«Оптика атмосферы и океана», **20,** № 9 (2007)

УДК 535.8:621.37

В.О. Троицкий

Скалярное приближение для генерации второй гармоники в одноосном кристалле

Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск

Поступила в редакцию 18.01.2007 г.

Рассматривается задача о генерации второй гармоники в одноосном квадратично нелинейном кристалле. Показано, каким образом, в пренебрежении эффектами деполяризации взаимодействующих волн, можно непосредственно из уравнений Максвелла строго вывести систему дифференциальных нелинейных волновых уравнений для скалярных полей на частотах ω и 2ω. Детально рассмотрен переход к эквивалентной системе интегральных уравнений. Показано, что для пучков с узким пространственным спектром полученные уравнения превращаются в известные укороченные уравнения для комплексных медленно меняющихся амплитуд взаимодействующих волн. Продемонстрирован вывод рекуррентной формулы, которую предлагается рассматривать в качестве приближенного (с известной точностью) аналитического решения скалярной нелинейной задачи и которая при увеличении числа шагов превращается в известный алгоритм численного асимптотически точного решения.

Введение

В рамках настоящей статьи рассмотрим немагнитные ($\mu = 1$) и непроводящие среды ($\sigma = 0$) без свободных зарядов ($\rho = 0$). Уравнения Максвелла, отвечающие данной ситуации, запишем в виде

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \qquad (1)$$

Ограничимся случаем однородных одноосных квадратично нелинейных диэлектриков, и материальное уравнение для $\mathbf{D}$ представим следующим образом:

$$\mathbf{D} = \tilde{\varepsilon}\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \tilde{\varepsilon}\mathbf{E} + 4\pi\tilde{\chi}\mathbf{E}\mathbf{E}, \qquad (2)$$

где $\tilde{\varepsilon}$ — тензор диэлектрической проницаемости (ранг 2); $\tilde{\chi}$ — тензор квадратичной нелинейной восприимчивости (ранг 3).

Решение (1) будем искать в виде суммы двух монохроматических волн — на частотах ω и 2ω, т.е.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}\left\{\mathbf{E}_1(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_2(\mathbf{r})\,e^{-i2\omega t} + \text{к.с.}\right\}. \qquad (3)$$

Наличие в среде только двух волн означает, что речь идет о скалярном взаимодействии. Предположим, что основное излучение $\mathbf{E}_1$ является обыкновенной волной, а $\mathbf{E}_2$ — необыкновенной. Другими словами, рассмотрим «*ooe*»-взаимодействие.

Исключая из (1) $\mathbf{H}$ и подставляя его в полученное уравнение (3), приходим к системе статических нелинейных волновых уравнений

$$\mathrm{rot\,rot}\mathbf{E}_1 - k^2\tilde{\varepsilon}(\omega)\mathbf{E}_1 = C\mathbf{P}_1, \qquad (4.1)$$

$$\mathrm{rot\,rot}\mathbf{E}_2 - (2k)^2\,\tilde{\varepsilon}(2\omega)\mathbf{E}_2 = 2C\mathbf{P}_2, \qquad (4.2)$$

где $k = \omega/c$; $C = 4\pi k^2$; $\mathbf{P}_1 = \tilde{\chi}(\omega)\mathbf{E}_1^*\mathbf{E}_2$, $\mathbf{P}_2 = \tilde{\chi}(2\omega)\mathbf{E}_1\mathbf{E}_1$; зависимость тензоров $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\chi}$ от частоты является результатом учета временной дисперсии [1–3].

