«Оптика атмосферы и океана», **18,** № 9 (2005)

УДК 530.145.6

В.В. Колосов, В.О. Троицкий

Параксиальное приближение для задачи распространения пучков в плоскослоистой среде

Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск

Поступила в редакцию 9.06.2005 г.

Рассмотрена задача о распространении лазерного пучка в среде, показатель преломления которой является одномерной функцией, меняющейся вдоль продольной оси пучка. Показано, что использование параксиального приближения позволяет свести данную задачу к решению хорошо известного параболического уравнения, но с коэффициентом диффузии, зависящим (через показатель преломления) от продольной координаты. Указанный результат является следствием упрощения строгого решения и не зависит в широких пределах от формы и величины функции показателя преломления. Приводится ряд выражений, полезных для практического использования достаточно общих результатов, составляющих основу настоящей работы.

Введение

Проблема распространения акустических и электромагнитных волн в неоднородных средах исследуется достаточно давно. Результаты этих исследований для широкого круга практических приложений обобщены в ряде фундаментальных монографий [1–4].

Поскольку в общем случае строгое решение волнового уравнения для поля в неоднородной среде отыскать не удается, то для проведения теоретических исследований, как правило, привлекаются различные упрощенные методы. По-видимому, наиболее отработанным среди них является приближение геометрической оптики, подробнейшим образом изложенное в [1]. Отметим, что и в рамках указанного приближения аналитическое решение задачи удается получить только для некоторых частных видов неоднородности среды (см., например, [4]).

Если приближение геометрической оптики не работает – учет дифракции является обязательным (например, если речь идет о распространении лазерного излучения), то задачу обычно пытаются свести к скалярному уравнению Гельмгольца с волновым числом $k = (\omega / c) n(\mathbf{r})$, зависящим от координат, которое затем решают, как правило, численными методами. Следует заметить, что такое упрощение будет оправданным только в том случае, если слагаемое (см. [1])

$$\mathrm{grad}[\mathbf{E}\,\mathrm{grad}(\ln n^2)] \qquad (\text{B}.1)$$

окажется пренебрежимо малым, как, например, в задачах, связанных со случайно-неоднородными средами [2], для которых почти всегда выполняется с хорошей точностью

$$n(\mathbf{r}) = n_0 + \Delta n(\mathbf{r}), \quad \Delta n(\mathbf{r}) / n_0 << 1\,. \qquad (\text{B}.2)$$

В настоящей статье рассматривается также задача о распространении лазерного пучка, но уже в сплошной среде, показатель преломления которой зависит только от одной координаты (например, z), совпадающей с направлением распространения пучка. Такие среды (их иногда называют «гринами») интересны и сами по себе [5], и в своих частных вариациях, например: плоскослоистая среда, среда с периодической структурой и, наконец, простейший случай – показатель преломления является ступенчатой функцией. Последняя ситуация характерна для тех задач, в которых речь заходит о фокусировке лазерного пучка в различного рода прозрачные объекты. Если в качестве такого объекта выбрать анизотропный нелинейный кристалл, то область применения предлагаемых результатов естественным образом расширяется на такой практически важный раздел нелинейной оптики, каким является теория генерации гармоник лазерного излучения.

Собственно, основная цель настоящей работы и состоит в попытке построения некой базовой модели, позволяющей, по возможности строго, учесть влияние преломления и продольной неоднородности нелинейного кристалла на параметры второй гармоники. В связи с этим линейные поля в изотропной среде, с которыми мы будем иметь дело, предлагается рассматривать в качестве совершенно необходимого нулевого приближения указанной нелинейной задачи.

Алгоритм расчетов выглядит следующим образом. Сначала записывается строгое решение задачи о распространении лазерного пучка в плоскослоистой среде, у которой границы раздела слоев перпендикулярны продольной оси пучка. Затем пучок объявляется слабо расходящимся (параксиальным, т.е. с узким угловым спектром и медленно меняющейся амплитудой), на основании чего упомянутое строгое решение существенно упрощается. После этого осуществляется предельный переход к ситуации, когда толщина каждого слоя стремится к нулю. Этот предел и представляет собой общее решение задачи, сформулированной в заглавии настоящей статьи. В разд. 2 в качестве иллюстрации (представляющей определенный практический интерес) к общим рассуждениям рассматривается задача о фокусировке лазерного пучка в ограниченную неоднородную среду.

