваемых частиц были одинаковыми, а их концентрация в потоке равномерна.

Доплеровские лазерные измерители скорости (лидары) успешно используются для определения скорости ветра в атмосфере, где в качестве рассеивателей выступают частицы естественного атмосферного аэрозоля. В то же время для некоторых задач, например для индикации областей повышенной турбулентности или вихревых и когерентных структур в атмосфере, более привлекательными являются методы, позволяющие осуществлять оперативную визуализацию поля скоростей в протяженных областях пространства. В частности, в работе [6] PIV-установки использовались в стендовых измерениях для визуализации поля скоростей воздушных течений, генерируемых винтом вертолета. Однако для атмосферных задач непосредственное применение готовых PIV- или спекл-технологий вызывает большие трудности, так как получить изображения отдельных частиц аэрозоля на трассах протяженностью до нескольких километров с целью анализа их перемещения в пространстве практически невозможно, а наблюдаемая динамика разрешаемых на этих расстояниях спеклов не отражает реального движения воздушного потока в атмосфере.

Возможность визуализации поля скоростей по отраженному в турбулентной атмосфере лазерному излучению обсуждается в работах [7–9], где аэрозольные частицы рассматриваются не как трассеры, а как рассеиватели в слое, формирующие диффузную поверхность, равномерно отражающую излу-

\* Виктор Арсентьевич Банах (banakh@iao.ru); Андрей Вячеславович Фалиц (falits@iao.ru).

чение. Поле скоростей визуализировалось в [7–9] по смещениям случайных неоднородностей интенсивности в поперечном сечении падающего на отражающий аэрозольный слой лазерного пучка. Предполагалось, что смещения пространственных неоднородностей интенсивности лазерного пучка обусловлены движением увлекаемых потоком турбулентных неоднородностей показателя преломления воздуха на пути распространения подсвечивающего излучения.

В работах [10, 11] выполнены экспериментальные исследования визуализации воздушного потока путем корреляционной обработки попарных изображений пятна лазерной подсветки, формирующегося в результате рассеяния света в атмосфере частицами снега, искусственного  $\text{CO}_2$ -тумана и неоднородностями показателя преломления.

В данной статье представлена компьютерная модель, имитирующая эксперименты [10, 11]. В отличие от [7–9] визуализация поля скоростей здесь основывается на выделении крупномасштабных неоднородностей в распределении интенсивности в изображении подсвечиваемого слоя, возникающих не вследствие влияния турбулентности показателя преломления воздуха, а в результате рассеяния лазерного излучения частицами, перемещающимися в соответствии с полем скоростей исследуемого потока.

Иными словами, в [9, формула (20)] нужно было бы использовать не равномерное распределение положений рассеивающих частиц в отражающем слое, а распределение, функционально зависящее от поля скоростей в потоке. Возможности визуализации поля скоростей по рассеянному излучению здесь анализируются путем последовательного моделирования подсвечивающего пучка в процессе распространения, отражения и формирования изображения, а не с помощью интегрального соотношения, определяющего интенсивность в плоскости изображения через интенсивности подсвечивающего и рассеянного пучков [9, формула (13)]. Турбулентные флуктуации показателя преломления воздуха при моделировании не учитывались.

## 1. Алгоритм визуализации поля скоростей в атмосфере

Схема распространения подсвечивающего лазерного излучения и формирования изображения подсвечиваемого объекта показана на рис. 1. Когерентный коллимированный гауссов пучок проходит трассу до отражающего слоя, где рассеивается аэрозольными частицами. Рассеянное излучение распространяется в обратном направлении и собирается линзой, за которой строится изображение.

