В.Л. Вебер

ЧИСЛЕННЫЕ МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ УКЛОНОВ ВЕТРОВЫХ ВОЛН ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ ОПТИКИ МОРЯ

Разработаны простые численные сплайн-модели для пространственных корреляционных функций уклонов одномерного и изотропного морского ветрового волнения. Модели рассчитаны на основе модифицированного спектра Пирсона—Московица с обрезающей функцией гауссового вида. Параметр обрезания выбран исходя из требования согласия теоретически рассчитанного 4-го момента спектра и экспериментально измеренной величины дисперсии кривизн морской поверхности.

В теоретических исследованиях, посвященных проблеме видения, локации и связи через взволнованную морскую поверхность, важную роль играет правильный выбор корреляционных функций уклонов поверхности. Не следует, разумеется, отрицать правомочности использования приближенных моделей этих функций — особенно для выявления физической природы какого-либо оптического явления и для оценки роли того или иного фактора в процессе формирования оптического сигнала. Однако всегда в таких случаях остается потребность в проверке полученных результатов на основе достаточно строгой численной модели. Цель работы — построение строгих численных моделей пространственных корреляционных функций уклонов, удовлетворяющих определенным экспериментальным данным.

1. Спектр морского ветрового волнения

При решении многих задач статистической оптики моря авторами в последние годы успешно используются (см. например, [1, 2]) сплайн-модели пространственных корреляционных функций уклонов изотропного и одномерного ветрового волнения, полученные на основе модифицированного спектра Пирсона—Московица. Модификация спектра заключается во введении в его форму множителя в виде обрезающей гауссовой функции с параметрами, обеспечивающими согласие теоретических и экспериментально измеренных значений дисперсий уклонов и кривизн поверхности. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Выражение для частотного спектра Пирсона—Московица морского ветрового волнения имеет следующий вид:

$$S_0(\omega, \Theta) = \beta g^2 \omega^{-5} \exp[-0.74 (g/\omega v)^4] \varphi(\Theta),$$
 (1)

где ω – временная частота; $\varphi(\Theta)$ – угловая зависимость спектра $(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(\Theta)\,d\Theta$ = 1); ν – скорость

ветра;
$$g = 9.8 \text{ м/c}^2$$
; $\beta = 8.1 \cdot 10^{-3}$. Из соотношения

1394

 $S_0(\omega, \Theta) d\omega d\Theta = S_0(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$, где $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$; $d\mathbf{k} = dk_x dk_y$, следует

$$S_0(\mathbf{k}) = S_0[\omega(\mathbf{k}), \ \Theta(\mathbf{k})] \begin{vmatrix} \frac{\partial \ \omega}{\partial \ k_x} & \frac{\partial \ \omega}{\partial \ k_y} \\ \frac{\partial \ \Theta}{\partial \ k_x} & \frac{\partial \ \Theta}{\partial \ k_y} \end{vmatrix}.$$
 (2)

Используя дисперсионное соотношение для волн на воде Вебер В.Л.

$$\omega = \sqrt{g k}$$

где $k = |\mathbf{k}|$ и $\Theta = \operatorname{arctg}(k_y/k_x)$, из (2) получим выражение для спектра Пирсона–Московица в виде функции волнового числа \mathbf{k}

$$S_0(\mathbf{k}) = S_0[\omega(\mathbf{k}), \Theta(\mathbf{k})] \ 0.5 \ g^{1/2} k^{-3/2}. \tag{3}$$

Выражение (3) может быть записано в развернутом виде:

$$S_0(\mathbf{k}) = \beta/(2 k^4) \exp\left(-\alpha/k^2\right) \varphi\left(\operatorname{arctg} k_v/k_x\right),\tag{4}$$

где $\alpha = 0.74 \ g^2/v^4$.

Выражение (4) для спектра Пирсона–Московица записано в декартовых координатах. В полярных координатах оно имеет следующий вид:

$$S_0(k,\Theta) = \beta/(2 k^4) \exp(-\alpha/k^2) \varphi(\Theta), \tag{5}$$

(заметим, что элементом площади здесь служит $d\mathbf{k} = k \, dk \, d\Theta$).