Непосредственно из (4) вытекает весьма важное следствие. Любое точное решение системы уравнений (4) должно удовлетворять условию на дивергенцию

$$\mathrm{div}\tilde{\varepsilon}(\omega)\mathbf{E}_1 = -\,4\pi\mathrm{div}\mathbf{P}_1, \qquad (5.1)$$

$$\mathrm{div}\tilde{\varepsilon}(2\omega)\mathbf{E}_2 = -\,2\pi\,\mathrm{div}\mathbf{P}_2. \qquad (5.2)$$

Суть интересующего нас скалярного приближения состоит в том, чтобы решение (4) искать в виде

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_1 U_1(\mathbf{r}), \qquad (6.1)$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_2 U_2(\mathbf{r}), \qquad (6.2)$$

где $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ — априорно заданные постоянные единичные векторы. Соответственно цель предлагаемого исследования — показать, по возможности, максимально строго, как будут выглядеть уравнения (дифференциальные и интегральные) для скалярных полей U_1 и U_2 из (6).

Несмотря на то что подавляющее большинство вопросов теории генерации гармоник рассматривалось именно в скалярном приближении, сколько-нибудь детального обсуждения сформулированной выше задачи обнаружить не удается. В силу сказанного, а также с учетом того что эти вопросы имеют большое методологическое значение, актуальность предлагаемых исследований представляется достаточно очевидной. Ранее в [4] был рассмотрен переход к скалярному приближению для полей в линейных одноосных средах. Здесь предлагается использовать практически тот же самый подход, лишь слегка модифицированный с учетом того, что теперь условия на дивергенцию становятся неоднородными. Кроме того, в данной статье подробно рассматривается возможность замены дифференциальных уравнений эквивалентной системой интегральных уравнений — процедура, по сути, достаточно простая, но имеющая большое значение, поскольку на этой основе, как будет показано в разд. 6, удается получить аналитическое решение интересующей нас скалярной задачи.

Прежде чем приступить к непосредственной теме настоящей работы, хотелось бы отметить одно принципиальное обстоятельство. Необходимые нам скалярные уравнения для U_1 и U_2 невозможно получить простой подстановкой (6) в (4), как это было проделано в [1] для случая плоских волн. Продемонстрируем это на простейшем примере.

Пусть среда является изотропной и линейной. В этом случае для поля на основной частоте из (4.1) находим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}_1 - k^2n^2\mathbf{E}_1 = 0. \tag{7}$$

Подставляя (6.1) в (7), после элементарных расчетов получаем для U_1

$$\left(\mathbf{e}_1\nabla\frac{\partial U_1}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\mathbf{e}_1\nabla\frac{\partial U_1}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\mathbf{e}_1\nabla\frac{\partial U_1}{\partial z}\right)\mathbf{k} - \\ - \mathbf{e}_1\left(\nabla^2 U_1 + k^2n^2U_1\right) = 0, \tag{8}$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — орты координатных осей.

Пусть поле $\mathbf{E}_1$ будет линейно поляризованным, например вдоль оси X, т.е.

$$\mathbf{e}_1 = \{1,\ 0,\ 0\}. \tag{9}$$

Подстановка (9) в (8) дает три скалярных уравнения

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial x\partial z} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} - k^2n^2U_1 = 0. \tag{10}$$

Очевидно, что равенствам в (10) можно удовлетворить только в том случае, если положить, что функция $U_1(\mathbf{r})$ не зависит от x, т.е.

$$\partial U_1 / \partial x = 0. \tag{11}$$

Иными словами, поле на основной частоте должно быть цилиндрическим пучком и, следовательно, получить скалярное уравнение для трехмерной амплитуды при таком подходе не удается. Понятно, что указанный результат является прямым следствием, вытекающим из условия на дивергенцию (5.1), которое в рассматриваемом частном случае принимает вид

$$\operatorname{div}\mathbf{E}_1 = 0 = e_{1x}\frac{\partial U_1}{\partial x} + e_{1y}\frac{\partial U_1}{\partial y} + e_{1z}\frac{\partial U_1}{\partial z} = 0. \tag{12}$$

Если теперь в (12) подставить вектор (9), то мы и получаем условие (11).

Таким образом, одного заявления о том, что поляризацией волны мы не интересуемся, т.е. используем приближения (6), оказывается недостаточным для того, чтобы в общем случае получить скалярные уравнения для U_1 и U_2 непосредственно из уравнений Максвелла. Требуются некие промежуточные векторные уравнения, с помощью которых переход к скалярному приближению можно будет осуществить формально строго. Поиск таких уравнений для полей на основной частоте и ВГ, собственно, и составляет конкретную задачу настоящей статьи.

