«Оптика атмосферы», **1**, № 9 (1988) УДК 621.373.826

В.П. Лукин

О ДИСПЕРСИИ РАЗНОСТИ ЭЙКОНАЛОВ ВОЛН РАЗНЫХ ЧАСТОТ В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

Рассматривается двухцветная адаптивная оптическая система, в которой обратная связь замыкается оптически через атмосферу с помощью дополнительного опорного источника, имеющего длину волны, отличную от основной. Рассчитана дисперсия разности эйконалов двух сферических (или плоских) волн, имеющих разные оптические частоты для различных режимов атмосферной турбулентности.

В статье рассматривается асимптотическое поведение дисперсии разности эйконалов двух оптических волн, имеющих различные частоты, при распространении их в турбулентной атмосфере.

Используя результаты работы [1], нетрудно записать в приближении метода плавных возмущений выражение для дисперсии разности эйконалов $\sigma^2_{\Delta\Theta}$ двух оптических волн, распространяющихся в турбулентной атмосфере и имеющих волновые числа κ_1 и κ_2, через спектральную плотность флуктуации показателя преломления атмосферы $\Phi_n(\kappa, x)$

$$\sigma^2_{\Delta\Theta} = \langle [\Theta_1 - \Theta_2]^2 \rangle = 2\pi^2 \int\limits_0^L dx \int\limits_0^\infty d\varkappa\varkappa\Phi_n(\varkappa,\ x) \times$$
$$\times \{\cos(\varkappa^2 (L-x)\gamma/2\kappa_2) - \cos(\varkappa^2 (L-x)\gamma/2\kappa_1\}^2. \qquad (1)$$

В (1) предполагается, что флуктуации показателя преломления изотропны, L — протяженность оптической трассы; параметр γ равен 1 и x/L для плоской и сферических волн соответственно. В этих предельных случаях γ не Зависит от длин волн λ_1 и λ_2. При оценке величины $\sigma^2_{\Delta\Theta}$ рассмотрим два предельных варианта [2]:

1) $\kappa_1 \simeq \kappa_2$, $\kappa_1 - \kappa_2 = \delta$ — близкие длины волн;

2) $\kappa_1 \gg \kappa_2$ — сильно отличающиеся длины волн.

Рассмотрим первый вариант. Выражение, стоящее в фигурных скобках в (1), преобразуем к виду

$$\left\{\cos\frac{\varkappa^2 (L-x)\gamma}{2\kappa_1} - \cos\frac{\varkappa^2 (L-x)\gamma}{2\kappa_2}\right\}^2 \approx 4\sin^2\frac{\varkappa^2 (L-x)\gamma}{2\kappa_2} \times$$
$$\times \sin^2\frac{\varkappa^2 (L-x)\gamma_\sigma}{4\kappa_2^2}\ . \qquad (2)$$

При получении (2) использовали приближенные равенства

$$\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} = \frac{1}{\kappa_2 + \delta} + \frac{1}{\kappa_2} \approx \frac{2}{\kappa_2}\ ;$$
$$\frac{1}{\kappa_1} - \frac{1}{\kappa_2} = \frac{1}{\kappa_2 + \delta} - \frac{1}{\kappa_2} \approx -\frac{\delta}{\kappa_2^2}\ .$$

Так как $\delta \ll \kappa_2$, выражение (2) в области существенного интегрирования запишем в виде

$$\left\{\cos\frac{\varkappa^2 (L-x)\gamma}{2\kappa_1} - \cos\frac{\varkappa^2 (L-x)\gamma}{2\kappa_2}\right\}^2 \approx \frac{\varkappa^4 (L-x)^2\gamma^2\delta^2}{4\kappa_2^2}\left(1 - \cos\frac{\varkappa^2 (L-x)\gamma}{\kappa_2}\right)\ . \qquad (3)$$

В результате дисперсия разности эйконалов для волн с волновыми числами κ_1 и κ_2 имеет (для спектра $\Phi_n(\varkappa, x) = 0,033C_n^2(x)\varkappa^{-11/3}\exp(-\varkappa^2/\varkappa_m^2)$, где $C_n^2(x)$ — структурная характеристика показателя преломления вдоль трассы распространения; $\varkappa_m^{-1}$ — внутренний масштаб турбулентности [3]) следующий вид:

$$\sigma^2_{\Delta\Theta} = \frac{\pi^2\, 0{,}033\, \delta^2}{4\kappa_2^4} \int_0^L dx C_n^2(x)\,(L-x)^2 \gamma^2 \int_0^\infty d\varkappa \varkappa^{4/3} \exp(-\varkappa^2/\varkappa_m^2)\left(1-\cos\frac{\varkappa^2 (L-x)\gamma}{\kappa_2}\right). \quad (4)$$