Нетрудно убедиться в том, что выражения (1)–(5) нельзя использовать для вычисления дисперсий уклонов и кривизн волнения из-за обращения в бесконечность второго и четвертого интегральных моментов. Модифицируем спектр (5) введением обрезающей функции гауссового вида

$$S(k,\Theta) = S_0(k,\Theta) \exp\left(-\frac{k^2}{k_m^2}\right). \tag{6}$$

Вопрос о процедуре выбора параметра k_m обсуждался в [3], где предложен способ определения k_m , согласно которому теоретически определенное значение дисперсии уклонов (второй элемент спектра (6)) приравнивается соответствующей экспериментальной величине [4]. При внимательном анализе, однако, оказывается, что такая процедура не обеспечивает совпадения теоретического момента спектра с экспериментально измеренной дисперсией кривизн морской поверхности [5]. Дисперсия кривизн волнения играет важную роль в задачах оптики морской поверхности, и ошибка в ее определении, безусловно, нежелательна. Именно поэтому в основу метода определения k_m положен принцип согласия теоретической и экспериментальной оценок четвертого момента спектра волнения (дисперсии кривизн).

Будем использовать (в качестве базовых экспериментальных зависимостей) данные для дисперсии уклонов волнения $s_x^2(v)$, полученные Коксом, Манком [4], и данные для дисперсии кривизн $s_{xx}^2(v)$, полученные Бурцевым, Пелевиным [5]:

дисперсия уклонов ветровых волн

$$\sigma_x^2 = (3 + 1.92 \text{ v}) \cdot 10^{-3},$$
 (7)

дисперсия кривизн ветровых волн

$$\sigma_{xx}^2 = (-4.13 + 1.23 \text{ v})^2 \text{ m}^{-2}$$
(8)

(формула (8) справедлива при v > 3,5 м/с).

Вообще говоря, мы не располагаем точными сведениями относительно того, при каком угловом спектре волнения получены эти экспериментальные данные. Однако, поскольку дисперсии уклонов и кривизн определяются в основном высокочастотной частью спектра волнения, которая имеет распределение, близкое к изотропному, можно с определенной степенью достоверности отнести зависимости (7), (8) к статистически изотропному волнению.

Теоретические значения дисперсий уклонов и кривизн статистически изотропной поверхности рассчитываются по формулам

$$\overline{\sigma}_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_x^2 S(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} S(k) k^3 dk, \tag{9}$$

$$\overline{\sigma}_{xx}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} k_x^4 S(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = \frac{3}{8} \int_{0}^{\infty} S(k) k^5 dk. \tag{10}$$

Подставляя в эти формулы выражение (6) для спектра волнения, получим в результате интегрирования

$$\overline{\sigma}_x^2 = (\beta/4) K_0 (2 k_m \sqrt{\alpha}),$$

$$\overline{\sigma}_{xx}^2 = (3/16) \beta k_m \sqrt{\alpha} K_1 (2 k_m \sqrt{\alpha}),$$

где $K_0(\bullet)$, $K_1(\bullet)$ — функции Макдональда.

При малых значениях аргумента функции Макдональда могут быть представлены асимптотическими зависимостями

$$K_0(x) \approx -\ln x, \quad K_1(x) \approx x^{-1}.$$
 (11)

При этом выражения для дисперсий уклонов и кривизн преобразуются к виду

$$\overline{\sigma}_x^2 = -\left(\beta/4\right) \ln\left(2 \, k_m^{-1} \sqrt{\alpha}\right),\tag{12}$$

$$\sigma_{xx}^2 = (3/32) \beta k_m^2$$
 (13)

Подставляя в левую часть соотношения (13) экспериментальную величину дисперсии кривизн, определим параметр k_m обрезающей функции в спектре волнения (6)

$$k_m = \sqrt{32 \,\sigma_{\rm v}^2/3 \,\beta}.\tag{14}$$

Для проверки справедливости допущения (11) проведен численный расчет дисперсии кривизн для модифицированного спектра с параметром обрезания (14). Оказалось, что в диапазоне скоростей ветра $4 \div 10$ м/с численная и экспериментальная оценки совпадают. Для того чтобы обеспечить совпадение теоретической и экспериментальной оценок дисперсий уклонов волнения, потребовалось несколько изменить параметр β . Наилучшее согласие оценок достигается при $\beta = 11,5 \cdot 10^{-3}$ (рис. 1).