1. Системы координат

Направим ось Z декартовой системы координат вдоль оптической оси одноосного кристалла. Оси X и Y считаем совпадающими с кристаллографическими осями. Поскольку величины компонент тензора $\tilde{\chi}$ приводятся обычно именно для такой системы координат, то для определенности указанную систему будем называть χ-координатами.

Пусть направление распространения лазерного пучка (направление вдоль продольной оси пучка) определяется вектором $\mathbf{s}$. Интересующая нас задача состоит в отыскании поля ВГ, образованного лазерным пучком, у которого вектор $\mathbf{s}$ составляет в общем случае произвольный угол θ с оптической осью кристалла и произвольный угол φ с другой кристаллографической осью, например X. Решение указанной задачи часто оказывается удобным проводить в другой координатной системе, которую будем называть ε-координатами. Ось X последней направляем вдоль оптической оси, а оси Y и Z ориентируем таким образом, чтобы вектор $\mathbf{s}$ оказался расположенным в плоскости XZ. Для ненулевых компонент тензора диэлектрической проницаемости в ε-координатах имеем

$$\varepsilon_{11} = n_e^2 \neq \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = n_o^2, \tag{13}$$

где n_o и n_e — главные показатели преломления одноосного кристалла.

Связь между χ- и ε-координатами имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} x_\varepsilon &= z_\chi \\ y_\varepsilon &= \sin\varphi\, x_\chi - \cos\varphi\, y_\chi \\ z_\varepsilon &= \cos\varphi\, x_\chi + \sin\varphi\, y_\chi \end{aligned}\right\}. \tag{14}$$

Наконец, рассмотрим систему E-координат, у которой ось Z направлена вдоль вектора $\mathbf{s}$, а две другие оси ориентированы таким образом, чтобы оптическая ось ($\mathbf{o}$) оказалась расположенной в плоскости XZ. При этом получается, что

$$\mathbf{o} = \{\sin\theta, 0, \cos\theta\}. \tag{15}$$

Связь ε- и E-координат осуществляется с помощью выражений

$$\left.\begin{aligned} x_\varepsilon &= \sin\theta\, x_E + \cos\theta\, z_E \\ y_\varepsilon &= y_E \\ z_\varepsilon &= -\cos\theta\, x_E + \sin\theta\, z_E \end{aligned}\right\}, \tag{16}$$

χ- и E-координаты связываются между собой следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x_E &= -\cos\theta\cos\varphi\, x_\chi - \cos\theta\sin\varphi\, y_\chi + \sin\theta\, z_\chi \\ y_E &= \sin\varphi\, x_\chi - \cos\varphi\, y_\chi \\ z_E &= \sin\theta\cos\varphi\, x_\chi + \sin\theta\sin\varphi\, y_\chi + \cos\theta\, z_\chi \end{aligned}\right\}. \tag{17}$$

При замене координатных систем компоненты тензоров $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\chi}$ следует преобразовать:

$$\varepsilon'_{jn} = \sum_{\alpha,\gamma} \frac{\partial x'_j}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x'_n}{\partial x_\gamma}\varepsilon_{\alpha\gamma}; \tag{18.1}$$

$$\chi'_{ijk} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{\partial x'_i}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x'_j}{\partial x_\beta}\frac{\partial x'_k}{\partial x_\gamma}\chi_{\alpha\beta\gamma}. \tag{18.2}$$

В частности, используя (13), (16) и (18.1) для компонент тензора $\tilde{\varepsilon}$ в системе E-координат, находим

$$\varepsilon_{11} = n_o^2 b = n_o^2(c^2+\beta^2 s^2),\ \ \varepsilon_{22} = n_o^2,\ \ \varepsilon_{33} = n_o^2 a = n_o^2(s^2+\beta^2 c^2),$$
$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = n_o^2\, cs(\beta^2-1) = n_o^2\, a\rho,\ \ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{23} = 0, \tag{19}$$

где $s \equiv \sin(\theta)$; $c \equiv \cos(\theta)$; $\beta = n_e / n_o$; $\rho = cs(\beta^2-1)/a$ — угол двулучепреломления. Отметим также, что $n^e(\theta) = n_e/\sqrt{a}$ — показатель преломления в направлении основного излучения, т.е. под углом θ к оптической оси.

