

АДАПТИВНАЯ ОПТИКА

П.А. Бакут, А.Е. Белозеров, А.Д. Ряхин

**ОЦЕНКА ПОТЕНЦИАЛЬНОГО РАЗРЕШЕНИЯ ПАССИВНЫХ МЕТОДОВ
ФОРМИРОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ ЧЕРЕЗ ТУРБУЛЕНТНУЮ АТМОСФЕРУ.
Ч. IV. АДАПТИВНЫЙ ТЕЛЕСКОП С ДАТЧИКОМ ГАРТМАНА**

Анализируются ограничения на параметры адаптивного телескопа с датчиком Гартмана и условия наблюдения протяженного внеатмосферного объекта, при которых сохраняется потенциальная возможность получения дифракционного изображения.

В предыдущих статьях [1–3] был проанализирован один из наиболее простых в практической реализации подходов к решению проблемы видения через атмосферу Земли — спекл-интерферометрия. Будучи основанным на последовательной регистрации и совместной статистической обработке серии короткоэкспозиционных изображений, на современных крупных телескопах в видимом диапазоне длин волн он позволяет достигать почти дифракционного разрешения. Однако для этого требуется наличие от нескольких десятков до сотен тысяч исходных изображений при постоянном ракурсе объекта. Это ограничивает область приоритетного применения спекл-интерферометрии в основном задачей наблюдения объектов на высоких, в том числе геостационарных орбитах. В то же время весьма актуальна задача формирования дифракционного изображения нестационарного объекта. Одним из эффективных методов ее решения является использование адаптивных телескопов, в развитии элементной базы которых в последнее время наблюдается заметный прогресс [4].

Оценим потенциальную эффективность работы с протяженными внеатмосферными объектами адаптивной оптической системы, основанной на методе Гартмана [5] (рис. 1, 2). Именно метод Гартмана (определение турбулентных фазовых искажений волнового фронта по смещениям изображений объекта в фокусах субапертур, достаточно равномерно покрывающих апертуру телескопа) представляется наиболее перспективным в пассивном режиме наблюдения за такими объектами. Действительно, у метода Гартмана нет принципиальных ограничений на величину объекта и ширину спектра принимаемого излучения — такие ограничения появляются лишь вследствие конечного размера области изопланатизма и турбулентных дисперсионных эффектов в атмосфере [6]. Есть у этого метода и определенные преимущества в реализации.

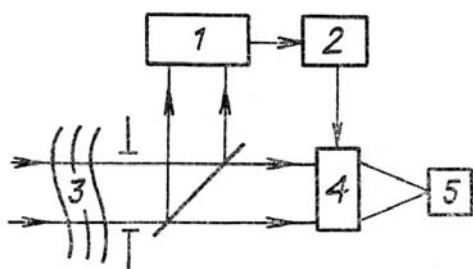


Рис. 1. Адаптивный телескоп с датчиком Гартмана: 1 — датчик Гартмана; 2 — ЭВМ; 3 — атмосфера; 4 — корректор волнового фронта; 5 — приемник

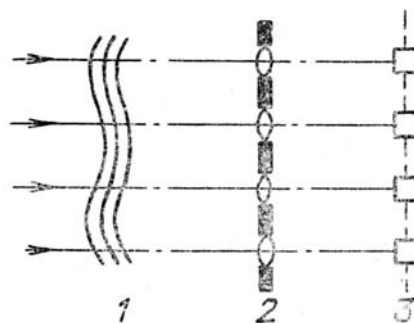


Рис. 2. Датчик Гартмана: 1 — атмосфера; 2 — набор субапертур; 3 — набор координатных приемников

Подчеркнем, что речь пойдет о потенциальной точности и ее оценке, так как будут учтены лишь наиболее принципиальные моменты и сделан ряд предположений — это колмогоровская модель турбулентности, круглая апертура, гипотеза «замороженной» турбулентности, слоистость атмосферы в отношении направлений ветров; конечное число субапертур, заполняющих с некоторой плотностью апертуру; квантовые шумы приемников в датчике Гартмана (другие шумы не рассматриваются), конечное время регистрации изображения датчиком, ошибки ведения объекта, а также некоторые математические допущения, позволяющие, в частности, не конкретизировать форму субапертур, схему их размещения и т.п. При этом не рассматриваются амплитудные флуктуации поля на апертуре фон и