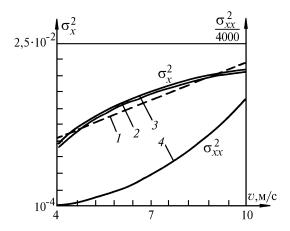


Рис. 1. Зависимости дисперсий уклонов σ_x^2 и кривизн σ_{xx}^2 от скорости ветра σ_x^2 : I – эксперимент (7), 2 – теория (12), 3 – теория (9); σ_{xx}^2 : 4 – эксперимент (8), теория (10), (13) (расхождение не более 1%)

Приведем сводку формул, описывающих модифицированный вариант спектра морского ветрового волнения Пирсона-Московица, в окончательном виде

$$S(\mathbf{k}) = S(k) \varphi(\Theta),$$

$$S(k) = (\beta/2 \ k^4) \exp(-\alpha/k^2 - k^2/k_m^2); \tag{15}$$

$$\alpha = 0.74 \ g^2/v^4; \ k_m^2 = \frac{32}{3} \frac{\sigma_{xx}^2}{\beta};$$

$$\sigma_{xx}^2 = (-4.13 + 1.23 \text{ v})^2; \quad \beta = 11.5 \cdot 10^{-3}.$$

1396 Вебер В.Л.

Перейдем к рассмотрению корреляционных функций уклонов морской поверхности. Так как в задачах оптики морской поверхности наиболее часто рассматриваются две (в определенном смысле альтернативные) модели волнения — изотропного и одномерного, то для каждой из них создадим численную модель простраственной функции корреляции уклонов.

2. Корреляционные функции уклонов изотропного волнения

Как известно, пространственная функция корреляции возвышений двумерной случайной поверхности определяется через ее пространственный спектр следующим образом:

$$M_{\zeta}(\mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\mathbf{k}) \cos \mathbf{k} \mathbf{p} \, d\mathbf{k}. \tag{16}$$

Для статистически изотропной поверхности ($\phi(\Theta) = 1/2\pi$) из (16) следует

$$M_{\zeta}(\rho) = \int_{0}^{\infty} S(k) J_0(k \, \rho) \, k \, dk, \tag{17}$$

где $\rho = |\rho|$; $J_0(\bullet)$ – функция Бесселя.

Корреляционные функции уклонов $M_x(\rho)$, $M_y(\rho)$, $M_{xy}(\rho)$ морской поверхности выражается в случае изотропного волнения через две общие функции M_1 и M_2 [6]:

$$M_{x}(\rho) = \rho_{x}^{2} M_{2}(\rho) + \rho_{y}^{2} M_{1}(\rho),$$

$$M_{y}(\rho) = \rho_{x}^{2} M_{1}(\rho) + \rho_{y}^{2} M_{2}(\rho),$$

$$M_{xy}(\rho) = \rho_{x} \rho_{y} [M_{2}(\rho) - M_{1}(\rho)],$$

где
$$M_1(\rho) = -(1/\rho) d/(d\rho) M_{\zeta}(\rho); M_2(\rho) = -d^2/(d\rho^2) M_{\zeta}(\rho).$$

Подставляя в соотношение для $M_{1,2}$ выражение (17), получим

$$M_1(\rho) = \frac{1}{\rho} \int_{0}^{\infty} k^2 S(k) J_1(k \, \rho) \, dk, \tag{18}$$

$$M_2(\rho) = \int_0^\infty k^2 S(k) J_0(k \, \rho) \, k \, dk - M_1(\rho). \tag{19}$$

Соотношения (18), (19) являются преобразованиями Фурье–Бесселя спектра статистически изотропного волнения. Расчет корреляционных функций M_1 , M_2 на основе спектра вида (15) проведен нами численным путем на персональном IBM-компьютере для нескольких значений скорости ветра (4; 6; 8 м/с). Полученный массив данных для каждого ρ описывает значения функций (18), (19) в более чем 200 точках (неэквидистантная последовательность) в диапазоне $\rho = 0 \div 270$ м. Для вычисления значений функций в промежутках между узлами нами использовался метод кубической сплайн-интерполяции [7]:

$$y(x) = y_i + a_i h_i [y_i' + a_i (c_i + a_i b_i)],$$
(20)

где

$$a_i = (x - x_i)/h_i; h_i = x_{i+1} - x_i;$$

$$b_i = y'_{i+1} - y'_i - 2(y_{i+1} - y_i)/h_i;$$

$$c_i = -b_i + (y_{i+1} - y_i)/h_i - y_i'$$
.