2. Скалярное приближение для обыкновенной волны на основной частоте

Запишем уравнение (4.1) в системе E-координат. Индекс «E» для упрощения записи не указываем. По определению ([4]) «o»-волна не должна иметь проекции вектора $\mathbf{E}$ на оптическую ось. В системе E-координат (см. (15)) это эквивалентно выполнению условия

$$sE_x + cE_z = 0, \tag{20}$$

где $s = \sin(\theta)$; $c = \cos(\theta)$.

Используя (19) и (20), находим

$$\tilde{\varepsilon}\mathbf{E}_1 = \mathbf{i}(\varepsilon_{11}E_{1x} + \varepsilon_{13}E_{1z}) + \mathbf{j}\varepsilon_{22}E_{1y} + \mathbf{k}(\varepsilon_{13}E_{1x} + \varepsilon_{33}E_{1z}) =$$
$$= n_o^2\left\{\mathbf{i}E_{1x}\left[c^2+\beta^2 s^2 - \frac{s}{c}cs(\beta^2-1)\right] + \mathbf{j}E_{1y} + \right.$$
$$\left. + \mathbf{k}E_{1z}\left[-\frac{c}{s}cs(\beta^2-1) + s^2 + \beta^2 c^2\right]\right\} = n_o^2\mathbf{E}_1. \tag{21}$$

Последнее означает, что для «o»-волны условия на дивергенцию (5.1) можно записать в виде

$$\operatorname{div}\mathbf{E}_1 = -\frac{4\pi}{n_o^2}\operatorname{div}\mathbf{P}_1. \tag{22}$$

Подставляя (22) в (4.1), получаем, что любое точное решение (4.1) должно также являться решением уравнения

$$\nabla^2\mathbf{E}_1 + k_1^2\mathbf{E}_1 = -C\mathbf{P}_1 - \frac{4\pi}{n_o^2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{P}_1, \tag{23}$$

где $k_1 = kn_o(\omega)$.

Важно отметить, что обратное утверждение в общем случае силы не имеет. Точное решение (23) не обязано быть одновременно и точным решением (4.1), причем проявляется это в том, что равенство (22) не будет иметь места. Сформулированное заключение является, совершенно очевидно, прямым следствием того, что при выводе (23) условие (22) априорно предполагалось выполненным.

Для того чтобы векторная функция $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$ была точным решением уравнений Максвелла [или волнового уравнения (4.1)], необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{E}_1$ была точным решением (23) и точно удовлетворяла условию (22). Действительно, в самом общем случае $\mathbf{E}_1$ можно представить в виде

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_1(\mathbf{r})U_1(\mathbf{r}), \tag{24}$$

где

$$e_{1j}(\mathbf{r}) = E_{1j}(\mathbf{r})/U_1(\mathbf{r}),\ \ j = x, y, z.$$

При этом (22) и (23) обеспечивают четыре скалярных уравнения, достаточных для однозначного определения четырех неизвестных скалярных функций $U_1(\mathbf{r})$ и $e_{1j}(\mathbf{r})$.

Предположим, что определение точного вида функций $e_{1j}(\mathbf{r})$ является задачей второстепенной. И вместо точного решения (24) будем искать приближенное вида (6.1), т.е. ограничимся определением одной скалярной функции $U_1(\mathbf{r})$. При такой постановке задачи (поиск решения в скалярном приближении) одного уравнения (23) уже оказывается достаточным. Чтобы убедиться в этом, подставим (6.1) в (23), умножим обе части уравнения скалярно на $\mathbf{e}_1$ и получим уравнение для скалярного поля на основной частоте:

$$\nabla^2 U_1 + k_1^2 U_1 = -C\mathbf{e}_1\mathbf{P}_1 - \frac{4\pi}{n_o^2}\mathbf{e}_1\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{P}_1. \tag{25}$$

Если все $\chi_{ijk} = 0$, то (25) превращается в уравнение Гельмгольца — основное уравнение для поля в однородной изотропной среде.