1. Общее решение задачи

Пусть показатель преломления среды зависит только от одной координаты $n(\mathbf{r}) = n(z)$. При этом для $z < 0$ значение показателя преломления постоянно и равно n_0. Пусть для $z > 0$ функция $n(\mathbf{r}) = n(z)$ является кусочно-постоянной, принимающей значения n_i в пределах слоя $h\,(i-1) < z < hi$ (h – толщина слоя, i – его номер). Границами раздела данных слоев являются плоскости $z = hi$, для которых введем поперечные векторы $\boldsymbol{\rho}_i$, определяющие положение точки на данной плоскости. Задача распространения излучения в такой среде сводится к повторяющейся последовательности решения задачи преломления на входной границе каждого слоя и задачи распространения излучения в пределах слоя.

Задача преломления оптического поля на плоской границе раздела двух сред имеет известное решение [1] для плоских волн. В любой плоскости распространения оптической волны комплексная амплитуда поля U может быть представлена в виде разложения по угловому спектру плоских волн

$$U(z,\boldsymbol{\rho}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2\boldsymbol{\kappa}\,\hat{U}(z,\boldsymbol{\kappa})\exp[i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\rho}], \tag{1}$$

где $\hat{U}(z,\boldsymbol{\kappa})$ – амплитуда плоской волны; $\boldsymbol{\kappa}$ – поперечная к оси распространения составляющая волнового вектора данной волны.

Так как связь амплитуды поля и его углового спектра является взаимно однозначной, то задача отыскания связи между амплитудой поля $U(z,\boldsymbol{\rho})$ в произвольной плоскости распространения с граничным полем $U_0(0,\boldsymbol{\rho}_0)$, падающим на среду, может быть сведена к задаче отыскания связи между угловыми спектрами данных полей.

Пусть $\hat{U}(z_{i-1},\boldsymbol{\kappa})$ представляет собой спектр поля, падающего на границу раздела слоев $z = h(i-1)$. Тогда для спектра непосредственно после этой границы (уже в другом слое) обычным образом получаем

$$\hat{U}_0(z_{i-1},\boldsymbol{\kappa}) = T(z_{i-1},\boldsymbol{\kappa})\hat{U}(z_{i-1},\boldsymbol{\kappa}) = T_{i-1}(\boldsymbol{\kappa})\hat{U}(z_{i-1},\boldsymbol{\kappa}), \tag{2}$$

где $T_{i-1}(\boldsymbol{\kappa})$ – коэффициент преломления Френеля плоской волны.

Слой между плоскостями $z = h\,(i-1)$ и $z = hi$ (i-й слой) по условию задачи является однородной средой с показателем преломления n_i. Следовательно, в пределах этого слоя поле U обязано удовлетворять однородному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta U + k^2 n_i^2 U = 0, \tag{3}$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число в вакууме.

В силу этого, используя (2) в качестве граничного условия, для спектра поля в конце i-го слоя находим его зависимость от спектра поля в конце предыдущего слоя:

$$\hat{U}(z_i,\boldsymbol{\kappa}) = T_{i-1}(\boldsymbol{\kappa})\hat{U}(z_{i-1},\boldsymbol{\kappa})\exp\left(ih\sqrt{k^2n_i^2 - \boldsymbol{\kappa}^2}\right). \tag{4}$$

Рекуррентная формула (4) позволяет связать спектр поля на выходе из слоя с номером N и спектр поля на входе в плоскослоистую среду. После несложных преобразований имеем

$$\hat{U}(z_N,\boldsymbol{\kappa}) = \left(\prod_{i=1}^{N} T_{i-1}(\boldsymbol{\kappa})\right)\hat{U}(0,\boldsymbol{\kappa})\exp\left(ihk\sum_{i=1}^{N} n_i\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{\kappa}^2}{k^2n_i^2}}\right), \tag{5}$$