Вычисление производных сплайна осуществляется с помощью процедур прямой и обратной прогонки исходного массива значений функции [7]. Эти процедуры обеспечивают непрерывность не только первых, но и вторых производных в узлах сплайна. Автором этой статьи

проведена оптимизация массива данных, предназначенных для сплайн-интерполяции, в плане минимизации числа узлов и их оптимального расположения по координате р. Это позволило существенно сократить необходимое для интерполяции число узлов без потери точности определения значений функции. В табл. 1 приведены значения нормированных функций

$$R_1(\rho) = M_1(\rho)/\overline{\sigma}_x^2$$
, $R_2(\rho) = M_2(\rho)/\overline{\sigma}_x^2$

и их производных в узлах ρ_i при скорости ветра 6 м/с. Анализ показал, что использование этих данных в формуле (20) дает интерполяционную ошибку, не превышающую 1%.

Таблица 1

ρ, м	R_1	R_1'	ρ, м	R_2	R_1'
1	2	3	4	5	6
0,00+0	1,000 + 0	0,000 + 0	0.00 + 0	1,000 + 0	0,000 + 0
3,00-2	9,261 - 1	-3,487+0	3,00-2	8,171 - 1	-7,474+0
2,10-1	6,100 - 1	-7,928-1	6,00-2	6,672 - 1	-3,381+0
3,70-1	5,075-1	-5,110-1	1,30-1	5,179 - 1	-1,382+0
7,00-1	3,925-1	-2,456-1	3,30-1	3,470 - 1	-5,288 + 1
1,40+0	2,703 - 1	-1,241-1	5,50-1	2,556 - 1	-3,244-1
2,70+0	1,625 - 1	-5,559-2	8,00-1	1,904 - 1	-2,128-1
4,80 + 0	8,227 - 2	-2,545-2	1,25+0	1,162 - 1	-1,277-1
8,00 + 0	3,101-2	-9,442-3	2,00+0	4,615 - 2	-6,778-2
1,20+1	7,879 - 3	-3,112-3	2,90+0	5,929 - 4	-3,679-2
1,50 + 1	1,657 - 3	-1,260-3	3,00+0	-2,973-3	-3,455-2
1,60 + 1	5,803 - 4	-9,055-4	4,20+0	-3,170-2	1,554 - 2
1,70 + 1	-1,808-4	-6,307-4	5,80+0	-4,594-2	-3,867-3
2,00 + 1	-1,236-3	-1,416-4	9,00 + 0	-4,274-2	3,867 - 3
2,40+1	-1,254-3	8,132 - 5	1,30 + 1	-2,523-2	4,308 - 3
3,00 + 1	-6,143-4	1,048 - 4	1,60 + 1	-1,390-2	3,204 - 3
3,80 + 1	-5,957-5	3,746 - 5	2,20+1	-1,180-3	1,181 - 3
4,00 + 1	2,307 - 6	2,498 - 5	2,40 + 1	7,019 - 4	7,251-4
4,40 + 1	6,532 - 5	8,092 - 6	2,80 + 1	2,333 - 3	1,559 - 4
5,00 + 1	7,293 - 5	-3,231-6	3,40+1	2,072 - 3	-1,628-4
5,80 + 1	3,483 - 5	-4,923-6	4,00 + 1	1,004 - 3	-1,690-4
6,60 + 1	5,344 - 6	-2,423-6	4,60 + 1	2,007 - 4	-9,652-5
6,80 + 1	1,111 - 6	-1,825-6	4,80 + 1	3,283 - 5	-7,195-5
7,00 + 1	-2,013-6	-1,311-6	5,00 + 1	-8,934-5	-5,076-5
7,80 + 1	-6,447-6	3,430 - 9	6,00 + 1	-2,343-4	9,077 - 6
8,40 + 1	-5,232-6	3,313 - 7	6,60 + 1	-1,541-4	1,543 - 5
9,20+1	-2,367-6	3,338 - 7	7,40 + 1	-4,286-5	1,109 - 5
1,00 + 2	-3,173-7	1,768 - 7	7,80 + 1	-6,305-6	7,291-6
1,04 + 2	2,337 - 7	1,034 - 7	8,00 + 1	6,559 - 6	5,588 - 6
1,12 + 2	6,340 - 7	7,396 - 9	9,40 + 1	2,615-5	-1,175-6
1,20 + 2	5,108 - 7	-3,053-8	1,04 + 2	1,101-5	-1,506-6
1,24 + 2	3,838 - 7	-3,044-8	1,12 + 2	1,406 - 6	-8,726-7
1,28 + 2	2,559 - 7	-3,889-8	1,16 + 2	-1,416-6	-5,462-7
1,32 + 2	1,000 - 7	-2,685-8	1,32 + 2	-3,180-6	1,566 - 7
1,36 + 2	5,000 - 8	-8,099 - 9	1,36 + 2	-2,496-6	1,753 - 7
1,40 + 2	1,000 - 8	-8,250-9	1,40 + 2	-1,755-6	2,111-7
1,50 + 2	0,000 + 0	0,000 + 0	1,50 + 2	0,000 + 0	0,000 + 0