Используя [4]

$$\int_0^\infty d\varkappa \varkappa^{4/3} \exp(-\varkappa^2/\varkappa_m^2)\left(1-\cos\frac{\varkappa^2 (L-x)\gamma}{\kappa_2}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma(7/6)}{2}\varkappa_m^{7/3}\left[1 - {}_2F_1\left(7/12,\ 13/12;\ 1/2;\ -\frac{\varkappa_m^4 (L-x)^2\gamma^2}{\kappa_2^2}\right)\right],$$

выражение (4) можно преобразовать к виду

$$\sigma^2_{\Delta\Theta} = \frac{\pi^2\, 0{,}033\, \delta^2 \Gamma(7/6)}{8\kappa_2^4}\varkappa_m^{7/3} \int_0^L dx C_n^2(x)\,(L-x)^2\gamma^2 \times$$
$$\times\left[1 - {}_2F_1\left(7/12,\ 13/12;\ 1/2;\ -\frac{\varkappa_m^4 (L-x)^2\gamma^2}{\kappa_2^2}\right)\right]. \quad (5)$$

Для (5) рассмотрим два предельных случая:

а) случай «коротких» трасс, когда $\varkappa_n^2(L-x)\gamma \ll \kappa_2$, при этом

$$[1 - {}_2F_1(\cdots)] \approx \frac{91}{72}\cdot\frac{\varkappa_m^4 (L-x)^2\gamma^2}{\kappa_2^2};$$

б) случай «длинных» трасс, когда $\kappa_m^2(L-x)\gamma \gg \kappa_2$, при этом

$$[1 - {}_2F_1(\cdots)] \approx 1 - \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(13/12)\,\Gamma(-7/12)}\left(\frac{\varkappa_m^2 (L-x)\gamma}{\kappa_2}\right)^{-7/6}.$$

Нетрудно показать, что на «коротких» однородных ($C_n^2(x) = C_n^2$) трассах

$$\sigma^2_{\Delta\Theta} \simeq A\frac{\delta^2 \varkappa_m^{19/3} C_n^2 L^5}{\kappa_2^6}, \quad (6)$$

где $A = \frac{91}{5/6}\pi^2 0{,}033\Gamma(7/6)$.

Выражение (6) преобразуется в

$$\sigma^2_{\Delta\Theta} = A\left(\frac{\delta}{\kappa_2}\right)^2 (\varkappa_m^{1/3} C_n^2 L)\left(\frac{\varkappa_m^2 L}{\kappa_2}\right)^4, \quad (7)$$

которое подтверждает, что $\sigma^2_{\Delta\Theta} \ll 1$ $\sigma^2_{\Delta\Theta} \ll \sigma^2_{\Delta\Theta}$ – дисперсии вариаций эйконала на одной длине волны.

Для «длинных» трасс

$$\sigma^2_{\Delta\Theta} \simeq \frac{\pi^2\, 0{,}033\, \Gamma(7/6)}{8}\left(\frac{\varkappa_m^2 L}{\kappa_2}\right)^{7/6} (\delta/\kappa_2)^2\, (\kappa_2^{7/6} C_n^2 L^{11/6}). \quad (8)$$

Чтобы $\sigma^2_{\Delta\Theta}$ было мало ($\ll 1$), даже при условии ($\varkappa_m^2(L-x)\gamma \gg \kappa_2$), необходимо потребовать малость $(\delta/\kappa_2)^2$, а также малость флуктуаций интенсивности ($\kappa^{7/6}C_n^2 L^{11/6} \ll 1$).

Второй вариант, когда $\kappa_1 \gg \kappa_2$, наиболее интересен. В подынтегральном выражении (1) произведем замену

$$\left\{\cos\frac{\varkappa^2(L-x)\gamma}{2\kappa_1}-\cos\frac{\varkappa^2(L-x)\gamma}{2\kappa_2}\right\}^2\approx 2\left(1-\cos\frac{\varkappa^2(L-x)\gamma}{2\kappa_2}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\varkappa^2(L-x)\gamma}{\kappa_2}\right). \tag{9}$$

Получим

$$\sigma^2_{\Delta\Theta}=2\pi^2\int\limits_0^L dx\int\limits_0^\infty d\varkappa\varkappa\Phi_n(\varkappa)\left\{2\left(1-\cos\frac{\varkappa^2(L-x)\gamma}{2\kappa_2}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\varkappa^2(L-x)\gamma}{\kappa_2}\right)\right\}. \tag{10}$$

