<Оптика атмосферы и океана>, **7**, N 9 (1994)

УДК 535.36

Л.Е. Парамонов

СЕЧЕНИЯ ОСЛАБЛЕНИЯ, РАССЕЯНИЯ ХАОТИЧЕСКИ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЧАСТИЦ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

С помощью метода *T*-матриц в представлении [1] получены аналитические выражения для сечений ослабления и рассеяния хаотически ориентированных частиц произвольной формы через элементы *T*-матрицы.

В настоящее время при исследовании характеристик светорассеяния несферическими частицами широко используется метод *T*-матриц, разработанный Уотерменом [2, 3] как для идеальных проводников [2], так и для диэлектрических частиц [3]. Метод основан на применении принципа Пуанкаре – Гюйгенса [4]. Альтернативное обоснование метода с использованием принципа эквивалентности Щелкунова [5], согласно которому рассеянное поле индуцируется эквивалентной системой поверхностных токов, приводится в [1]. В отмеченных случаях падающее и рассеянное поля разлагаются в ряд по векторным сферическим гармоникам [6] с соответствующим волновым числом $k = 2\pi/\lambda$:

$$\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \sum_{\sigma\,mn} D_{mn}\,[a_{\sigma\,mn}\,\mathrm{Rg}\,\mathbf{M}_{\sigma\,mn}(k\,r) + b_{\sigma\,mn}\,\mathrm{Rg}\,\mathbf{N}_{\sigma\,mn}(k\,r)],$$
$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = \sum_{s\,mn} D_{mn}\,[\,p_{\sigma\,mn}\,\mathbf{M}_{\sigma\,mn}(k\,r) + q_{\sigma\,mn}\,\mathbf{N}_{\sigma\,mn}(k\,r)],\;\; r > r_0, \tag{1}$$

где $D_{mn} = (2 - \delta_{m0})\dfrac{(2\,n + 1)\,(n - m)!}{4\,n\,(n + 1)\,(n + m)!}$, δ_{m0} – символ Кронекера; $\mathrm{Rg}\,\mathbf{M}_{\sigma mn}$, $\mathrm{Rg}\,\mathbf{N}_{\sigma mn}$, $\mathbf{M}_{\sigma mn}$, $\mathbf{N}_{\sigma mn}$, – линейно независимые решения вектор-волнового уравнения Гельмгольца в сферической системе координат [6], при этом различающиеся использованием сферических функций Бесселя $j_n(kr)$ и Ханкеля $h_n^{(1)}(kr)$ первого рода соответственно; r_0 – радиус описанной сферы рассеивающей частицы; $\sigma = o,\ e$.

Коэффициенты разложения (1) связаны линейным соотношением [1]

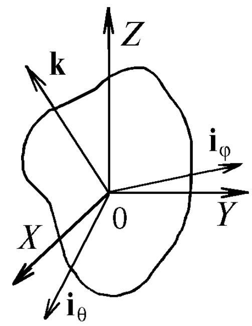
$$\begin{bmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{T}^{11} & \mathbf{T}^{12}\\ \mathbf{T}^{21} & \mathbf{T}^{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{bmatrix}. \tag{2}$$

В настоящей статье приведен вывод формулы для сечения рассеяния ансамбля хаотически ориентированных частиц произвольной формы. Сечение рассеяния произвольно ориентированной частицы имеет вид [7]

$$C_{\mathrm{scat}} = \frac{\pi}{k^2}\sum_{\sigma\,=\,\mathrm{o},e}\;\sum_{n=1}^{\infty}\;\sum_{m=0}^{n} D_{mn}\,\{\,|p_{\sigma\,mn}|^2 + |q_{\sigma\,mn}|^2\}. \tag{3}$$

Выберем произвольную правую систему координат с геометрией распространения излучения, представленной на рисунке. Пусть направление распространения падающего излучения определяется волновым вектором **k**, имеющим в сферической системе координат сферические углы θ и φ. Для неполяризованного падающего излучения сечение рассеяния ($C_{\mathrm{scat}}(\theta,\ \varphi)$) в этом случае равно полусумме соответствующих сечений рассеяния для двух линейных и взаимно ортогональных $\mathbf{i}_\theta$-, $\mathbf{i}_\varphi$-поляризаций падающего излучения. Отметим, что единичный вектор направления распространения падающего излучения и единичные векторы $\mathbf{i}_\theta$, $\mathbf{i}_\varphi$ являются ортами в сферической системе координат. Учитывая вышеизложенное, искомая величина сечения рассеяния хаотически ориентированных частиц может быть получена в результате интегрирования по всем равновероятным направлениям распространения падающего излучения. Считая, что положение частицы в системе координат фиксировано,

$$<C_{\text{scat}}> = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\,\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\,\theta\, C_{\text{scat}}(\theta, \varphi). \tag{4}$$