тепловые шумы приемников; быстродействие аппаратуры, реализующей алгоритмы восстановления волнового фронта по его локальным наклонам; качество работы различных корректоров волнового фронта, и, вероятно, какие-то иные моменты, имеющие, может быть, большое, но не такое фундаментальное значение.

Следует отметить, что в данной статье будет использоваться полиномиальное представление волнового фронта на апертуре, а именно, разложение по ортогональным круговым полиномам Цернике $\varphi(\mathbf{r}) = \sum_j C_j Z_j(\mathbf{r}/R)$, где R — радиус апертуры. Это одно из многих эквивалентных представлений,

однако вследствие близости полиномов к собственным функциям интегрального уравнения Карунена—Лоэва с ядром в виде функции корреляции фазы, оно позволяет приближенно связать конечное число субапертур через соответствующее количество вычисляемых для них полиномов с обусловленной этим числом точностью определения волнового фронта.

Конечной целью работы адаптивной оптической системы в данном случае мы считаем получение изображения, близкого к дифракционному, что, как известно, реализуется при достижении остаточной среднеквадратической ошибки фазы не хуже $\lambda/4$. Исходя из этого и будем вести дальнейший анализ.

По результатам [7–9] запишем следующее выражение для среднеквадратической ошибки оценки атмосферной фазы с учетом конечного числа субапертур, ошибок измерений локальных наклонов волнового фронта на субапертурах, ошибок усреднения при конечном времени измерения:

$$\sigma_\varphi^2 = \sigma_J^2 + \sigma_\delta^2 + \sigma_T^2. \quad (1)$$

В эту формулу входят:

— ошибка представления волнового фронта на апертуре конечным числом J полиномов Цернике

$$\sigma_J^2 = \left[\sum_{j=J+1}^{\infty} C_j^0 \right] \cdot \left(\frac{R}{r_0} \right)^{5/3}, \quad (2)$$

C_j^0 — коэффициенты полиномиального разложения [7]; r_0 — радиус корреляции атмосферных искажений по Фриду;

— ошибка оценки фазы, обусловленная неточностью измерения наклонов

$$\sigma_\delta^2 = \sum_{j=1}^J [A^T A / \delta^2 + R_c^{-1} \overline{I_j}^{-1}], \quad (3)$$

A — матрица, элементы которой представляют собой средние по i -й субапертуре наклоны поверхности, описываемой j -м полиномом Цернике [8]; δ — точность измерения локальных наклонов волнового фронта на субапертурах; R_c — корреляционная матрица коэффициентов разложения по полиномам;

— ошибка представления волнового фронта полиномами с усредненными за время T коэффициентами [9]

$$\sigma_T^2 = \left[\sum_{j=1}^J C_j^T \right] \cdot \left(\frac{R}{r_0} \right)^{5/3} \cdot \frac{\langle v^2 \rangle T^2}{R^2}, \quad (4)$$

C_j^T — постоянные коэффициенты, вычисленные в [9]; $\langle v^2 \rangle$ — усредненный по вертикальному распределению поперечной скорости ветра и атмосферной турбулентности квадрат скорости перемещения турбулентных неоднородностей (формула (4) получена в предположении $\langle v \rangle^2 \ll \langle v^2 \rangle$ с использованием гипотезы «замороженной» турбулентности для полиномов, порядок радиальной части которых

$$n^2 \ll 13 R^2 \langle v^2 \rangle / T^2 \langle v^4 \rangle).$$

Далее сравним между собой слагаемые (2–4) формулы (1).