Вычисления в (10) приводят к следующему выражению:

$$\sigma^2_{\Delta\Theta}=2\pi^2\,0{,}033\,\varkappa_m^{-5/3}\Gamma(-5/6)\int\limits_0^L dx C_n^2(x)\left\{\left[1-{}_2F_1\left(-5/12,\ 1/12;\ 1/2;\ -\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{\varkappa_m^4(L-x)^2\gamma^2}{4\kappa_2^2}\right)\right]-\frac{1}{4}\left[1-{}_2F_1\left(-5/12,\ 1/12;\ 1/2;\ -\frac{\varkappa_m^4(L-x)^2\gamma^2}{\kappa_2^2}\right)\right]\right\} \tag{11}$$

Проанализируем (11) как в области „коротких”, так и в области „длинных” трасс. Для „коротких” трасс ($\varkappa_m^2(L-x)\gamma\ll\kappa_2$) в (11) член в первом приближении по $\varkappa_m^4(L-x)^2\gamma^2/\kappa_2^2$ дает нуль и только член с ($\varkappa_m^4(L-x)^2\gamma^2/\kappa_2^2$)^2 обеспечивает ненулевой вклад. В этом случае для однородной трассы

$$\sigma^2_{\Delta\Theta}=\mathrm{B}\varkappa_m^{19/3}\kappa_2^{-4}C_n^2L^5, \tag{12}$$

где

$$\mathrm{B}=\pi^2\,0{,}033\,(-\Gamma(-5/6)/16)\cdot\frac{5\cdot7\cdot13}{141\cdot144\cdot3}.$$

Преобразуя (12), получаем

$$\sigma^2_{\Delta\Theta}=\mathrm{B}\left(\frac{\varkappa_m^2L}{\kappa_2}\right)^4(\varkappa_m^{-5/3}C_n^2L)\ll1,$$

так как $\varkappa_m^2L\ll\kappa_2$; $C_n^2L\varkappa_m^{-5/3}$ – структурная функция фазы на внутреннем масштабе турбулентности (это тоже малый член).

Проведя асимптотический анализ в (11), $\sigma^2_{\Delta\Theta}$ для длинных трасс, когда $\varkappa_m^2(L-x)\gamma\gg\kappa_2$, запишется в виде

$$\sigma^2_{\Delta\Theta}=C\cdot C_n^2L^{11/6}\kappa_2^{-5/6}, \tag{13}$$

где

$$C=\frac{2\pi^3\,0{,}033\,(-\Gamma(-5/6))}{\Gamma(1/12)\,\Gamma(11/12)}\,[2^{-5/6}-2^{-2}].$$

Если сравнить $\sigma^2_{\Delta\Theta}$ из (13) с дисперсией вариаций эйконала σ^2_Θ, то оказывается, что

$$\frac{\sigma^2_{\Delta\Theta}}{\sigma^2_\Theta}=0\left[\frac{C_n^2L^{11/6}\kappa_2^{-5/6}}{C_n^2L\varkappa_0^{-5/3}}\right]=0\left[\left(\frac{\varkappa_0^2L}{\kappa_2}\right)^{5/6}\right]\ll1,$$

где $\varkappa_0^{-1}$ — внешний масштаб турбулентности [3, 5]. Для реальных значений внешнего масштаба турбулентности $\varkappa_0^2 L \ll \kappa_2$.

Более точные расчеты дисперсии разности эйконалов $\sigma^2_{\Delta\Theta}$ для варианта δ (когда $(\kappa_1 \gg \kappa_2)$ приводят к выражению

$$\sigma^2_{\Delta\Theta} = 2\pi^2\, 0{,}033 \int\limits_0^L dx C_n^2(x) \left\{ \varkappa_m^{-5/3} \Gamma(-5/6) \left(\left[1 - {}_2F_1 \left(-5/12,\ 1/12;\ 1/2;\ - \frac{\varkappa_m^4 (L-x)^2 \gamma^2}{4\kappa_2^2} \right) \right] - \frac{1}{4} \left[1 - {}_2F_1 \left(-5/12,\ 1/12;\ 1/2;\ - \frac{\varkappa_m^4 (L-x)^2 \gamma^2}{\kappa_2^2} \right) \right] \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{(L-x)^2 \gamma^2 \varkappa_n^{7/3}}{4\kappa_1^2} \cdot \frac{2^{1/6} \Gamma(7/12) \Gamma(13/12)}{\Gamma(1/2) \Gamma(-5/6)} \left[{}_2F_1 \left(7/12,\ 13/12;\ 1/2;\ - \frac{\varkappa_m^4 (L-x)^2 \gamma^2}{4\kappa_2^2} \right) - 1 \right] \right\},$$

в котором последнее слагаемое в фигурных скобках зависит от κ_1.

