

А.А. Кохановский

ГЕОМЕТРООПТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ СЕЧЕНИЯ ПОГЛОЩЕНИЯ ДВУХСЛОЙНОГО ШАРА

Получена и проанализирована простая геометрикооптическая формула для сечения поглощения двухслойного шара. Отдельно рассмотрен случай частиц с непоглощающими оболочками. При оценке границ применимости приближения использовались результаты расчетов по строгой теории рассеяния для двухслойных частиц.

В последнее время все большее внимание привлекает проблема рассеяния света неоднородными частицами [1–2]. В ряде случаев (многослойные шары, шары с определенными типами радиальной неоднородности показателя преломления и т. д.) получены строгие решения соответствующих проблем рассеяния. Вместе с тем расчеты по строгим формулам оказываются достаточно сложными и не всегда доступными при проведении прикладных исследований. Это особенно характерно для крупных рассеивателей. В связи с вышесказанным особую ценность имеет разработка приближенных подходов к решению указанной проблемы.

Целью работы является исследование свойств сечения поглощения двухслойного шара методом лучевой оптики. При этом используется вариант геометрикооптического подхода, основанный не на сложении полей, а на сложении интенсивностей. Этим самым осуществляется усреднение интерференционной структуры. Заметим, что такого рода усреднение происходит в большинстве реальных дисперсных сред за счет полидисперсности или немонахроматичности падающего излучения.

Пусть на частицу с радиусом ядра a и оболочки b падает плоская волна с длиной λ ($\lambda \ll a, b - a$). При этом предполагается, что окружающая среда прозрачна, а вещество ядра и оболочки может быть поглощающим ($m_e = n_e - ik_e$ — относительные комплексные показатели преломления ядра ($e = 1$) и оболочки ($e = 2$)). Представим падающее на частицу излучение как совокупность пучков лучей, характеризующихся углом падения φ и величинами разброса по азимутальному углу dX и углу падения $d\varphi$ [3–4]. Тогда для потока энергии dP_0 , падающего на элемент площади частицы $dS = b^2 \sin\varphi d\varphi dX$, получим

$$dP_0 = I_0 \cos \varphi dS, \quad (1)$$

где I_0 — интенсивность падающего излучения. При этом часть поглощенной частицей энергии пучка $dE_{\text{погл}}$ может быть записана в виде

$$dE_{\text{погл}} = F(\varphi) dP_0, \quad (2)$$

где функция $F(\varphi)$ подлежит определению. Рассчитаем ее. Как показано на рис. 1, в точке A поверхности двухслойной частицы падающий луч делится на отраженный наружу и преломленный внутрь. При этом относительная доля энергии, пропущенной границей, равна $1 - R$ (R — френелевский коэффициент отражения по мощности для первой границы раздела). При распространении луча вдоль $[AB]$ часть энергии поглощается, причем ее относительная доля равна $1 - \exp(-f)$ ($f = k_2 |AB|$, $k_2 = \frac{4\pi k_2}{\lambda}$). Для луча, падающего на шар в точке C , относительная доля поглощенной энергии равна $1 - \exp(-p)$ ($p = k_1 d_1 + 2k_2 d_2$, $d_1 = |DM|$, $d_2 = |CD| = |MN|$, $k_1 = \frac{4\pi k_1}{\lambda}$). Разумеется, в точках D, M, N, B появля-

ются также и отраженные лучи. Однако, как показывают специальные оценки, в первом приближении их вкладом можно пренебречь (частицы с большими значениями показателей преломления m_1 и m_2 здесь не рассматриваются). Исключение может составить лишь область с $n_1 < n_2$ и эффектом полного внутреннего отражения (ПВО) излучения ядром. Здесь и далее будем считать, что $k_l \ll n_l$ ($l = 1, 2$). Тогда ослабление ПВО за счет поглощения пренебрежимо мало и можно ввести действительный критический угол падения ϵ_c : $\sin \epsilon_c = n_1/n_2$. Лучи, падающие на ядро под углами большими критического, испытывают эффект ПВО и относительная доля поглощенной энергии в этом случае равна $1 - \exp(-s)$, где $s = 2 k_2 d_2$ (многократными переотражениями пренебрегаем).