Из приближенного выражения в [7] для остаточной среднеквадратической ошибки фазы при компенсации J аббераций легко определить требуемое количество идеально восстанавливаемых коэффициентов разложения, при котором достигается заданная точность σ_J [рад]:

$$J \approx 0,9249 \sigma_J^{-12/5} \cdot \left(\frac{R}{r_0} \right)^2, \quad J > 10. \quad (5)$$

Понятно, что количество субапертур N должно быть не меньше J . Таким образом, максимальный размер субапертуры, соответствующий минимальному требуемому их количеству, практически не за-

висит от размеров апертуры и определяется параметром Фрида r_0 . Скажем, для круглых субапертур, заполняющих площадь апертуры с коэффициентом β , $0 < \beta < 1$:

$$d_{\max} \simeq 2R \sqrt{\frac{\beta}{N_{\min}}} \simeq 2\sigma_j^{6/5} \beta^{1/2} r_0. \quad (6)$$

Например, при $\beta = 0,3$ и точности $\sigma_j = \lambda/10d_{\max} \simeq 0,64r_0$.

Оценивая по формуле (3) ошибку восстановления волнового фронта из-за неточности измерения локальных наклонов, воспользуемся приведенными в [8] приближенными выражениями для элементов матрицы A и, кроме того, пользуясь разреженностью и близостью к диагональному виду матриц $A^T A$ и R_c , учтем в (3) лишь их диагональные элементы. Тогда

$$\sigma_{\delta}^2 \simeq \sum_{j=1}^J \left[\left(\frac{\lambda}{2\pi R} \right)^2 \cdot \frac{N\alpha_j}{\delta^2} + \frac{1}{R_{cjj}} \right]^{-1} [\text{рад}^2], \quad (7)$$

где $\alpha_j = (n+1)(n^2+2n-m^2)$; n, m – порядок радиальной и угловой части j -го полинома. Здесь первый член учитывает собственно неточность измерения, а второй – величины самих аберраций.

Ошибка определения наклона волнового фронта в пределах субапертуры согласованным с изображением приемником, обусловленная квантовыми шумами, равна [10]:

$$\delta^2 = \frac{\rho^2}{8WS} [\text{рад}^2], \quad (8)$$

где ρ – угловой радиус области изображения, содержащей 90% энергии принятого излучения; W – среднее число фотоэлектронов на единицу площади субапертуры, S – площадь субапертуры. (Для четырехквadrантного приемника δ^2 в π раз больше). Если объект не разрешается субапертурой – $\rho \simeq 2\lambda/d$; в противном случае можно считать $\rho^2 \simeq \Omega$, где Ω – телесный угол, стягиваемый объектом.

Можно показать, что с ростом j второе слагаемое в (7) растет быстрее, чем первое, т. е. оценка высших аберраций по сравнению с их среднеквадратической величиной оказывается менее точной. Для «самой высокой» аберрации (с индексом $j = J(n, m)$ – см. формулу (5)) отношение ошибки ее оценки к среднеквадратической величине, в зависимости от порядка угловой части m , равно

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\pi R}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{\delta^2}{N\alpha_j} \div R_{cjj} &\simeq 0,6\sigma_j^{-16/9} \cdot \frac{\rho^2}{\lambda^2\beta W} \cdot \left(\frac{R}{r_0} \right)^{-1} (m=0) \dots \\ \dots 0,4\sigma_j^{-6/5} \frac{\rho^2}{\lambda^2\beta W} & \quad (m=n). \end{aligned} \quad (9)$$

В случае малых значений отношения (9) σ_{δ}^2 обусловлена в основном ошибками измерения наклонов и ограничивается величиной

$$\sigma_{\delta}^2 \leq \left(\frac{2\pi R}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{\delta^2}{N} \cdot \sum_{j=1}^J \alpha_j^{-1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\rho^2}{\lambda^2\beta W} \cdot \sum_{m,n} \frac{1}{(n+1)(n^2+2n-m^2)}, \quad (10)$$

причем $\sum \dots$ при изменении J от 1 до ∞ возрастает от 0,25 до ≈ 1 . Условия малости отношения (9) и дисперсии (10) оказываются практически эквивалентными, т. е. когда последняя учитываемая по (5) аберрация оценивается достаточно точно по сравнению с ее среднеквадратической величиной, остаточная ошибка, обусловленная неточностью измерения наклонов волнового фронта, будет мала по сравнению с длиной волны.