где

$$\hat{U}_0(0,\boldsymbol{\kappa}) = (2\pi)^{-2}\iint_{-\infty}^{+\infty} d^2\boldsymbol{\rho}_0\,U_0(0,\boldsymbol{\rho}_0)\exp\left[-i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\rho}_0\right]. \tag{6}$$

Подставляя (5) в (1), получаем решение для амплитуды поля в конце N-го слоя:

$$U(z_N,\boldsymbol{\rho}_N) = \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2\boldsymbol{\kappa}\,\hat{U}(0,\boldsymbol{\kappa})\left(\prod_{i=1}^{N} T_{i-1}(\boldsymbol{\kappa})\right)\times$$
$$\times\exp\left[i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\rho}_N + ihk\sum_{i=1}^{N} n_i\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{\kappa}^2}{k^2n_i^2}}\right]. \tag{7}$$

Отметим, что до сих пор мы не использовали никаких ограничений, но при выводе (7) не учитывалось переотражение волн. То есть не учитывался факт того, что волны, отраженные от границ раздела, при обратном распространении испытывают отражения и вновь распространяются вперед.

В дальнейших своих рассуждениях воспользуемся условием малоуглового (параксиального) приближения. Рассмотрим случай, когда ось пучка совпадает с осью OZ, т.е. рассмотрим нормальное падение пучка на границу раздела сред. Далее будем считать, что в пределах ширины углового спектра пучка коэффициент преломления изменяется мало. Кроме этого, используем стандартное условие параксиального приближения и положим, что подкоренное выражение в экспоненте выражения (7) мало отличается от единицы, т.е. используем следующие приближения:

$$T_{i-1}(\boldsymbol{\kappa}) \cong T_{i-1}(0); \tag{8}$$

$$\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{\kappa}^2}{k^2n_i^2}} \cong 1 - \frac{\boldsymbol{\kappa}^2}{2k^2n_i^2}. \tag{9}$$

В этом случае решение (7) преобразуется к виду

$$U(z_N,\rho_N) \cong \left(\prod_{i=1}^{N} T_{i-1}(0)\right)\exp\left[ihk\sum_{i=1}^{N} n_i\right]\times$$

$$\times\iint_{-\infty}^{+\infty} d^2\kappa\hat{U}_0(0,\kappa)\exp\left[i\kappa\rho_N - ih\frac{\kappa^2}{2k}\sum_{i=1}^{N} n_i^{-1}\right]. \quad (10)$$

Выражение (10) представляет собой решение задачи распространения в слоистой среде в малоугловом (параксиальном) приближении.

Полученное решение позволяет осуществить предельный переход от слоистой среды к среде с непрерывным распределением показателя преломления. Разобьем каждый слой на M слоев шириной $\Delta z = h/M$. Переход к непрерывной среде осуществляется при стремлении M к бесконечности. Очевидно, что суммирования в экспонентах преобразуются в этом случае в интегралы по дистанции.

Рассмотрим, к чему преобразуется произведение коэффициентов преломления при данном предельном переходе. Для нормального падения плоской волны на границу раздела коэффициент преломления Френеля имеет вид [1]:

$$T_{i-1}(0) = \frac{2n_{i-1}}{n_{i-1}+n_i} = \frac{2n_{i-1}}{n_{i-1}+n_{i-1}+\Delta n_{i-1}} = \frac{1}{1+0{,}5\dfrac{\Delta n_{i-1}}{n_{i-1}}}. \quad (11)$$