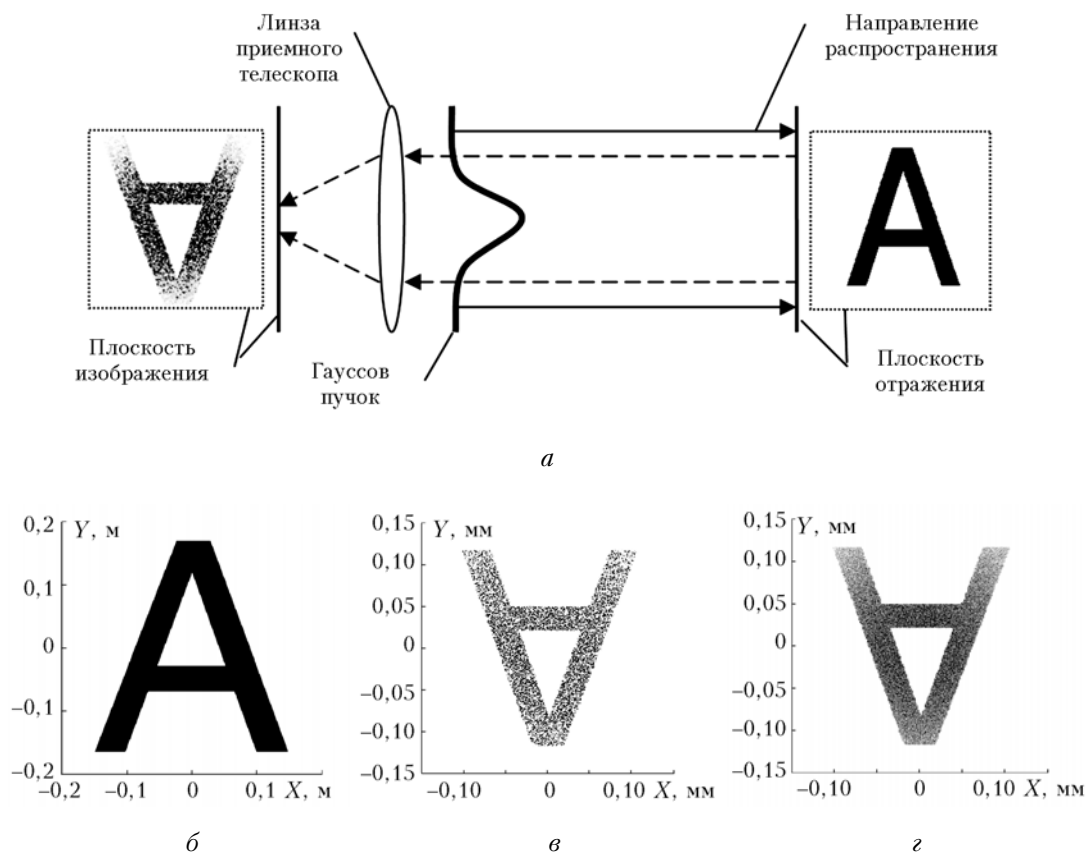


Рис. 1. Схема численного эксперимента (а), модель наблюдаемого объекта (б), его когерентное изображение (в) и когерентное изображение объекта, усредненное по 25 реализациям (г)

В плоскости отражения комплексная амплитуда рассеянного поля  $U$  формируется в виде двумерного массива комплексных величин в узлах расчетной сетки согласно выражению

$$U_{n,m} = U_{n,m}^G U_{n,m}^R, \quad (1)$$

где  $n, m$  – индексы узлов расчетной сетки, в которых  $U^G$  – массив значений поля подсвечивающего пучка в плоскости отражения;  $U^R$  – массив значений функции, моделирующей рассеяние поля на аэрозольных частицах. Массив  $U^R$  определяется соотношением

$$U_{n,m}^R = A_{n,m} \exp[i\varphi_{n,m}], \quad (2)$$

где  $A$  и  $\varphi$  – массивы значений амплитуды и фазы комплексной величины, представляющие собой случайные функции, значения которых равномерно распределены от 0 до 1 и от 0 до  $2\pi$  соответственно. Массив значений  $\varphi_{n,m}$  моделирует случайные изменения фазы подсвечивающей волны за счет случайного расположения рассеивающих частиц, а массив значений  $A_{n,m}$  моделирует случайную амплитуду рассеяния частиц [12, 13].

Распространение рассеянного поля от плоскости отражения до линзы приемного телескопа моделировалось с использованием реализованного в [14] алгоритма быстрого преобразования Фурье

$$U_{n,m}^L = FFT^{-1} \left[ FFT[U_{n,m}] \exp \left( \frac{-i\pi\lambda L}{h^2} (m^2 + n^2) \right) \right], \quad (3)$$

где  $U_{n,m}^L$  – двумерный массив значений комплексной амплитуды отраженного поля в плоскости объектива;  $\lambda$  – длина волны;  $L$  – длина трассы распространения;  $h$  – расстояние между узлами расчетной сетки;  $FFT[]$  и  $FFT^{-1}[]$  означают прямое и обратное двумерные преобразования Фурье.

Распределение интенсивности рассеянного поля в плоскости резкого изображения приемного телескопа  $U^I$  рассчитывалось по формуле

$$U_{n,m}^I = \frac{h^2}{\lambda i l} \exp \left\{ \frac{i\pi h^2}{\lambda l} (n^2 + m^2) \right\} \times FFT \left[ T_{n,m} U_{n,m}^L \exp \left( \frac{i\pi h^2}{2\lambda} \left( \frac{1}{l} - \frac{1}{f} \right) (n^2 + m^2) \right) \right], \quad (4)$$