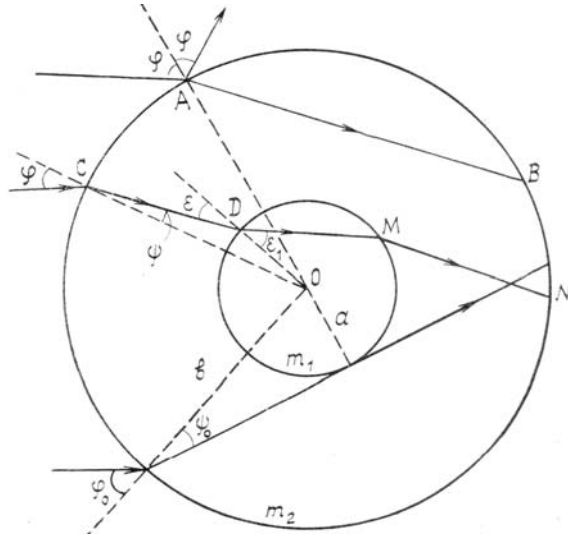


Рис. 1. Ход преломленных лучей в двухслойной частице

Из вышесказанного следует, что приближенно

$$F(\varphi) = (1-R)(1-e^{-\gamma}), \quad (3)$$

где $\gamma = p, s, f$ в зависимости от места входа луча в частицу.

Подставляя (3) в (2) и суммируя все падающие лучи для поглощенной энергии $E_{\text{погл}}$, получим

$$E_{\text{погл}} = \int dE_{\text{погл}} = \pi b^2 J_0 \left\{ \int_0^{\varphi_c} (1-R)(1-e^{-p}) \sin 2\varphi d\varphi + \int_{\varphi_c}^{\varphi_0} (1-R)(1-e^{-s}) \sin 2\varphi d\varphi + \int_{\varphi_0}^{\pi/2} (1-R)(1-e^{-f}) \sin 2\varphi d\varphi \right\}, \quad (4)$$

где φ_c — угол падения луча на частицу, соответствующий критическому углу ϵ_c , φ_0 — граничный угол падения, соответствующий лучу, касающемуся ядра в одной точке (см. рис. 1). Очевидно, что при $\varphi > \varphi_0$ лучи, падающие на частицу с ядром, не взаимодействуют. Из тригонометрических тождеств и закона Снеллиуса (см. рис. 1) следует: $\sin \varphi = n_2 \sin \Psi$, $\sin \epsilon = b/a \sin \Psi$, $\sin \epsilon_1 = n_2 \sin \epsilon / n_1$, $\sin \Psi_0 = a/b = v$. Откуда легко получить

$$\varphi_0 = \arcsin(n_2 v), \quad \varphi_c = \arcsin(n_1 v). \quad (5)$$

Таким образом, при $n_2 v \geq 1$ граничного угла φ_0 не существует: все лучи фокусируются на ядре и третий интеграл в (4) исчезает. При $n_2 = 2$ и $n_2 = 4/3$ это соответствует параметрам $v \geq 1/2$ и $v \geq 3/4$. При $n_2 \leq 1$ граничный угол φ_0 существует при любых v . Заметим, что если $n_1 < n_2$, то критический угол φ_c , как следует из (5), не зависит от материала оболочки. А если $n_1 v \geq 1$, то угол φ_c не существует и второй интеграл в (4) исчезает. То же самое имеем и при $n_1 > n_2$: тогда в (4) следует считать $\varphi_c = \varphi_0$.

Вводя новую переменную интегрирования $\sigma = \sin^2 \varphi$, из (4) для сечения поглощения двухслойного шара $S_{\text{погл}} = E_{\text{погл}}/J_0$ легко получить:

$$S_{\text{погл}} = \pi b^2 \left[\int_0^{\beta} (1-R)(1-e^{-p}) d\sigma + \int_{\beta}^{\beta_2} (1-R)(1-e^{-s}) d\sigma + \int_{\beta_2}^1 (1-R)(1-e^{-f}) d\sigma \right], \quad (6)$$

где

$$\beta_1 = (n_1 v)^2, \quad \beta_2 = \min(1, (n_2 v)^2), \quad \beta = \min(\beta_1, \beta_2),$$

$$R = \frac{1}{2} (|r_1|^2 + |r_2|^2), \quad r_e = (V\sqrt{1-\sigma} - N_e \eta) / (V\sqrt{1-\sigma} + N_e \eta), \quad \eta = V\sqrt{1-\sigma/n_2^2},$$