Геометрия распространения падающего излучения

Используя представление аффинора плоской электромагнитной волны через вектор-волновые сферические гармоники [6], получим выражения для коэффициентов разложения (1) падающей плоской волны [8] при $\mathbf{i}_\theta$-поляризации

$$\begin{aligned} a_{\substack{o\\e}mn} &= 4\, i^n\, m\, Q_n^m(\cos\theta) \begin{matrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{matrix}, \\ b_{\substack{o\\e}mn} &= 4\, i^{n-1}\, S_n^m(\cos\theta) \begin{matrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{matrix}, \end{aligned} \tag{5}$$

при $\mathbf{i}_\varphi$-поляризации

$$\begin{aligned} a_{\substack{o\\e}mn} &= -\,4\, i^n\, S_n^m(\cos\theta) \begin{matrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{matrix}, \\ b_{\substack{o\\e}mn} &= \mp\, 4\, i^{n-1}\, m\, Q_n^m(\cos\theta) \begin{matrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{matrix}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $S_n^m = dP_n^m(\cos\theta)/d\theta$, $Q_n^m = P_n^m(\cos\theta)/\text{in}\theta$, P_n^m – присоединенные функции Лежандра.

Вычисляя значение подынтегральной функции (4), равное полусумме сечений рассеяния при $\mathbf{i}_\theta$- и $\mathbf{i}_\varphi$-поляризации падающего излучения, используя при этом (2) и (3), после интегрирования, где использованы ортогональность системы функций $\sin m\varphi$, $\cos m\varphi$, а также соотношения

$$\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\,\theta\, [S_n^m\, Q_{n'}^m + Q_n^m\, S_{n'}^m] = 0, \tag{7}$$

$$\int_0^{2\pi} d\,\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\,\theta \left[\begin{matrix}\cos^2 m\varphi\\ \sin^2 m\varphi\end{matrix}\, S_n^m\, S_{n'}^m + m^2\, \begin{matrix}\sin^2 m\varphi\\ \cos^2 m\varphi\end{matrix}\, Q_n^m\, Q_{n'}^m\right] = \begin{matrix}\pi\, \delta_{nn'}\, D_{mn}^{-1}\\ \pi\,(1-\delta_{m0})\, \delta_{nn'}\, D_{mn}^{-1}\end{matrix},$$

получим

$$<C_{\text{scat}}> = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{\sigma,\sigma'=o,e} \sum_{i,j=1}^{2} \sum_{mnm'n'} (1-\delta_{\sigma o}\,\delta_{m'0})\, D_{mn}\, D_{m'n'}^{-1}\, \left|T^{ij}_{\sigma mn\sigma' m'n'}\right|^2. \tag{8}$$

Для осесимметричных частиц формула (4) упрощается до одномерного интеграла. Полагая $\varphi = 0$, с учетом $T^{ij}_{\mathrm{s}\ mnsm'n'} = \delta_{mm'}\ T^{ij}_{\mathrm{s}\ mnsm'n'}$ и

$$\int_0^\pi \sin\theta\, d\,\theta\ [S^m_n\, S^m_{n'} + m^2\, Q^m_n\, Q^m_{n'}] = (2 - \delta_{m0})\ \delta_{nn'}\ D^{-1}_{mn} / 2,$$

получим [9]:

$$<C_{\mathrm{scat}}> = \frac{\pi}{k^2} \sum_{\sigma\ ,\sigma = o,e}\ \sum_{i,j=1}^{2}\ \sum_{mnn'}\ (2 - \delta_{m0})\, D_{mn}\, D^{-1}_{m'n'}\ \left| T^{ij}_{\sigma\ mnsmn'} \right|^2. \tag{9}$$