где  $l$  – расстояние от объектива до плоскости резкого изображения;  $f$  – фокусное расстояние приемного телескопа;  $h'$  – расстояние между узлами расчетной сетки в плоскости изображения;  $T_{n,m}$  – массив значений функции пропускания объектива. Расстояние между линзой и плоскостью резкого изображения определяется соотношением

$$\frac{1}{L} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f}.$$

В отличие от фотографий в белом свете когерентные изображения содержат спеклы [2]. На рис. 1 показаны модельное регулярное распределение амплитуды рассеянного поля  $A_{n,m}$  в (2), получаемое изображение этого распределения в когерентном свете и результат усреднения когерентных

изображений этого распределения по 25 реализациям. При случайном коэффициенте отражения частиц изображение падающего на рассеивающий слой лазерного пятна еще более контрастно [2]. Именно спеклованность когерентных изображений вызывает необходимость построения компьютерных моделей для анализа возможности визуализации скоростей в атмосфере по рассеянному лазерному излучению.

Временные изменения распределения интенсивности в изображении подсвечиваемой области отражающего слоя определяются смещениями рассеивающих частиц, увлекаемых воздушным потоком. Предположим, что вектор скорости потока в поперечной к направлению распространения подсвечивающего пучка плоскости можно представить в виде суммы регулярной (средней) скорости и флуктуационной составляющей скорости, возникающей вследствие турбулентного перемешивания рассеивающих частиц. Тогда для скорости в узлах сетки  $\mathbf{V}_{n,m}$  получим

$$\mathbf{V}_{n,m} = \mathbf{V}_{n,m}^M + \mathbf{V}_{n,m}^F, \quad (5)$$

где  $\mathbf{V}_{n,m}^M$  и  $\mathbf{V}_{n,m}^F$  – регулярная скорость и флуктуационная компонента.

При моделировании предполагалось, что регулярное поле скоростей в потоке является круговым с линейным увеличением тангенциальной скорости вдоль радиуса круга от нуля до некоторого максимального значения. Таким образом имитировалось изменение регулярной скорости потока как по величине, так и по направлению.

Регулярная скорость при численном моделировании задавалась перемещением рассеивающих частиц по кругу относительно центра плоскости отражения. Для заданного распределения поля скоростей расстояния, на которые перемещаются рассеивающие частицы, зависят от времени между фиксациями их положения. На рис. 2, а в качестве примера показано начальное расположение частиц (символом «o») и их местоположение через 20 мс во время повторной фиксации (символом «\*») для максимальной скорости потока 1 м/с.

Флуктуации скорости потока в атмосфере моделировались в соответствии с двумерной моделью турбулентности Кармана [15, 16]. Согласно этой модели флуктуации скорости ветра однородны, изотропны и определяются  $8/3$ -степенным пространственным спектром неоднородностей, куда в качестве параметров входят дисперсия скорости и внешний масштаб турбулентности. На рис. 3 представлены примеры 2D-распределений координатных компонент флуктуационной составляющей вектора скорости ветра  $\mathbf{V}^F = (V_x^F, V_y^F)$ , полученные для дисперсии флуктуаций скорости  $1 \text{ м}^2/\text{с}^2$  и внешнего масштаба 1 м.

На рис. 2, б показаны начальные положения частиц и их расположение, как и на рис. 2, а, через 20 мс. Случайные блуждания каждой частицы в течение этого времени моделировались в соответствии с реализациями полей компонент случайного вектора скорости, примеры которых показаны на рис. 3.