Для примера рассмотрим стандартную ситуацию: излучение объекта, подсвечиваемого Солнцем ($P = 1,6 \cdot 10^{26}$ фотонов/м³ · с · ср), попадает в гартмановскую систему с коэффициентом заполнения 0,3 и пропусканием 0,3, и регистрируется на длине волны 0,5 мкм в полосе 0,03 мкм за время 3 мс согласованным приемником с квантовой эффективностью 0,2. Если число определяемых аберраций в идеале соответствует $\sigma_j = 2\pi/10$, то значению отношения (9) порядка 0,1 при $m = n$ (малая относительная ошибка определения аберраций высших порядков) соответствует отношение телесного угла Ω , стягиваемого объектом, к угловой площади его изображения субапертурой πr^2 , равное $\approx 2 \cdot 10^{-3}$. Одновременно при этом обеспечивается $\sigma_{\delta} \leq 2\pi/10$. Таким образом, для субапертуры диаметром 5 см минимально допустимое значение наблюдаемого объекта Ω составит порядка 0,1 угл. с².

Перепирав (10) в виде

$$\sigma_{\delta} \leq \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \left(\frac{S}{\pi\beta} \cdot \sum_{j=1}^J \alpha_j^{-1} \right)^{1/2} \cdot \delta, \quad (11)$$

нетрудно заметить, что она практически равна средней по субапертуре ошибке измерения локального наклона волнового фронта, причем множитель $\sum_{j=1}^J \alpha_j^{-1}$ при увеличении размерности апертурной решетки монотонно возрастает от 0,25 (учет только наклона по одной оси) до ≈ 1 (учет всех aberrаций). Этот вывод находится в определенном согласии с результатами другого подхода [11, 12], где волновой фронт восстанавливается из набора разностей фаз в соседних узлах решетки.

Интересно также найти саму точность измерения локальных наклонов δ^* , требуемую для достижения заданного значения σ_{δ} и σ_J . Из формул (5), (10) получаем, что при минимально допустимом для данной апертуры количестве субапертур и $J \gg 1$:

$$\delta^* \simeq \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{\sigma_{\delta}}{\sigma_J^{6/5}} \cdot \frac{1}{r_0}. \quad (12)$$

Так, при $\sigma_{\delta} = \sigma_J = 2\pi/10$ оказывается $\delta^* \simeq \lambda/(6r_0)$. Смысл этого результата достаточно прост: если бы субапертура имела максимально возможный для достижения $\sigma_J = 2\pi/10$ диаметр (согласно (6), при $\beta = 1$ $d_{\max} \simeq 1,2r_0$), то допустимая ошибка определения фазы на краях субапертуры составила бы $\lambda/10$ — тогда, в соответствии с (12), и значение σ_{δ} также будет соответствовать точности $\lambda/10$. Легко заметить, что при $\beta = 0,3$, т.е. $d_{\max} \simeq 0,64r_0$, $\delta^* = \lambda/6r_0$ достигается при измерении положения центра гартмановского изображения с точностью не менее $1/10$ его дифракционного радиуса λ/d .

Очевидно, на значениях δ (и σ_{δ}) будут сказываться ошибки ведения объекта телескопом. Чтобы движение объекта не привело к возрастанию σ_{δ} , ошибка ведения по угловой скорости $\Delta\omega$ должна удовлетворять условию

$$\Delta\omega T \ll \delta, \quad (13)$$

где T — время регистрации гартмановских изображений. В только что рассмотренном случае, при минимальном для данной апертуры количестве субапертур, $\sigma_{\delta} = \sigma_J = 2\pi/10$, $\lambda = 0,5$ мкм, $r_0 = 5$ см и $T = 3$ мс $\Delta\omega$ должна быть меньше 1 угл. мин/с. Из практики же известно, что ошибка ведения по скорости при $\omega = 1 \dots 2$ град/с находится на уровне собственных вибраций привода и составляет единицы угл. сек/с.