Величины в таблице представлены двумя числами, первое из которых означает мантиссу, а второе – порядок (например, число 1,40+2 соответствует числу $1,4\cdot 10^2; -9,652-5$ соответствует – $9,652\cdot 10^{-5}$).

3. Корреляционная функция уклонов одномерного волнения

В случае одномерного волнения $(\phi(\Theta) = \delta(\Theta))$ из выражения (16) получаем формулу для корреляционной функции возвышений морской поверхности

$$M_{\zeta}(\rho) = \int_{0}^{\infty} S(k) \cos k \, \rho \, k \, dk,$$

где $\rho = \rho_x$ – координата вдоль направления распространения волн.

1398 Вебер В.Л.

Отсюда нетрудно получить выражение для пространственной корреляционной функции уклонов поверхности:

$$M_{x}(\rho) = -\frac{d^{2}}{d\rho^{2}}M_{\zeta}(\rho) = \int_{0}^{\infty} k^{3} S(k) \cos k\rho \, dk. \tag{21}$$

Теоретические значения дисперсии уклонов и кривизн одномерного ветрового волнения могут быть вычислены по формулам:

$$\overline{\sigma}_x^2 = \int_0^\infty k^3 S(k) dk, \tag{22}$$

$$\sigma_{xx}^2 = \int_0^\infty k^5 S(k) dk. \tag{23}$$

Отметим, кстати, что величина дисперсии уклонов одномерного волнения превышает аналогичную величину для изотропного волнения в 2 раза, а величина дисперсии кривизн одномерного волнения превышает соответствующую величину для изотропного волнения в 8/3 раз. В этом нетрудно убедиться, сравнивая выражения (9) и (22), (10) и (23).

Таблица 2

ρ, м	R_x	R_x'	
0,00 + 0	1,000 + 0	0,000 + 0	
3,00-2	7,773 - 1	-8,575+0	
6,00-2	6,273 - 1	-2,967+0	
1,40-1	4,680 - 1	-1,341+0	
3,00-1	3,292 - 1	-5,742-1	
5,00-1	2,380 - 1	-3,603-1	
9,00-1	1,374 - 1	-1,786-1	
1,50+0	5,776 - 2	-9,682-2	
2,30+0	2,155-3	-4,910-2	
2,40+0	-2,586-3	-4,573-2	
3,50+0	-3,630-2	-1,903-2	
5,00+0	-5,156-2	-3,569-3	
8,00 + 0	-4,424 -	5,782 - 3	
1,20+1	-2,043-2	5,385 - 3	
1,70 + 1	-1,272-3	2,365 - 3	
1,80 + 1	8,285-4	1,854 - 3	
2,40 + 1	5,489 - 3	6,184 - 6	
2,90 + 1	4,155-3	-4,262-4	
3,50 + 1	1,582 - 3	-3,788-4	
4,00 + 1	1,105-4	-2,108-4	
4,50 + 1	-5,746-4	-7,207-5	
5,00 + 1	-7,043-4	1,022 - 5	
5,50 + 1	-5,549-4	4,319 - 5	
6,00 + 1	-3,225-4	4,610 - 5	
6,50 + 1	-1,181-4	3,451-5	
7,00 + 1	1,735 - 5	1,974 - 5	
8,00 + 1	9,876 - 5	-5,219-7	
9,00 + 1	5,691 - 5	-5,785-6	
1,00 + 2	7,905 - 6	-3,594-6	
1,05 + 2	-6,013-6	-2,027-6	
1,10 + 2	-1,281-5	-7,305-7	
1,15 + 2	-1,427-5	-8,139-9	
1,20 + 2	-1,243-5	9,931 - 7	
1,30 + 2	0,000 + 0	0,000 + 0	