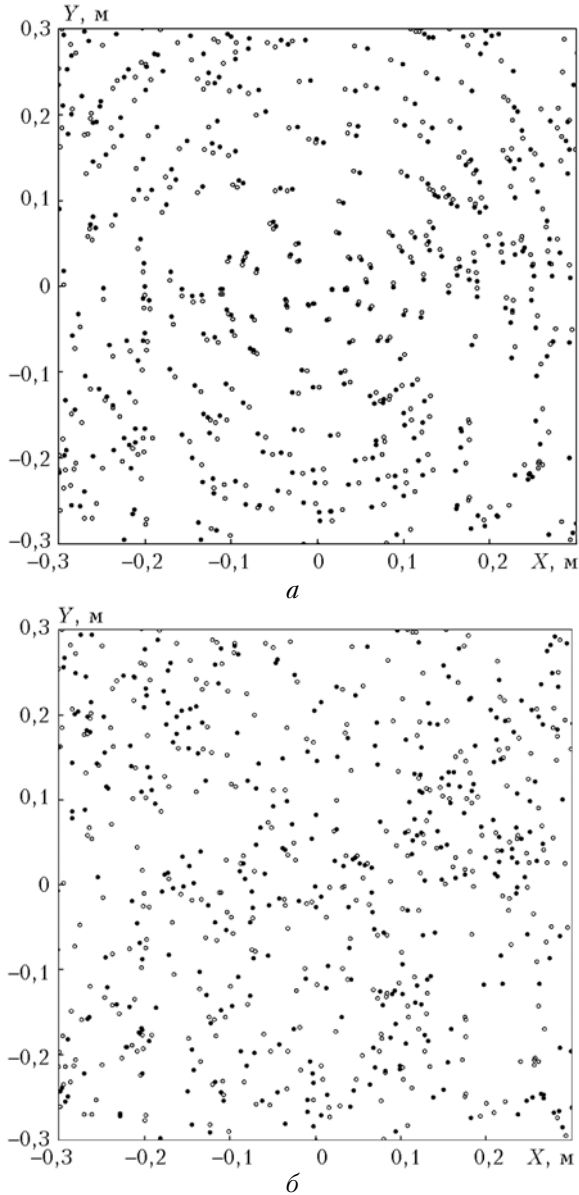


Рис. 2. Смещение рассеивающих частиц со средней скоростью (*a*) и в результате турбулентных флуктуаций скорости ветра (*б*)

Для сравнительного анализа распределений интенсивности в изображениях пятна подсветки рассеивающего слоя, полученных в различные моменты времени, разница между которыми определяется смещением рассеивающих частиц вследствие их увлекаемости полем скоростей потока, была разработана итерационная процедура. Суть ее заключается в том, что из анализируемых распределений интенсивности выделяются участки определенной размерности (рис. 4, квадратные области) и затем рассчитываются суммы квадратов разностей интенсивностей выделенных участков изображений:

$$\text{Sum}(j,q) = \sum_{k,g} (I_{n+k,m+g}^{(1)} - I_{n+k+j,m+g+q}^{(2)})^2, \quad (6)$$

где  $I^{(1)}$  и  $I^{(2)}$  — значения интенсивностей в изображениях, полученных в различающиеся моменты

времени;  $k$  и  $g$  — индексы массива значений интенсивности выделенного из общего распределения участка;  $j$  и  $q$  — индексы смещения выделенного двумерного массива.

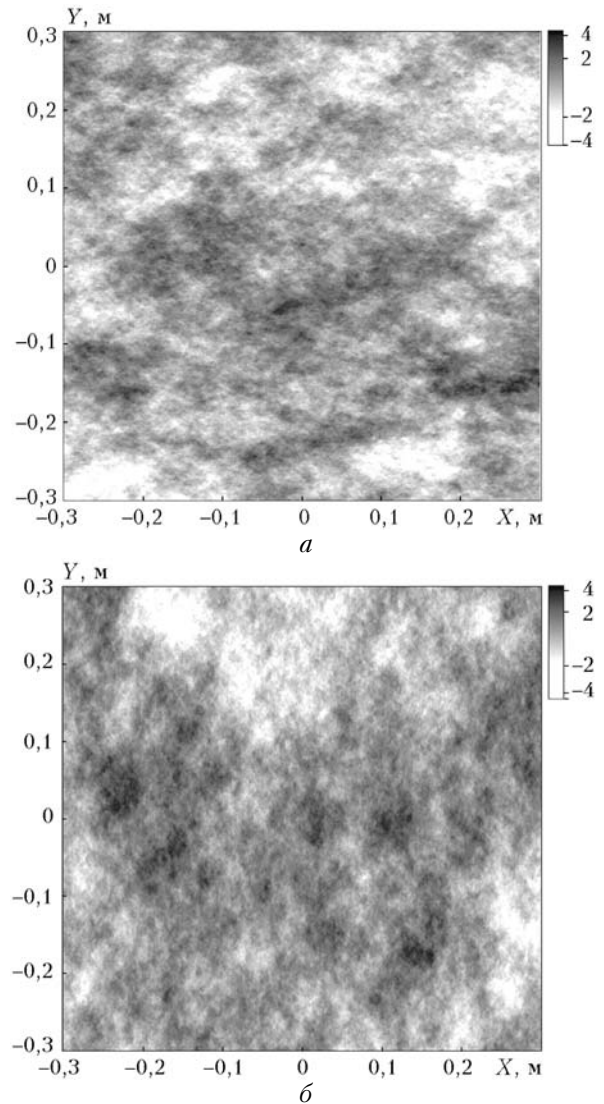


Рис. 3. Компоненты вектора случайной составляющей скорости потока: *a* — компонента  $V_x^F$ ; *б* — компонента  $V_y^F$

На первом шаге рассчитываются суммы квадратов разностей интенсивностей в выделенных массивах с совпадающими индексами, т.е. при  $j = q = 0$ . После этого рассчитываются суммы квадратов разностей значений интенсивности при смещении выделенного участка на 1 пиксель по различным направлениям в одном из распределений. Минимальное значение из рассчитанных сумм

$$\text{Min}[\text{Sum}(0,0), \text{Sum}(-1,0), \text{Sum}(1,0), \text{Sum}(0,-1), \text{Sum}(0,1)] \quad (7)$$