Вопрос о том, насколько сильно U_1 из (25) будет отличаться от функции $|\mathbf{E}_1| = \sqrt{E_{1x}^2 + E_{1y}^2 + E_{1z}^2}$, полученной в результате решения (4.1), мы здесь обсуждать не будем. Учитывая это обстоятельство, но, принимая во внимание, что никаких других принципиальных несоответствий в приведенных рассуждениях не просматривается, указанную процедуру перехода к скалярному приближению мы и назвали формально строгой.

Далее конкретизируем вид векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ из (6), учитывая, что поле $\mathbf{E}_1$ должно быть обыкновенной волной, а $\mathbf{E}_2$ — необыкновенной:

$$\mathbf{e}_1=\{0,\ 1,\ 0\},\ \mathbf{e}_2=\{1,\ 0,\ 0\}. \qquad (26)$$

В системе E-координат векторы (26) определяют соответственно поляризацию плоских «o»- и «e»-волн, распространяющихся вдоль оси Z (наклон вектора $\mathbf{e}_2$, обусловленный двулучепреломлением, не учитываем).

Используя (26), находим

$$\mathbf{P}_1=\tilde{\chi}(\omega)\mathbf{E}_1^*\mathbf{E}_2=\mathbf{p}_oP_o, \qquad (27)$$

где

$$\mathbf{p}_o=\{\mathbf{i}\,\chi_{121}+\mathbf{j}\,\chi_{221}+\mathbf{k}\,\chi_{321}\};\ P_o=U_1^*U_2;$$

$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — орты E-координат.

Подставив (27) в (25), получим

$$\nabla^2U_1+k_1^2U_1=F_1(\mathbf{r}), \qquad (28)$$

где

$$F_1(\mathbf{r})=2k_1\sigma_1P_o-\frac{4\pi}{n_o^2}\left\{\chi_{121}\frac{\partial^2P_o}{\partial x\partial y}+\chi_{221}\frac{\partial^2P_o}{\partial y^2}+\chi_{321}\frac{\partial^2P_o}{\partial y\partial z}\right\};$$

$$\sigma_1=-\frac{2\pi k_1}{n_o^2}\chi_{221}$$

— коэффициент нелинейной связи.

Уравнение (28) и является наиболее общей формой представления скалярного уравнения для обыкновенной волны на основной частоте.

На примере кристалла KDP продемонстрируем, как проводится конкретизация коэффициента нелинейной связи. В системе χ-координат у кристаллов с этой симметрией отличными от нуля являются [1]:

$$\chi_{123}=\chi_{132}=\chi_{213}=\chi_{231}\approx\chi_{312}=\chi_{321}\approx d_{36}.$$

Подставляя эти значения в (18.2) и используя (17), находим, что в (28) $\chi_{221}=-d_{36}\sin(\theta)\sin(2\varphi)$. При этом само выражение для коэффициента нелинейной связи превращается в хорошо известную формулу, приводимую во всех соответствующих работах (см., например, [1, 2]).