$N_1 = n_2$, $N_2 = n^{-1}$. Зависимости $p(\sigma)$, $s(\sigma)$, $f(\sigma)$ могут быть получены из применения закона Снеллиуса и тригонометрических тождеств (см. рис. 1):

$$p(\sigma) = f(\sigma) + 4\rho_1(x_1\eta_1 - x_2\eta_2), \quad s(\sigma) = f(\sigma) - 4x_2\eta_2\rho_1, \quad f(\sigma) = 4x_2\rho_2\eta_1,$$

где

$$\eta_e = \sqrt{1 - \sigma/(n_e v)^2}, \quad \rho_1 = 2\pi a/\lambda, \quad \rho_2 = 2\pi b/\lambda.$$

Заметим, что вторым интегралом в (6) в большинстве случаев можно пренебречь. Тогда приближение (6) отличается от приближения аномальной дифракции (ПАД) [3, 5, 6] лишь тем, что учитывается искривление лучей в частице и отражение от оболочки. При $n_1 \rightarrow n_2$, $n_2 \rightarrow 1$ преломлением и отражением на поверхностях раздела можно пренебречь и выражение (6) переходит в соответствующую форму ПАД.

Рассмотрим асимптотики (6) в области сильных и слабых поглощений. При $\kappa_2\rho_2 \rightarrow \infty$ ($\rho_1 = \text{const}$) из (6) следует, что

$$C_{\text{погл}} = [1 - r(n_2)]S, \quad S = \pi b^2, \quad (7)$$

причем интеграл $r(n_2) = \int_0^1 R d\sigma$ рассчитан аналитически в [7]. Асимптотика (7) имеет ясный физический смысл: поглощается все излучение, проникшее внутрь частицы. В области слабых поглощений легко получить:

$$C_{\text{погл}} = \frac{3V}{2} (k_1 z_1 v + k_2 z_2), \quad (8)$$

где $z_1 = \int_0^{\rho_1} (1 - R)\eta d\sigma$, $z_2 = \int_0^1 (1 - R)\eta d\sigma - v \int_0^{\rho_2} (1 - R)\eta_2 d\sigma$; V — объем частицы.

Из (8) следует, что объемный коэффициент поглощения $K_{\text{погл}} = C_{\text{погл}}/V$ не зависит от размера частицы. Данная закономерность в области слабых поглощений прослеживается и для несферических частиц [6]. В то же время в области сильных поглощений, как следует из (7), величина $K_{\text{погл}}$ уменьшается с ростом размера рассеивателя:

$$K_{\text{погл}} = (1 - r)S/V, \quad (9)$$

где $r = \int_0^1 R d\sigma$. Заметим, что формула (9) справедлива и для несферических частиц, если под r понимать долю энергии, отраженной частицей в окружающую среду. Величина r в этом случае будет зависеть от ориентации частицы в поле падающей волны, формы частицы и т.д.

Остановимся более подробно на важном случае двухслойных частиц с непоглощающими оболочками ($\kappa_2 = 0$). Если непоглощающая оболочка является достаточно мягкой ($|m_2 - 1| \ll 1$), то при расчете сечения поглощения ее можно вообще не учитывать: все определяется сечением поглощения ядра [6]. Если же оболочка жесткая, то, как показывает анализ результатов численных расчетов по строгой теории, с увеличением ее размера ($a = \text{const}$) величина $C_{\text{погл}}$ стремится к некоторому асимптотическому значению [8, 9]. Значение параметра $v_{\text{ас}} = a/b$, при котором достигается эта асимптотика, могут быть получены из простых физических рассуждений. На ядро фокусируются лучи с углами падения $\varphi \leq \varphi_0$, где угол φ_0 определен в (5). Если $n_2 v > 1$, то все падающие лучи фокусируются на ядро. При уменьшении v ($a = \text{const}$) параметр $n_2 v$ уменьшается и появляются лучи, которые не фокусируются оболочкой на ядро. В качестве граничного условия, очевидно, следует принять: $n_2 v_{\text{ас}} = 1$. Откуда $v_{\text{ас}} = n_2^{-1}$, что подтверждается и строгими расчетами.