указывает направление смещения выделенного участка изображения. Если индексы смещения для минимального значения из рассчитанных сумм оказываются отличными от нуля, то процедура повторяется с присвоением минимальной сумме квадратов разностей интенсивностей нулевых индексов

смещения. Итерирование проводится до тех пор, пока минимальной из рассчитанных сумм (6) не окажется сумма с нулевыми значениями индексов смещения, т.е.  $\text{Sum}(0,0)$ . Это означает, что на втором изображении найден участок с минимальными отклонениями по интенсивности от выделенного участка в первом изображении. Направление смещений каждого из выделенных участков на втором изображении по отношению к первому и определяет структуру поля скоростей, вызывающего эти перемещения.

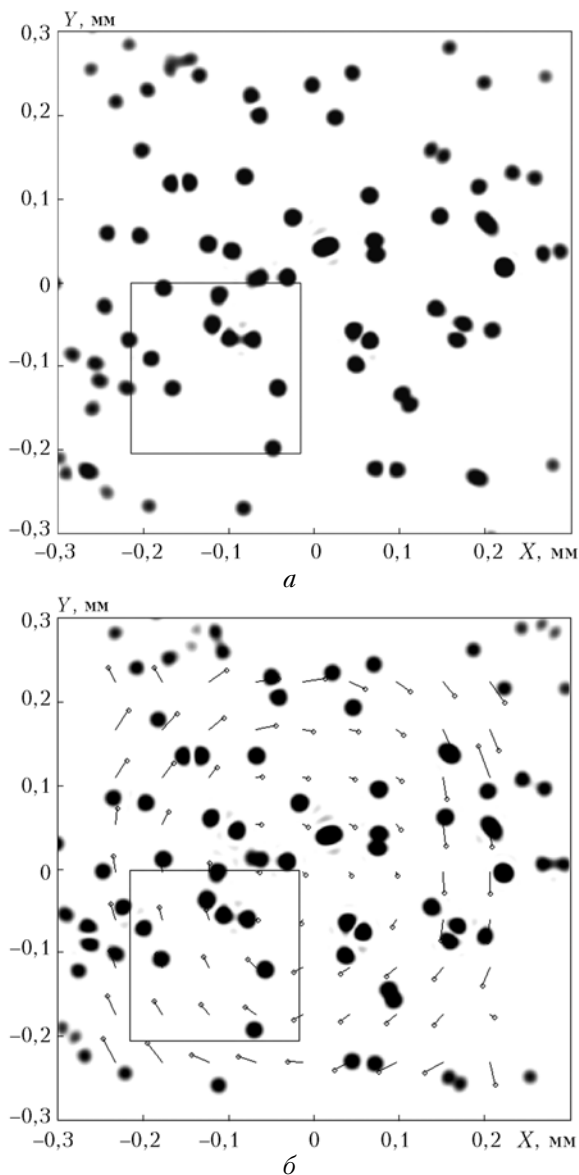


Рис. 4. Распределения интенсивности в изображении подсвечиваемой области, полученные для распределений положений рассеивающих частиц на рис. 2, *a*, и результаты визуализации поля скоростей

На рис. 4 представлены распределения интенсивности в изображении подсвечиваемой области отражающего слоя для распределений положений рассеивающих частиц, показанных на рис. 2, *a*. Анализ смещений различных участков изображения

за время между измерениями в соответствии с процедурой (6), (7) позволяет визуализировать поле скоростей в потоке (показано стрелками, рис. 4, *б*). Отметим, что применение к этим распределениям интенсивности обычно используемых в PIV корреляционных методов сравнения изображений [4] дает менее четкую визуализацию, чем это показано на рис. 4, *б*. Алгоритм (6), (7) оказывался более устойчивым, чем PIV корреляционные методы визуализации, и в других численных экспериментах, рассмотренных в данной статье.

## 2. Результаты моделирования

Рассматривается следующая численная схема (см. рис. 1). Оптический пучок гауссовой формы с начальным радиусом  $R_b = 0,15$  м и длиной волны  $\lambda = 0,57$  мкм распространяется вдоль трассы длиной  $L = 500$  м, в конце трассы происходит рассеяние пучка на слое частиц, и прошедшее трассу в обратном направлении рассеянное излучение собирается линзой диаметром  $D_t = 0,2$  м и фокусным расстоянием  $f = 1$  м. Моделирование распространения пучка было реализовано на массиве значений комплексного поля с размерностью  $N_x \times N_y = 1024 \times 1024$  точек, при этом шаг дискретизации расчетной сетки  $h$  для поля составлял  $0,72 \cdot 10^{-3}$  м. Шаг дискретизации расчетной сетки в плоскости изображения  $h'$  равнялся  $0,72 \cdot 10^{-6}$  м. Время между измерениями, в течение которого происходит смещение увлекаемых потоком рассеивающих частиц, задавалось равным 0,02 с. Размерность массивов, выделяемых из исходных массивов значений интенсивности в изображениях для анализа смещений различных участков изображений, была выбрана равной  $N_x \times N_y = 256 \times 256$  пикселей. Рассматривались 64 перекрывающихся участка в изображении.