3. Скалярное приближение для необыкновенной волны ВГ

Запишем уравнение (4.2) в системе ε-координат (индексы ε не указываем). По определению [4] поле «e»-волны не должно иметь проекции вектора $\mathbf{H}$ на оптическую ось. Следовательно:

$$H_{2x}=\frac{1}{i2k}\left(\frac{\partial E_{2z}}{\partial y}-\frac{\partial E_{2y}}{\partial z}\right)=0. \qquad (29)$$

Из (29) получим

$$\frac{\partial^2E_{2z}}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2E_{2y}}{\partial z^2},\ \ \frac{\partial^2E_{2z}}{\partial y^2}=\frac{\partial^2E_{2y}}{\partial y\partial z}. \qquad (30)$$

Дифференцируя (5.2), получаем еще три соотношения, которые с учетом (30) принимают вид

$$\frac{\partial^2E_{2y}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2E_{2z}}{\partial x\partial z}=-\beta^2\frac{\partial^2E_{2x}}{\partial x^2}-\frac{2\pi}{n_{2o}^2}\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{div}\mathbf{P}_2,$$
$$\frac{\partial^2E_{2x}}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{\partial^2E_{2y}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2E_{2y}}{\partial z^2}\right)-\frac{2\pi}{n_{2e}^2}\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{div}\mathbf{P}_2, \qquad (31)$$
$$\frac{\partial^2E_{2x}}{\partial x\partial z}=-\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{\partial^2E_{2z}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2E_{2z}}{\partial z^2}\right)-\frac{2\pi}{n_{2e}^2}\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{div}\mathbf{P}_2,$$

где n_{2o} и n_{2e} — главные показатели преломления на частоте 2ω; $\beta=n_{2e}/n_{2o}$.

Подставляя (29) и (31) в (4.2) (см. [4]), получаем, что любое точное решение последнего должно удовлетворять также уравнению

$$\nabla_\beta^2\mathbf{E}_2+k_{2e}^2\mathbf{E}_2=-2C\mathbf{P}_\beta-\frac{2\pi}{n_{2o}^2}\,\mathrm{grad\,div}\mathbf{P}_2, \qquad (32)$$

где

$$\mathbf{P}_2=\{P_{2x},P_{2y},P_{2z}\},\ \ \mathbf{P}_\beta=\{P_{2x},\beta^2P_{2y},\beta^2P_{2z}\};$$

$$\nabla_\beta^2=\beta^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2};\ k_{2e}=2kn_{2e}.$$

Подставляем теперь в (32) выражение (6.2) и после скалярного умножения на $\mathbf{e}_2$ имеем уравнение

$$\nabla_\beta^2U_2+k_{2e}^2U_2=-2C\mathbf{e}_2\mathbf{P}_\beta-\frac{2\pi}{n_{2o}^2}\mathbf{e}_2\,\mathrm{grad\,div}\mathbf{P}_2, \qquad (33)$$

которое и является искомым скалярным приближением для (4.2), записанным в системе ε-координат.

Обратимся к системе E-координат, в которой вектор $\mathbf{e}_2$ имеет, как мы договорились выше, вид (26), а

$$\mathbf{P}_2=\tilde{\chi}(2\omega)\mathbf{E}_1\mathbf{E}_1=\mathbf{p}_eP_e, \qquad (34)$$

где

$$P_e=U_1^2(\mathbf{r});\ \mathbf{p}_e=\{\mathbf{i}\chi_{122}+\mathbf{j}\chi_{222}+\mathbf{k}\chi_{322}\};$$

$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — орты E-координат.

Из (34) и (26) следует:

$$\mathbf{e}_2\,\mathrm{grad\,div}\mathbf{P}_2=\chi_{122}\frac{\partial^2P_e}{\partial x^2}+\chi_{222}\frac{\partial^2P_e}{\partial x\partial y}+\chi_{322}\frac{\partial^2P_e}{\partial x\partial z}. \qquad (35)$$

Теперь векторы $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{P}_2$ определяем в системе ε-координат. Используя (16), находим

$$\mathbf{e}_2=\mathbf{i}s-\mathbf{k}c; \qquad (36.1)$$

$$\mathbf{P}_2=U_1^2(\mathbf{r})\{\mathbf{i}(s\chi_{122}+c\chi_{322})+\mathbf{j}\chi_{222}+\mathbf{k}(-c\chi_{122}+s\chi_{322})\}, \qquad (36.2)$$

где, как и выше, $s=\sin\theta$, $c=\cos\theta$, а $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — это орты системы ε-координат.