Полагая, что i-й слой достаточно узкий, чтобы воспользоваться равенством

$$\frac{\Delta n_{i-1}}{n_{i-1}} \cong \frac{1}{n(z_{i-1})}\frac{dn}{dz}h,$$

и разбивая его на M слоев, для произведения коэффициентов преломления слоев, образованных внутри i-го слоя, можем записать выражение

$$\lim_{M\to\infty}\prod_{j=1}^{M} T_{i-1}(0) = \lim_{M\to\infty}\left[1+0{,}5\frac{1}{n(z_{i-1})}\frac{dn}{dz}\frac{h}{M}\right]^{-M} =$$

$$= \exp\left[-0{,}5\frac{1}{n(z_{i-1})}\frac{dn}{dz}h\right]. \quad (12)$$

Тогда для произведения коэффициентов преломления всех слоев получаем

$$\lim_{M\to\infty}\prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{M} T_{i-1}(0) = \exp\left[-0{,}5\int_0^{z_N} dz\frac{1}{n(z)}\frac{dn}{dz}\right] =$$

$$= \exp\left[-0{,}5\left(\ln n(z_N) - \ln n(0)\right)\right] = \sqrt{\frac{n(0)}{n(z_N)}}. \quad (13)$$

Следовательно, для непрерывной среды решение (10) преобразуется к виду

$$U(z,\rho) = \sqrt{\frac{n(0)}{n(z)}}\exp\left[ik\int_0^z dz n(z)\right]\times$$

$$\times\iint_{-\infty}^{+\infty} d^2\kappa\hat{U}_0(0,\kappa)\exp\left[i\kappa\rho - i\frac{\kappa^2}{2k}\int_0^z\frac{dz}{n(z)}\right] =$$

$$= \sqrt{\frac{n(0)}{n(z)}}\exp\left[ik\int_0^z dz n(z)\right]\times$$

$$\times\frac{k}{2\pi i\tilde{z}}\iint_{-\infty}^{+\infty} d^2\rho_0\, U(0,\rho_0)\exp\left[-ik\frac{(\rho-\rho_0)^2}{2\tilde{z}}\right], \quad (14)$$

где $\tilde{z} = \displaystyle\int_0^z \frac{dz}{n(z)}$.

Если рассмотреть ситуацию, когда на границу раздела $z = 0$ падает плоская волна, то из (14) следует решение

$$U(z,\rho) = \sqrt{\frac{n(0)}{n(z)}}\exp\left[ik\int_0^z dt\, n(t)\right] \equiv U_e(z). \quad (15)$$

Данное решение в точности совпадает с так называемым эталонным решением задачи распространения плоской волны в слоистых средах [3]. Для ограниченного пучка решение (14) можно представить в виде

$$U(z,\rho) = U_e(z)U_p(z,\rho), \quad (16)$$

где

$$U_p(z,\rho)\frac{k}{2\pi i\tilde{z}}\iint_{-\infty}^{+\infty} d^2\rho_0\, U(0,\rho_0)\exp\left[-ik\frac{(\rho-\rho_0)^2}{2\tilde{z}}\right]. \quad (17)$$

Решение (16) получено нами как предельный переход от плоскослоистой среды к непрерывной среде. Покажем, при каких условиях данное решение может быть получено непосредственно из уравнений Максвелла для среды с показателем преломления, зависящим от одной координаты z.

Поскольку мы имеем дело с параксиальным пучком, то решение уравнений Максвелла для вектора, например электрической напряженности поля, будет вполне оправданным искать в виде

$$E(z,\rho) = \mathbf{e}U(z,\rho), \quad (18)$$

где $\mathbf{e}$ — постоянный, единичный вектор поляризации, перпендикулярный к оси Z ($\mathbf{ek} = 0$, $\mathbf{k}$ — орт оси Z).

Подставляем (18) в волновое уравнение общего вида [1,4], учитываем, что вектор grad(n) в нашем случае направлен вдоль $\mathbf{k}$ (следовательно, слагаемое (В.1) обращается в нуль) и после умножения на $\mathbf{e}$ приходим к скалярному уравнению Гельмгольца

$$\Delta U + k^2 n^2(z)U = 0. \quad (19)$$

Решение (19) ищем в виде

$$E(z,\rho) = U_e(z)U_p(\mu^2 z, \mu\rho), \qquad (20)$$

где U_e и U_p — неизвестные пока функции; $\mu \ll 1$ — малый параметр, по порядку величины совпадающий с расходимостью пучка.