На рис. 5, *a* представлены полученное в результате моделирования распределение интенсивности в изображении подсвечиваемой области в отражающем слое, формируемом рассеивающими частицами, двигающимися в поле скоростей воздушного потока с максимальной регулярной скоростью  $V_{\max}^M = 0,2$  м/с в отсутствие флуктуаций ( $V^F = 0$ ), и результаты визуализации поля скоростей в потоке по алгоритму (6), (7). Из рис. 5, *a* видно, что распределение интенсивности в изображении представляет собой мелкомасштабную спекл-структуру на фоне неоднородностей интенсивности больших масштабов, а картина визуализации хорошо воспроизводит круговое поле скорости в потоке по движению увлекаемых потоком рассеивающих частиц. Крупномасштабные неоднородности интенсивности возникают вследствие кластеризации рассеивающих частиц [17] из-за случайности их расположения в пространстве (2) в анализируемых парах изображений.

Если к регулярному полю скоростей в потоке добавить флуктуационную составляющую  $V^F \neq 0$ , т.е. к регулярному смещению каждой частицы по окружности добавить ее случайные блуждания, то визуализация регулярного движения потока, как это следует из рис. 5, *б*, становится практически невозможной. На рис. 5, *б* показаны результаты

моделирования распределения интенсивности в изображении и картина визуализации поля скоростей для  $V_{\max}^M = 0,2$  м/с и параметров турбулентности, задававшихся при моделировании случайных компонент скорости ветра, примеры реализаций которых показаны на рис. 3. Причина невозможности визуализации заключается в том, что вследствие турбулентного перемешивания рассеивающих частиц происходит «кипение» спекл-структуры изображения, обуславливающее статистическую независимость мелкомасштабных распределений интенсивности в анализируемых парах изображений. При этом распределение крупномасштабных неоднородностей интенсивности в изображении в основном сохраняет свою структуру.

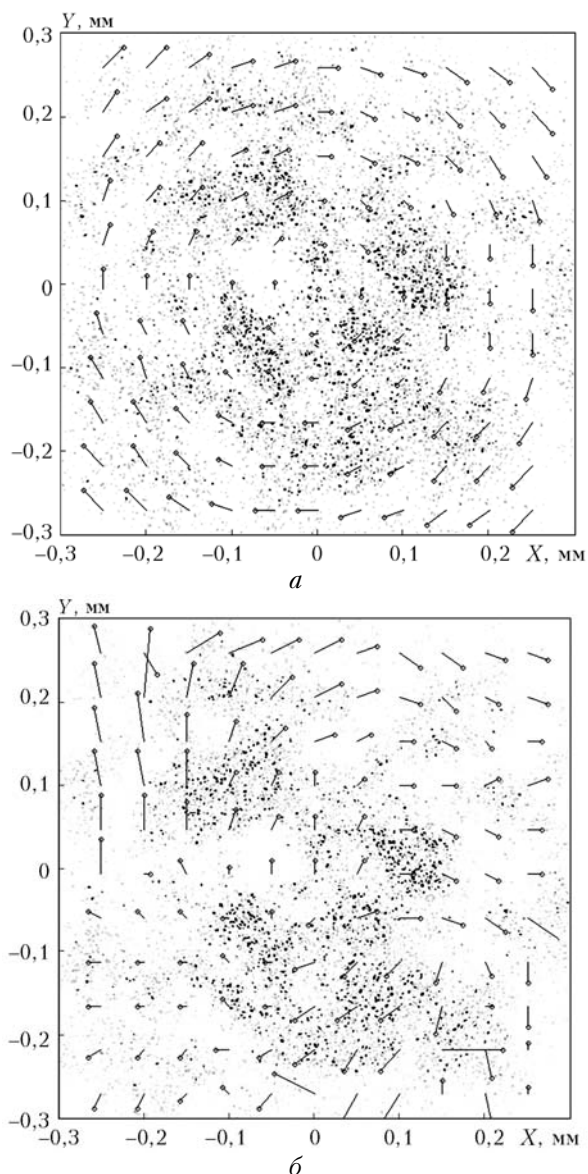


Рис. 5. Визуализация поля скоростей по спекл-структуре изображения

Задача визуализации решается, если осуществлять ее на основе крупномасштабных флуктуаций интенсивности в изображениях рассеивающего

слоя. Для этого нужно отфильтровать мелкомасштабные флуктуации интенсивности, определяемые спекл-структурой изображения. Спекл-фильтрация проводилась путем усреднения значений интенсивности в отдельных пикселях изображения по значениям интенсивности в соседних пикселях:

$$I_{n,m} = \frac{I_{n+1,m} + I_{n-1,m} + I_{n,m+1} + I_{n,m-1}}{4}, \quad (8)$$

где индексы  $n$  и  $m$  определяют узлы расчетной сетки. Процедура усреднения (8) повторяется итерационно до тех пор, пока влияние спекл-структуры на распределение интенсивности в изображении не будет устранено.