Следует отметить, что разложение (1) не единственно возможное. Различные системы векторных сферических гармоник (как правило, это линейная комбинация линейно независимых решений вектор-волнового уравнения Гельмгольца [6]), по которым разлагаются в ряд падающее и рассеянное поля, порождают различные представления метода T-матриц и как следствие различные расчетные формулы. Например, использованные в [10] сферические гармоники отличаются от рассмотренных в настоящей статье множителем $D^{1/2}_{mn}$, в этом случае в формулах (1), (3), (8), (9) будут отсутствовать нормировочные константы D_{mn}. Наиболее удобное представление метода T-матриц дано в [11], где используются системы гармоник $\mathbf{M}_{\sigma mn}$ и $\mathbf{N}_{\sigma mn}$, каждая из которых при вращении системы координат преобразуется независимо [12]. Используя метод T-матриц в представлении [11], автор [13] путем интегрирования интенсивности рассеянного излучения в полном телесном угле 4π получил формулу, аналогичную (8).

Используя формулу, аналогичную (3), для сечения ослабления [7]

$$C_{\mathrm{ext}} = -\frac{\pi}{k^2}\,\mathrm{Re} \sum_{\sigma = o,e}\ \sum_{n=1}^{\infty}\ \sum_{m=0}^{n} D_{mn}\ [a^*_{\mathrm{s}\ mn}\, p_{\sigma\ mn} + b^*_{\sigma\ mn}\, q_{\sigma\ mn}] \tag{10}$$

и следуя вышеизложенной схеме, получим

$$<C_{\mathrm{ext}}> = -\frac{2\pi}{k^2}\,\mathrm{Re} \sum_{\sigma = o,e}\ \sum_{mn} (1 - \delta_{\sigma\ o}\ \delta_{m0})\ [T^{11}_{\sigma\ mn\,\sigma\ mn} + T^{22}_{\sigma\ mn\,\sigma\ mn}]. \tag{11}$$

Отметим, что аналогичная формула дана в [14], где использованы оптическая теорема и метод T-матриц в представлении [11].

Полученные формулы могут быть использованы для оценки сечений светорассеяния хаотически ориентированных эллипсоидальных частиц [15].

1. Barber P.W., Yeh C. // Appl. Opt. 1975. V. 14. P. 2864 –2872.
2. Waterman P.C. // Proc. IEEE. 1969. V. 53. P. 805 – 812.
3. Waterman P.C. // Phys. Rev. D. 1971. V. 3. P. 825 – 839.
4. Handbuch der Physik. Berlin: Springer-Verlag. 1961. Bd 25/1.
5. Schelkunoff S.A. Electromagnetic waves. N.-Y.: D. van Nostrande. 1943. 530 p.
6. Стрэттон Ж.А. Теория электромагнетизма. М.: ГИТТЛ. 1948. 539 с.
7. Парамонов Л.Е., Лопатин В.Н. Рассеяние света несферическими частицами (алгоритм, методика расчетов, программы). Красноярск. 1987. 50 с. (Препринт / Институт физики СО АН СССР).
8. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. М.: ИЛ, 1958. Т. 2. 886 с.
9. Парамонов Л.Е., Лопатин В.Н. //Оптика и спектроскопия. 1990. Т. 69. С. 632 – 634.
10. Peterson B., Strom S. // Phys. Rev. D. 1974. V. 10. P. 2670 – 2684.
11. Tsang L., Kong J.A., Shin R.T. // Radio Sci. 1984. V. 19. P. 629 – 642.
12. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца и их применения. М.: ГИТТЛ, 1958. 368 с.
13. Мищенко М.И. // Кинематика и физика небесных тел. 1991. Т. 7. С. 93 – 95.
14. Mischenko M.I. // Astrophys. Space Sci. 1990. V. 164. P. 1 – 13.
15. Schneider J.B., Peden I.C. //IEEE Trans. Antennas Propag. 1988. V. 36. P. 1317 – 1321.

Институт биофизики
СО РАН, Красноярск

Поступила в редакцию
18 апреля 1994 г.

L. E. Paramonov. **Extinction and Scattering Cross Sections of Randomly Oriented Particles of Arbitrary Shapes.**

By use of the T-matrix method in the representation of Ref. [1], the analytical expression for an extinction and scattering cross sections of randomly oriented particles of arbitrary shape is presented.