Подставляем (20) в (19), ограничиваемся учетом слагаемых вплоть до второго порядка малости по μ и в результате получаем

$$U_p\left[\nabla^2 U_e + k^2 n^2 U_e\right] + 2\nabla U_e \nabla U_p + U_e \nabla_\perp^2 U_p = 0. \qquad (21)$$

Выберем в качестве функции U_e точное решение задачи о распространении в рассматриваемой нами среде плоской волны, направленной вдоль оси Z, т.е. точное решение уравнения (19). В силу этого выражение в квадратных скобках из (21) обращается в нуль и мы приходим к уравнению

$$2\nabla U_e \nabla U_p + U_e \nabla_\perp^2 U_p = 0. \qquad (22)$$

Следуя [3], функцию U_e представим следующим образом:

$$U_e(z) = \sqrt{n(0)}\exp\left[ik\int_0^z dt\, n(t)\,\varphi(t)\right], \qquad (23а)$$

где

$$\varphi(z) = 1 + \frac{i}{kn}\ln(n^{1/2})' + \frac{1}{2k^2}\frac{(n^{-1/2})''}{n^{3/2}} + \frac{1}{n}\sum_{\nu=3}^{\infty}\frac{\xi_\nu}{k^\nu}, \qquad (23б)$$

функции ξ_ν конкретизируются в [3]. Предположим, что выполняются условия

$$1 \gg \frac{i}{kn^2}\frac{\partial n}{\partial z} \gg \frac{1}{2k^2}\frac{(n^{-1/2})''}{n^{3/2}} \gg \frac{1}{n}\sum_{\nu=3}^{\infty}\frac{\xi_\nu}{k^\nu}. \qquad (24)$$

Тогда, ограничиваясь нулевым членом разложения (23б), получаем приближенно

$$\nabla U_e = \mathbf{k}\,(ikn)\varphi(z)U_e \cong \mathbf{k}\,(ikn)U_e. \qquad (25)$$

Подставляя (25) в (22), получаем параболическое уравнение

$$2ikn(z)\frac{\partial U_p}{\partial z} + \nabla_\perp^2 U_p = 0, \qquad (26)$$

точным решением которого является (17).

Сохраняя в (23б) два первых слагаемых, убеждаемся, что в этом случае функция U_e из (20) превращается в эталонное решение (15). Таким образом, результаты и того, и другого способов решения тождественно совпадают при исполнении условий (24).

2. Фокусировка пучка в плоскослоистую среду

Общее решение вышеобозначенной задачи мы уже получили в разд. 1 настоящей статьи; это интеграл (17). Таким образом, нам остается только конкретизировать вид граничного условия (задать функцию $U(0,\rho_0)$ и вид функции $n(z)$.

Пусть при $z = 0$ задано граничное условие

$$U(0,\rho) = A_0\exp\left[-\frac{\rho_0^2}{a^2} - ik\frac{\rho_0^2}{2f}\right], \qquad (27)$$

где A_0, a, f — вещественные константы; $k = 2\pi/\lambda$.

Условие (27) определяет гауссов пучок радиусом a, сфокусированный тонкой линзой (фокусное расстояние f) и записанный в параксиальном (параболическом) приближении для плоскости $z = 0$. Этот частный случай мы выбрали только из соображений простоты — интегралы в (17) вычисляются точно.

Рассматриваем среду, показатель преломления которой для всех $z > 0$ представим в следующем виде:

$$n(z) = \begin{cases} 1, \text{ если } z < z_N,\ z > z_k, \\ n(z), \text{ если } z_N \le z \le z_k, \end{cases} \qquad (28)$$

где $n(z) \ge 1$; $z_k = z_N + L$.

Иными словами, будем иметь дело с неоднородной средой, которая представляет собой бесконечный слой толщиной L, заключенный между плоскостями $z = z_N$ и $z = z_k$. Вне этого «неоднородного слоя» среда считается вакуумом.

Следует отметить, что указанные выше исходные условия задачи являются достаточно типичными для теории генерации гармоник лазерного излучения (единственно, что в рамках последней в качестве неоднородной среды выступает нелинейный анизотропный кристалл длиной L). А поскольку строгий учет неоднородности кристалла (в том числе и продольной) представляет большой практический интерес [6], то приводимые в данном разделе результаты следует рассматривать, в первую очередь, применительно как раз к упомянутым задачам нелинейной оптики. Во «Введении» мы это уже отмечали.