Рис. 6, а показывает результат итерационного усреднения распределения интенсивности, приведенного на рис. 5, б, и последующей визуализации поля скоростей по усредненным изображениям.

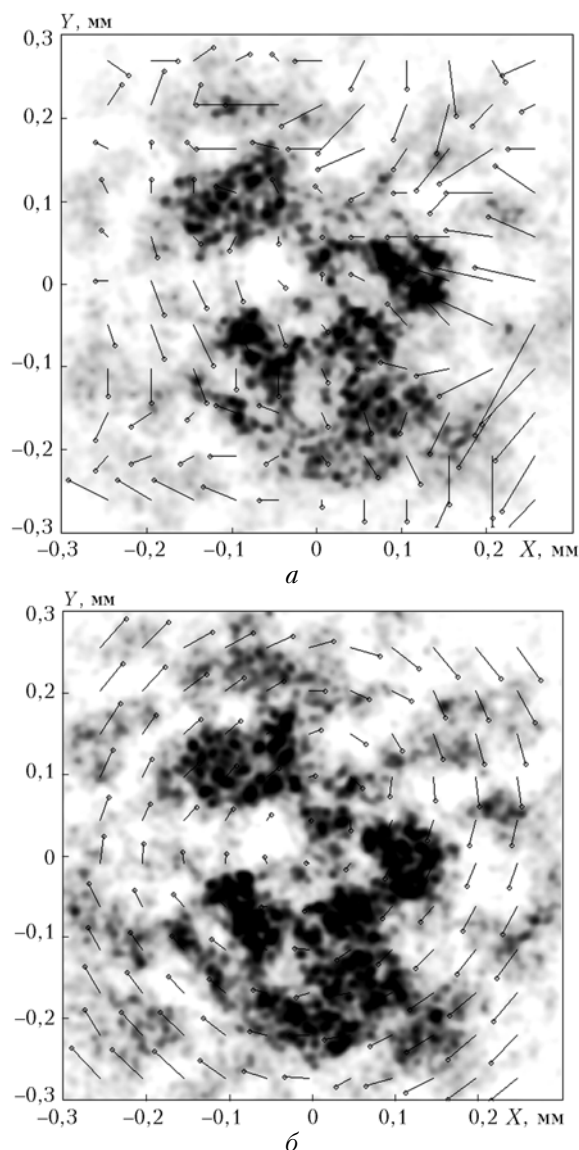


Рис. 6. Визуализация поля скоростей по усредненным распределениям интенсивности в изображениях рассеивающего слоя  $V_{\max}^M = 0,2$  м/с (а) и  $V_{\max}^M = 3$  м/с (б), дисперсия флуктуаций скорости 1 м/с

Видно, что восстановить заданное круговое поле скоростей не удастся и по усредненным распределениям интенсивности. Причина неудачи визуализации в том, что в рассматриваемом случае максимальная регулярная скорость потока  $V_{\max}^M = 0,2 \text{ м/с}$  была меньше, чем дисперсия флуктуации скорости (1 м/с).

На рис. 6, б представлены усредненные распределения интенсивности в изображении для той же модели поля скоростей и тех же флуктуаций скорости, что и на рис. 6, а, но для максимальной регулярной скорости  $V_{\max}^M = 3 \text{ м/с}$ . Здесь же показаны результаты визуализации поля скоростей путем обработки усредненных распределений интенсивности по алгоритму (6), (7). Видно, что заданное круговое поле скоростей в этом случае четко воспроизводится.

### Заключение

В данной статье представлена методика визуализации 2-D-поля скоростей в атмосфере по когерентным изображениям подсвечиваемой лазером области рассеивающего атмосферного слоя. Показано, что визуализация поля скоростей возможна по смещению крупномасштабных неоднородностей интенсивности спекл-структуры, возникающей в оптическом изображении пятна подсвета вследствие рассеяния лазерного излучения движущимися в атмосфере рассеивателями.