Характерно, что здесь нет принципиальной необходимости в дополнительной стабилизации дифракционного изображения, формируемого адаптивным телескопом, — его положение должно стабилизироваться самим адаптивным корректором.

Разумеется, существует ограничение и на саму скорость движения объекта — за время цикла «регистрация гартманогаммы — восстановление фазового распределения — коррекция — регистрация изображения» он не должен выходить из зоны изопланатизма. Скажем, при длительности такого цикла 6 мс и размере области изопланатизма 2 угл. г угловая скорость объекта не должна превышать 0,1 град./с. Для большей скорости допустимая длительность цикла пропорционально снижается, что влечет за собой соответствующее увеличение минимальной угловой площади наблюдаемого объекта. Справедливости ради следует указать на возможность увеличения максимального времени регистрации за счет оптимального прогнозирования картины волнового фронта по нескольким предыдущим измерениям [13]. Можно также увеличить ширину спектра при регистрации сигнала в датчике Гартмана. Например, увеличение ее от 0,03 до 0,35 мкм позволит наблюдать объекты, движущиеся уже со скоростями до 1,2 град./с, но при этом эффекты атмосферной дисперсии ограничивают предельный зенитный угол до $45^\circ \dots 60^\circ$ [6].

Последняя из рассматриваемых здесь ошибок — ошибка временного усреднения σ_T (4). Согласно [9] в тех условиях, в которых получена формула (4),

$$C_j^T = \frac{11}{384} \left(n - \frac{5}{6} \right) \left(n + \frac{17}{6} \right) C_j \frac{\langle v^2 \rangle T^2}{R^2} \cdot \left(\frac{R}{r_0} \right)^{5,3}. \quad (14)$$

Тогда пользуясь приближением [5] для C_j^0 при больших значениях j ($j > 10$), получим

$$C_j^T \approx 4,6 \cdot 10^{-2} j^{-5/6} \frac{\langle v^2 \rangle T^2}{R^2} \left(\frac{R}{r_0} \right)^{5/3}. \quad (15)$$

Соответственно с учетом (5)

$$\sigma_T^2 \approx 0,342\sigma_J^{-0,31} \frac{\langle v^2 \rangle T^2}{r_0^2} \text{ [рад}^2\text{]}. \quad (16)$$

Итак, ошибка усреднения практически не зависит от размерности апертурной решетки, слабо зависит от заданной предельной точности и определяется отношением расстояния, которое могли бы пройти воздушные неоднородности, двигаясь со своей средней скоростью, к параметру Фрида r_0 . Приняв $\sigma_T = \sigma_J = 2\pi/10$, $\langle v^2 \rangle = 64 \text{ м}^2/\text{с}^2$, $r_0 = 5 \text{ см}$, нетрудно определить, что максимальное время $T \approx 6 \text{ мс}$.

Напомним, что рассматриваемая здесь σ_T является среднеквадратическим отклонением усредненного за время наблюдения волнового фронта, аппроксимированного суммой полиномов, от его временной реализации на этом интервале. В действительности же за определенное таким образом время (другими словами, время «замороженности» атмосферы) нужно не только построить картину распределения волнового фронта на апертуре, но и осуществить коррекцию и зарегистрировать получающееся изображение.

Анализ показал, что в рамках использованной модели не возникает ограничений на размеры адаптивного телескопа. Объяснить это можно следующим образом. Рассмотренные явления, влияющие на эффективность работы адаптивного телескопа, происходят на характерном расстоянии r_0 (параметр Фрида), пропорционально которому выбирается размер субапертур. В этом случае число субапертур N растет как R^2 . Ошибка оценки фазового распределения на апертуре по N практически независимым измерениям уменьшается как $1/\sqrt{N} \sim R^{-1}$ (это особенно видно на примере оценки первой абберации — среднего по апертуре наклона волнового фронта по N измеренным локальным наклонам), — т.е. с той же скоростью, что и дифракционный предел апертуры телескопа λ/R .