Соотношение (21) является преобразованием Фурье спектра одномерного волнения. Расчет корреляционной функции M_x на основе спектра вида (16) проведен численным путем для значений скорости ветра 4; 6; 8 м/с. Полученный массив данных для каждого ρ описывает значения функции (21) в более чем 120 точках в диапазоне $\rho = 0 \div 190$ м. Для вычисления значения функции в промежутках между узлами используется описанный выше метод кубической Численные модели пространственных корреляционных функций 1399

сплайн-интерполяции. Вычисление производных сплайна также осуществляется с помощью уже известной процедуры прямой и обратной прогонки исходного массива значений функции. Проведена оптимизация массива данных, предназначенных для сплайн-интерполяции.

В табл. 2 приведены значения нормированной функции $R_x(\rho) = M_x(\rho)/\overline{\sigma}_x^2$ и ее производной в узлах ρ_i при скорости ветра 6 м/с. Использование этих данных в формуле (21) дает интерполяционную ошибку, не превышающую 1%.

На рис. 2 приведена зависимость $R_x(\rho)$, полученная на основе данных табл. 2, с использованием интерполяционных формул (20). Характерной чертой этой зависимости является наличие быстро изменяющегося участка при малых р, а также сравнительно медленных осцилляций при больших значениях аргумента. Первое объясняется влиянием на поведение корреляционной функции уклонов коротких гравитационных и капиллярных волн (ряби), а второе – действием длинных (энергонесущих) гравитационных волн на поверхности моря.

В заключение отметим, что по мере уточнения моделей спектра морского ветрового волнения и получения новых (более точных) экспериментальных данных о дисперсии уклонов и кривизн взволнованной поверхности моря наша модель корреляционных функций уклонов также будет уточняться – это, однако, не потребует изменения изложенной методики.

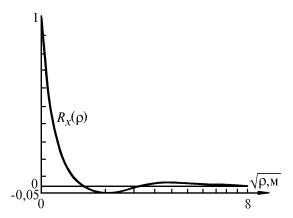


Рис. 2. Нормированная корреляционная функция уклонов одномерного волнения при скорости ветра 6 м/с

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-05-8129).

```
1. В е б е р \, В . Л . // Изв. РАН. Сер. ФАО. 1993. Т. 29. N 2. С. 222–228.
```

Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

Поступила в редакцию 21 февраля 1995 г.

V.L. Weber. Numerical Models for Space Correlative Functions of Wind Wave Slopes as Applied to Some Problems of Sea Optics.

Simple numerical spline models for correlative functions for slopes of one-dimensional and isotropic wind sea roughness are developed. The simulation is based on the modified Pierson-Moscovitz spectrum with cutting off Gaussian function. The parameter of the cutting off is chosen so that the forth moment of spectrum calculated theoretically and the measured value of the curvature dispersion would be in good agreement.

1400 Вебер В.Л.

^{2.} В ебер В. Л., Сергиевская И. А. // Изв. РАН. Сер. ФАО. 1993. Т. 29. N 3. С. 414–420.

^{3.} Лучинин А.Г., Сергиевская И.А. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1982. Т. 18. N 8. C. 850–858. 4. Сох С., Мипк W. // J. Opt. Soc. Amer. 19954. V. 44. N 1. P. 838–850.

^{5.} Бурцев Ю. Г., Пелевин В. Н. // Световые поля в океане. М.: ИО АН СССР. 1979. C. 231–232.

^{6.} В ебер В. Л. // Изв. вузов. Радиофизика. 1979. Т. 22. N 8. С. 989–1001.

^{7.} Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 c.