В заключение сравним результаты расчетов факторов эффективности поглощения $Q_{\text{погл}} = C_{\text{погл}}/\pi b^2$ с использованием строгой теории [2] и формулы (6). Расчеты проводились на ЭВМ БЭСМ-6 по алгоритму [2] при $n_1 = 1,0; 1,34; 1,5; 1,6$; $\kappa_1 = 10^{-4}; 10^{-3}; 10^{-2}$; $n_2 = 1,34; 1,5; 1,6; 2,0$; $\kappa_2 = 0; 10^{-4}; 10^{-3}; 10^{-2}$; $v = 0,5(0,1)0,9$; $\rho_2 = 2(1)200$. Одновременно рассчитывались величины $Q_{\text{погл}}$ в ПАД [5, 6]. Из анализа результатов расчетов можно сделать следующие выводы. Формула (6) удовлетворительно описывает сечение поглощения двухслойной частицы. Например, при $a \geq 12\lambda$ (рис. 2, а) и $a \geq 8\lambda$ (рис. 2, б) погрешность расчетов величины $C_{\text{погл}}$ не превосходит десяти процентов. В других исследованных случаях погрешность не превышала 20% при $a \sim 7 \div 12\lambda$. Это свидетельствует о том, что приближение (6) может быть применено и в области не очень крупных ядер, где использование метода лучевой оптики проблематично. Как и следовало ожидать, точность (6) ухудшается при уменьшении толщины оболочки (в первую очередь для непоглощающих ядер). В литературе иногда встречаются высказывания, что приближение аномальной дифракции [10] применимо и для достаточно жестких частиц (вплоть до значений показателя преломления $n \sim 2$). Например, в [10] такой вывод делается на осно-

ве сравнения факторов эффективности ослабления, рассчитанных с использованием ПАД и строгих формул для двухслойных частиц. Из анализа рис. 2, а, б видно, что для факторов эффективности поглощения это правило не выполняется. Например, при $\rho_2 \geq 60$ (рис. 2, а) и $\rho_2 \geq 20$ (рис. 2, б) относительная погрешность ПАД ~ 50 процентов (формулы (6) — менее 20%). Как видно из приведенных рисунков, кривые поглощения $Q_{\text{погл}}(\rho_2)$ характеризуются мелкомасштабной рябью, не описываемой в рамках приближения (6). Это связано с неучетом интерференции полей внутри капли.

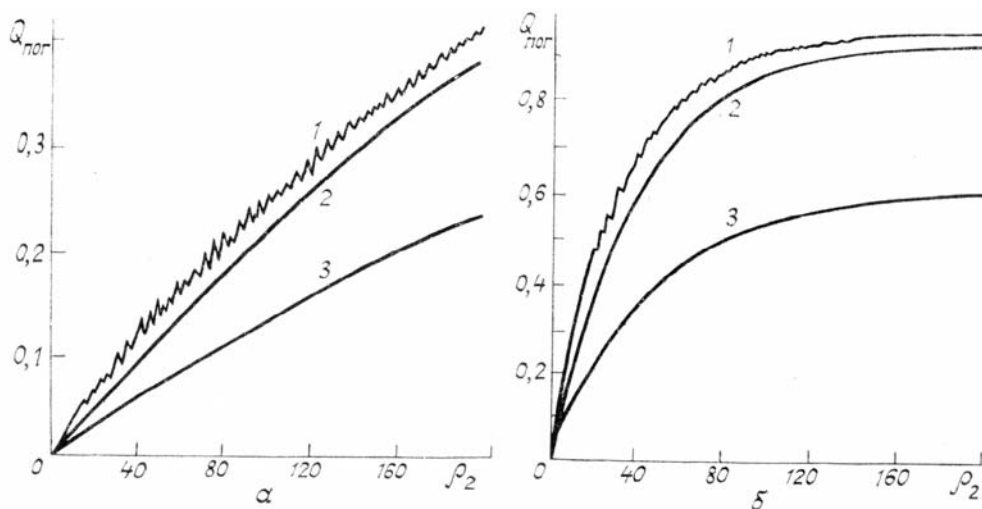


Рис. 2. Зависимость фактора эффективности поглощения $Q_{\text{погл}}$ двухслойной частицы от параметра дифракции ρ_2 (1 — расчет по строгой теории, 2 — с использованием формулы (6), 3 — ПАД [5–6]) при $n_1 = 1,5$, $n_2 = 1,34$, $\nu = 0,8$: а — $\kappa_1 = 10^{-3}$, $\kappa_2 = 10^{-4}$; б — $\kappa_1 = 10^{-2}$, $\kappa_2 = 0$