В заключение кратко повторим результаты проведенного анализа и сформулируем некоторые выводы.

1. Получение близких к дифракционным изображений протяженных внеатмосферных объектов — одна из задач, где применение адаптивной оптики представляется целесообразным. Однако имеются общие для существующих ныне типов адаптивных систем ограничения на предельную величину и угловую скорость объекта — это размеры зоны изопланатизма (несколько угл. с) и скорость, соответствующая пролету зоны изопланатизма за время цикла адаптации. При этом в любом случае цикл адаптации не может существенно превышать время «замороженности» турбулентности, приблизительно равное $r_0/v_{\text{ветра}}$ (порядка единиц миллисекунд).

2. Остаточная среднеквадратическая ошибка $\lambda/10$ за счет конечного числа N независимых измерений волнового фронта на апертуре обеспечивается при $N \geq 2,8(R/r_0)^2$. В датчике Гартмана это N соответствует количеству субапертур, и максимальный диаметр субапертур, выбираемый исходя из условия механической прочности, оказывается равными $\approx 0,6...0,7r_0$.

3. Другая составляющая суммарной ошибки, обусловленная конечной точностью измерений локальных наклонов волнового фронта на субапертурах, также не будет превышать $\lambda/10$, если эта точность окажется не хуже $0,1\sqrt{N}(\lambda/R)^2$ [рад]. При этом в типичных условиях наблюдения возникает ограничение на минимальные угловые размеры объекта порядка $0,1$ угл. с².

При выполнении этих условий потенциальное разрешение адаптивного телескопа становится сравнимым с дифракционным.

1. Бакут П. А., Рожков И. А., Ряхин А. Д. // Оптика атмосферы. 1990. Т. 3. № 4. С. 394–397.
2. Бакут П. А., Рожков И. А., Ряхин А. Д. // Оптика атмосферы. 1990. Т. 3. № 4. С. 398–403.
3. Бакут П. А., Рожков И. А., Ряхин А. Д. // Оптика атмосферы. 1990. Т. 3. № 6. С. 604–608.
4. Parent R. R. // SPIE. 1988. V. 1000. P. 101.
5. Харди Д. У. // ТИИЭР. 1978. Т. 66. № 6. С. 31.
6. Уолнер Э. // Адаптивная оптика/Пер. с англ. под ред. Э.А. Витриченко. М.: Мир, 1980. С. 448–454.
7. Noll R. J. // JOSA. 1976. V. 66. № 3. P. 207.
8. Белозёр д'в А. Е. Восстановление картины волнового фронта по единичному измерению с применением полиномов Цернике. Рег. № 919-84. Деп. в ВИНТИ 15 февраля 1984 г.
9. Белкин Н. Д., Белозёров А. Е., Матюхин В. Ф. // Квантовая электроника. 1985. Т. 12. № 2. С. 407.
10. Антоненко А. Б., Демидова Л. Г. // ОМП. 1980. № 3. С. 1.
11. Фрид Д. // Адаптивная оптика/Пер. с англ. под ред. Э.А. Витриченко. М.: Мир, 1980. С. 332–348.
12. Хаджин Р. // Адаптивная оптика/Пер. с англ. под ред. Э.А. Витриченко. М.: Мир, 1980. С. 349–359.
13. Хаджин Р. // Адаптивная оптика/Пер. с англ. под ред. Э.А. Витриченко. М.: Мир, 1980. С. 360–373.

Научно-производственное объединение «Астрофизика»,
Москва

Поступила в редакцию
11 июня 1990 г.

P. A. Bakut, A. E. Belozyorov, A. D. Ryakhin. Estimation of the Potential Resolution of Passive Imaging Methods through Turbulent Atmosphere. IV. Adaptive Telescope with Hartmann Sensor.

The limitations imposed on the parameters of adaptive telescope with Hartmann sensor and on the conditions for observing an extraterrestrial under which the potential possibility of obtaining a diffraction limited image still exists, are analyzed.