Подставляем (27) в (17), выполняем интегрирование и получаем выражение для сфокусированного гауссова пучка в любой точке полупространства $z > 0$. Это решение отличается от хорошо известного [4], полученного для однородной среды (по этой причине мы его здесь не приводим), только тем, что теперь вместо $k = 2\pi n/\lambda$ следует использовать $k = 2\pi/\lambda$, а вместо z

$$\tilde{z} = \int_0^z \frac{dt}{n(t)}. \qquad (29)$$

С учетом (28) для (29) находим

$$\tilde{z} = \begin{cases} z\ , \text{ если } z < z_N, \\ z_N + \varphi(\Delta), \text{ если } z_N \le z \le z_k, \\ z - L + \varphi(L), \text{ если } z > z_k, \end{cases} \qquad (30)$$

где

$$\varphi(\Delta) = \int_{z_N}^{z} \frac{dt}{n(t)} = \int_{0}^{z-z_N} \frac{dt}{n(t+z_N)} = \int_{0}^{\Delta} \frac{dt}{n'(t)};\ 0 \le \Delta \le L$$

— расстояние, которое пучок проходит в неоднородной среде; $n'(t) = n(t + z_N)$.

Определить, используя (30), как будут зависеть параметры гауссова пучка от конкретного вида функции $n'(t)$, — труда не составляет, и результаты расчетов подобного сорта мы здесь рассматривать не будем. Значительно более целесообразным нам показалось привести ряд выражений, полезных в плане решения задач о фокусировке лазерного пучка в кристалл.

Отметим прежде всего, что по крайней мере для гауссова пучка продольная неоднородность среды никак не сказывается на величину его минимального поперечного радиуса $a_{\min}$, который определяется хорошо известным [4] выражением

$$a_{\min} = \frac{aD_f}{\sqrt{1 + D_f^2}}, \tag{31}$$

где $D_f = 2f / ka^2$.

В то же время само положение плоскости перетяжки ($z = z_p$) зависит от выбора функции $n'(t)$ весьма сильно. Остановимся на этом моменте чуть подробнее.

Расстояние $z_p = z_{p0}$ от линзы до плоскости перетяжки гауссова пучка в вакууме равно [4]:

$$z_{p0} = \frac{f}{1 + D_f^2}. \tag{32}$$

В нашем случае для величины z_p, используя (30), получаем уравнение

$$\int_{0}^{z_p} \frac{dt}{n(t)} = z_{p0}. \tag{33}$$

В качестве иллюстрации для (33) обратимся к простейшей ситуации — $n'(t) = n_0$. При этом из (33) находим

$$z_p = \begin{cases} z_{p0}, \text{ если } z_{p0} < z_N, \\ z_N + (z_{p0} - z_N)n_0, \text{ если } z_N \le z_{p0} \le z_N + L, \\ z_{p0} + L(1 - 1/n_0), \text{ если } z_{p0} > z_N + L. \end{cases} \tag{34}$$

Отметим, что результат (34) достаточно просто получить, рассматривая преломление отдельных геометрооптических лучей параксиального пучка на плоской границе раздела двух однородных сред.

Для практических расчетов часто необходимо знать решение следующей, в некотором роде обратной, задачи. Предположим, что изначально заданным является положение плоскости перетяжки $(-\infty \le \Delta_f \le \infty)$, отсчитываемое от входа в неоднородную среду. Спрашивается, на каком расстоянии от линзы (т.е. при каком z_N) должен располагаться слой неоднородной среды с тем, чтобы перетяжка оказалась в нужном месте? Для ответа на этот вопрос представляем z_p в виде

$$z_p = z_N + \Delta_f,$$

подставляем это выражение в (33), используем (30) и приходим к требуемому результату

$$z_N = \begin{cases} z_{p0} - \Delta_f, \text{ если } \Delta_f < 0, \\ z_{p0} - \varphi(\Delta_f), \text{ если } 0 \le \Delta_f \le L, \\ z_{p0} + L - \Delta_f - \varphi(L), \text{ если } \Delta_f > L. \end{cases} \tag{35}$$