Учитывая, что в геометрическом пределе сечение ослабления $C_{\text{осл}} = 2\pi b^2$, на основе (6) легко получить и альбедо частицы $\Lambda = 1 - C_{\text{погл}}/C_{\text{осл}}$. На рис. 3 приведено сопоставление величин Λ , рассчитанных в приближении аномальной дифракции, геометрической оптики и по строгой теории для двухслойных частиц. Из анализа рисунка следует, что относительная погрешность простой геометрической формулы для альбедо Λ в рассматриваемом случае менее 5%, если $\rho_2 \geq 2$. На практике более важным параметром является величина $1 - \Lambda$, погрешность расчета которой в рассматриваемом случае менее 10% при $\rho_2 > 28$.

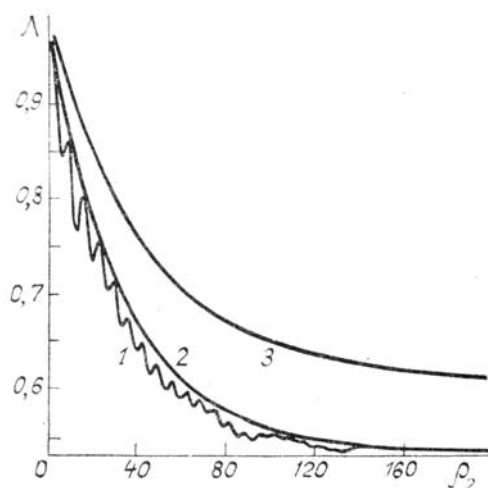


Рис. 3. Зависимость альбедо двухслойной частицы Λ от параметра дифракции ρ_2 (1 — расчет по строгой теории, 2 — с использованием формулы (6), 3 — ПАД [5–6]) при $n_1 = 1,5$, $n_2 = 1,34$, $\kappa_1 = 10^{-2}$, $\kappa_2 = 0$, $\nu = 0,9$

Результаты работы могут быть использованы при проведении различных оценок и расчетов в области параметров дифракции ρ_2 , где вычисления по строгой теории затруднены.

Автор признателен Л.Г. Астафьевой и Э.П. Зеге за ряд ценных советов и замечаний.

1. Schuerman D. W. (ed.) Light Scattering by Irregularly Shaped Particles. N. Y.: Plenum Press, 1980. 334 p.

2. Пришивалко А.П., Бабенко В.А., Кузьмин В.Н. Рассеяние и поглощение света неоднородными и анизотропными сферическими частицами. Минск: Наука и техника, 1984. 263 с.
3. Ван де Хюлст Г. Рассеяние света малыми частицами. М.: ИЛ, 1961. 536 с.
4. Зеге Э.П., Кохановский А.А. //Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1988. Т. 24. № 7. С. 698—702.
5. Лопатин В.Н., Сидько Ф.Я. Введение в оптику взвесей клеток. М.: Наука, 1988. 239 с.
6. Зеге Э.П., Кохановский А.А. //Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1990. В печати.
7. Acquista Ch., Cohen A., Cooney J.A., Wimp J. //JOSA, 1980. V. 70. № 8. P. 1023—1025.
8. Fenn R.N., Oser H. //Appl. Opt. 1965. V. 4. № 11. P. 1504—1509.
9. Пришивалко А.П., Астафьева Л.Г. Поглощение, рассеяние и ослабление света обводненными частицами атмосферного аэрозоля. Минск, 1975. 46 с. (Препринт/Ин-т физики АН БССР).
10. Chen T. W. //Appl. Opt. 1987. V. 26. № 19. P. 4155—4158.

Институт физики АН БССР,
Минск

Поступила в редакцию
20 апреля 1989 г.

A. A. Kokhanovskii. Geometrical Optics Approximation to Calculate the Absorption Cross-Section of a Two-Layer Sphere.

A simple geometrical formula for a two-layer sphere has been obtained and analyzed. The case of particles with non-absorbing shells is considered separately. In evaluating the limits of applicability of the approximation, we used the results of the calculations according to the rigorous theory of scattering for two-layer particles.