Предложены итерационный метод фильтрации мелкомасштабной спекл-структуры флуктуаций интенсивности в изображении и итерационная процедура визуализации поля скоростей на основе обработки фильтрованных изображений. Приведены примеры успешной визуализации при условии, что регулярная скорость потока превышает флуктуационную составляющую. Предложенная методика выделения крупномасштабных флуктуаций интенсивности не является эффективной с точки зрения вычислительного быстродействия, так же как и метод визуализации поля скоростей не является совершенным с точки зрения технической реализации, но они отражают принцип предложенного метода, который может быть использован при разработке новых приборов по изучению атмосферных явлений и процессов. Так, например, этот метод может быть применен для визуализации вихрей в следах самолетов, где регулярные скорости достигают 15–20 м/с, что намного превышает случайные вариации скорости за счет атмосферной турбулентности воздуха.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 06-05-64445, 06-05-96951-р-офи) и Президиума СО РАН (междисциплинарный интеграционный проект № 63).

*V.A. Banakh, A.V. Falits. Visualization of velocity fields in the atmosphere based on scattered radiation.*

The possibilities for visualization of 2D velocity fields in the atmosphere based on laser radiation scattered by the particles moving in a turbulent air flow have been analyzed. With the help of numerical modeling it was demonstrated that visualization of the flow velocity field is possible based on displacements of large-scale intensity inhomogeneities in the speckle structure arising in the optical image of the scattering layer region illuminated by a laser.

1. Франсон М. Оптика спеклов. М.: Мир, 1980. 171 с.
2. Бакут П.А., Мандросов В.И., Мамеев И.Н., Устинов Н.Д. Теория когерентных изображений / Под ред. Н.Д. Устинова. М.: Радио и связь, 1987. 264 с.
3. Fomin N.A. Speckle Photography for Fluid Mechanics Measurements. Berlin: Springer-Verlag, 1998. 290 p.
4. Raffel M., Willert C., Kompenhans J. Particle image velocimetry: A practical guide. Berlin: Springer-Verlag, 1998. 232 p.
5. Abbrecht H.-E., Borys M., Damaschke N., Tropea C. Laser Doppler and Phase Doppler Measurement Techniques. Series: Experimental fluid Mechanics. Berlin: Springer, 2003. 738 p.
6. Raffel M., Richard H., Ehrenfried K., Van der Wall B., Burley C., Beaumier P., McAlister K., Pengel K. Recording and evaluation methods of PIV investigations on a helicopter rotor model // Experiments in Fluids. 2004. V. 36. P. 146–156.
7. Banakh V.A., Falits A.V., Halldorsson T. Simulation of retrieval of wind velocity in a turbulent atmosphere by speckle photography // Proc. 13-th Coherent Laser Radar Conf. 2005. P. 19–22.
8. Banakh V., Falits A., Halldorsson T. Simulation of retrieval of wind velocity and vortex observation in a turbulent atmosphere by speckle photography // Lidar Technologies, Techniques, and Measurements for Atmospheric Remote Sensing II // Proc. SPIE. V. 6367. P. 121–128.
9. Банах В.А. Моделирование изображения подсвечиваемого лазером рассеивающего слоя в турбулентной атмосфере // Оптика атмосф. и океана. 2007. Т. 20. № 4. С. 303–307.
10. Halldorsson T., Langmeier A., Prucklmeier A., Banakh V.A., Falits A.V. Particle and speckle imaging velocimetry applied to a monostatic LIDAR // Proc. SPIE. 2006. V. 6522. P. 65220A-1–65220A-9.
11. Halldorsson T., Langmeier A., Prucklmeier A., Banakh V., Falits A. Particle and speckle imaging velocimetry applied to a monostatic lidar // Newsroom of SPIE 10.1117/2.1200706.0615 (invited paper).
12. Goodman J.W. Statistical Optics. New York: Wiley, 1985. 256 p.
13. Nelson D.H., Walters L.D., MacKerrow E.P., Schmit M.J., Quick C.R., Poch W.M., Petrin R.R. Wave optics simulation of atmospheric turbulence and reflective speckle effects in CO<sub>2</sub> lidar // Appl. Opt. 2000. V. 39. N 12. P. 1857–1871.
14. Banakh V.A., Falits A.V. Turbulent statistics of laser beam intensity on ground-to-satellite optical link // Proc. SPIE. 2001. V. 4678. P. 132–143.
15. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Наука, 1967. 720 с.
16. Банах В.А., Фалиц А.В. Спектры флуктуаций неоднородного поля ветра в атмосфере, измеряемого с усреднением по пространству // Оптика атмосф. и океана. 2003. Т. 16. № 8. С. 704–707.
17. Кляцкин В.И. Кластеризация и диффузия частиц и плотности пассивной примеси в случайных гидродинамических потоках // Успехи физ. наук. 2003. Т. 173. № 7. С. 689–710.