Достаточно важной характеристикой сфокусированного пучка является так называемая длина перетяжки L_p, которую определим следующим образом:

$$L_p = -L_1 + L_2, \tag{36}$$

где L_1 и L_2 — расстояния, отсчитываемые от плоскости перетяжки, на которых радиус пучка возрастает в $m > 1$ раза по отношению к $a_{\min}$. Если z_p из (33) найдено, то для L_1 и L_2 получаем (для гауссова пучка, разумеется) следующие уравнения:

$$a\sqrt{\left(1 - \frac{z_{1,2}}{f}\right)^2 + \left(\frac{2z_{1,2}}{ka^2}\right)^2} = ma_{\min}, \tag{37}$$

где

$$z_1 = \int_{0}^{z_p + L_1} \frac{dt}{n(t)}, \quad z_2 = \int_{0}^{z_p + L_2} \frac{dt}{n(t)}.$$

В частном случае, когда $n'(t) = n_0$, а $L_p \le L$, из (37) следует, что

$$L_2 = -L_1 = n_0 z_{p0} D_f \sqrt{m^2 - 1}. \tag{38}$$

Для произвольных зависимостей $n(z)$ решение (37) легко получить численными методами. Эти расчеты мы здесь демонстрировать не будем, отметим лишь, что в общем случае форма каустики гауссова пучка уже не будет симметричной относительно плоскости перетяжки.

Заключение

Из представленных в настоящей статье результатов наиболее, на наш взгляд, интересным является следующий. Существует определенный набор исходных условий (вполне возможно, что единственный), использование которых позволяет свести задачу о распространении лазерного пучка в неоднородной среде к решению параболического уравнения. Причем, что весьма важно, точность достаточно простых аналитических выражений, определяющих конечный результат, не ухудшается при заведомом невыполнении условия (В.2). Выделим еще раз те моменты, которые определяют границы применимости предложенного подхода.

1. Показатель преломления среды зависит только от одной координаты, например z.

2. Производные от показателя преломления ограничены условиями (24).

3. Лазерное излучение распространяется в направлении оси Z.

4. Излучение имеет узкий угловой спектр (параксиальный пучок).

5. Преломление света на плоской границе раздела двух сред рассматривается в приближении нормального падения.

Нарушение любого из этих требований сводит на нет ту аргументированность использования различных приемов, которую авторы пытались тщательно отслеживать в процессе работы. С другой стороны, все перечисленные выше условия сами по себе оказываются достаточно типичными, что позволяет надеяться на определенный практический выход проведенного исследования. В этом плане основным итогом следует считать обобщение на рассматриваемый случай результатов, полученных при решении параболического уравнения для поля в однородной среде.

1. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. Изд. 2-е. М.: Наука, 1973. 719 с.
2. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Часть II. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 434 с.
3. *Бреховский Л.М.* Волны в слоистых средах Изд. 2-е. М.: Наука, 1973. 344 с.
4. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. Изд. 2-е. М.: Наука, 1990. 432 с.
5. *Вычислительная* оптика: Справочник / Под ред. М.М. Русинова. Л.: Машиностроение, 1984. 434 с.
6. *Дмитриев В.Г., Тарасов Л.В.* Прикладная нелинейная оптика. Изд. 2-е. М.: Физматлит, 2004. 512 с.

V.V. Kolosov, V.O. Troitskii. **Paraxial approximation for the problem of beam propagation in the plane-layer medium.**

We have considered the problem of laser beam propagation in the medium, whose index of refraction is a one-dimensional function varying along a longitudinal axis of the beam. It is shown that the use of the paraxial approximation makes it possible to reduce this problem to the solution of the well-known parabolic equation but with the diffusion coefficient depending (through the index of refraction) on the longitudinal coordinate. This result is a consequence of simplification of a rigorous solution and does not depend on the form and the value of the function of the index of refraction in a wide range. Equations useful for practical implementation of the rather common results forming the basis for this paper are presented.