Нетрудно показать, что на „коротких" трассах ($\varkappa_m^2 L \ll \kappa_2$, а так как $\kappa_1 \gg \kappa_2$, то $\varkappa_m^2 L \ll \kappa_1$) членом, зависящим от κ_1 можно пренебречь. На „длинных" трассах ($\varkappa_m^2 L \gg \kappa_1, \varkappa_m^2 L \gg \kappa_2$)

$$\sigma^2_{\Delta\Theta} = A\Gamma(-5/6) \int\limits_0^L dx C_n^2(x) \left\{ \left(\frac{(L-x)\gamma}{\kappa_2} \right)^{5/6} \left[(2^{-5/6} - 2^{-2}) - \right. \right.$$
$$\left. \left. - \frac{2^{1/6} \Gamma(7/12) \Gamma(13/12)}{\Gamma(1/2) \Gamma(-5/6)} \left(\frac{\varkappa_m^2 (L-x)\gamma}{2\kappa_1} \right)^{7/6} \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)^{5/6} \right] \right\}.$$

Таким образом, чтобы можно было пренебречь членом, зависящим от κ_1 и необходимо, чтобы

$$\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \sim \left(\frac{2\kappa_1}{\varkappa_m^2 (L-x)\gamma} \right)^{-7/5} \gg 1.$$

Это действительно выполняется при условии $\kappa_1 \gg \kappa_2$.

Следовательно, практически во всех случаях (и когда длины волн λ_1 и λ_2 — близки по своим значениям, и когда они значительно отличаются друг от друга (т.е. $\kappa_1 \gg \kappa_2$) как на «коротких», так и на «длинных» трассах в условиях атмосферной турбулентности) дисперсия разности эйконалов $\sigma^2_{\Delta\Theta}$ существенно меньше, чем дисперсия эйконала на любой из длин волн σ^2_Θ. По-видимому, область применимости этих результатов соответствует возможности описания вариаций эйконалов на обеих длинах волн на основе метода плавных возмущений [3]. Однако следует отметить, что это условие не слишком ограничивает диапазон длин волн.

Такое поведение $\sigma^2_{\Delta\Theta}$ для различных волн при их распространении в турбулентной атмосфере обеспечивает высокую эффективность двухцветных адаптивных оптических систем [2], в которых измерения фазовых искажений проводятся на одной длине волны, а коррекция искажений — на другой длине волны. Ранее уделялось внимание разностной случайной рефракции двух оптических длин волн при их распространении в атмосфере [6]. Вопросам частотной зависимости флуктуации фазы (или эйконала) и их разности [1, 2, 7] стали уделять внимание особенно в связи с развитием теории атмосферных адаптивных систем. В частности, ряд работ [7, 8], на наш взгляд, содержит принципиальные ошибки в расчетах $\sigma^2_{\Delta\Theta}$. При этом делается вывод, что при большом частотном сдвиге (например, λ_1 = 0,5 мкм, λ_2 = 10,6 мкм) взаимная корреляция эйконалов на этих длинах волн исчезает и $\sigma^2_{\Delta\Theta}$ представляет собой сумму дисперсий эйконалов каждой из волн.

Как показывают наши расчеты, $\sigma^2_{\Delta\Theta}$ зависит от величин L/κ_2, $\delta = \kappa_1 - \kappa_2$ и $\varkappa_m^2 L/\kappa_2$, где κ_2 — меньшее из волновых чисел.

1. Lukin V.P.//Optics Letters. 1979. V. 4. № 1. P. 15–17.
2. Зуев В.Е., Коняев П.А., Лукин В.П.//Изв. вузов. Физика. 1985. № 11. С. 6–29.
3. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере/Гурвич А.С., Кон А.И., Миронов В.Л. и др. М.: Наука. 1976. 277 с.

4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука. 1971. 1074 с.
5. Lukin V.P., Pokasov V.V.//Appl. Optics. 1981. V. 20. № 1. P. 121–135.
6. Зуев В.Е., Кабанов М.В. Перенос оптических сигналов в земной атмосфере. М.: Сов. радио. 1977. 368 с.
7. Hogge C.B., Butts R.R.//J. Opt. Soc. Amer. 1982. V. 72. № 5. P. 606–609.
8. Winocur J.//Appl. Optics. 1983. V. 22. № 23. P. 3711–3715.

Институт оптики атмосферы
СО АН СССР, Томск

Поступила в редакцию
18 мая 1988 г.

V.P. Lukin. **On the Variance of the Eikonal Difference for Different Wave Frequencies**.

A two-color adaptive optical system is studied wherein the feedback loop is closed via the atmosphere by means of a reference source whose operating wavelength is different from the basic frequency. The variance of the eikonal difference for two spherical (or plane) waves with different optical frequencies is calculated for a number of atmospheric turbulence conditions.