С учетом (36) для скалярного произведения $\mathbf{e}_2\mathbf{P}_\beta$ из (33) находим

$$\mathbf{e}_2\mathbf{P}_\beta=U_1^2(\mathbf{r})[s(s\chi_{122}+c\chi_{322})-c\beta^2(-c\chi_{122}+s\chi_{322})]=$$
$$=a\chi_{122}-a\rho\chi_{322}, \qquad (37)$$

где коэффициенты a и ρ определены в (19).

Запишем (33), используя (16), в E-координатах, подставим в полученное уравнение выражения (35), (37) и найдем интересующее нас уравнение для скалярного поля U_2 второй гармоники:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2\rho\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}+\frac{b}{a}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_2^2\right)U_2=F_2(\mathbf{r}), \quad (38)$$

где параметр b определен в (19), k_2 в (29);

$$F_2(\mathbf{r})=2k_2\sigma_2 aP_e+2Ca\rho\chi_{322}P_e-$$

$$-\frac{2\pi}{n_o^2}\left(\chi_{122}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\chi_{222}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\chi_{322}\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\right)P_e;$$

$$\sigma_2=-\frac{\pi k_2}{(n_2^e)^2}\chi_{122}$$

– второй коэффициент нелинейной связи.

Уравнение (38) по своему содержанию является полным аналогом (28), но для «e»-волны и на удвоенной частоте. Отметим еще, что структуры этих уравнений полностью совпадут, если в (38) положить $\beta=1$ (среда изотропная). Повторяя процедуру, использованную в разд. 2, получим, что у кристалла KDP σ_2 из (38) зависит от $\chi_{122}=$ $=d_{36}\sin(\theta)\sin(2\varphi)$, т.е. опять приходим к хорошо известному выражению для коэффициента нелинейной связи.

Итак, основной результат, полученный в разд. 2 и 3, сформулируем следующим образом. Если по условиям задачи приближенные представления (6) + (26) для поля на основной частоте и поля ВГ объявляются подходящими, то (28) и (38) (в данном случае записанные в E-координатах) образуют систему дифференциальных уравнений для нахождения амплитуд U_1 и U_2 из (6). Эта система и является искомым скалярным приближением строгой задачи, определяемой нелинейными волновыми уравнениями (4).

4. Интегральные уравнения для основного излучения и ВГ

Рассмотрим переход к интегральному уравнению для скалярного поля U_2 второй гармоники. Для поля на основной частоте все расчеты оказываются совершенно аналогичными и более простыми.

Обратимся к системе ε-координат и введем функцию Грина $g_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$, которая является решением уравнения

$$\nabla_\beta^2 g_e+k_{2e}^2 g_e=-4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0), \quad (39)$$

где ∇_β^2 и k_{2e} определены в (32).

Легко показать, что решение (39) имеет вид

$$g_e(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=\frac{1}{\beta}\frac{e^{ik_{2e}R'}}{R'}, \quad (40)$$

где

$$R'=\sqrt{\frac{(x-x_0)^2}{\beta^2}+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2};$$

$$\beta=n_{2e}(2\omega)/n_{2o}(2\omega).$$

Умножим (33) на g_e, а (39) – на U_2, вычтем из первого второе и проинтегрируем полученное равенство по произвольному объему V, ограниченному замкнутой поверхностью S. В результате для произвольной внутренней точки наблюдения $\mathbf{r}_0$ получим

$$U_2(\mathbf{r}_0)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_V\left(g_e\nabla_\beta^2 U_2-U_2\nabla_\beta^2 g_e\right)dV-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_V F_2(\mathbf{r})\,g_e(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)dV, \quad (41)$$

где через $F_2(\mathbf{r})$ мы обозначили правую часть (33).

Перейдем в (41) к новым координатам

$$x'=x/\beta,\ y'=y,\ z'=z \quad (42)$$

и для первого интеграла $\left(I(\mathbf{r}_0)\right)$ в правой части (41) получим (штрихи не указываем)

$$I(\mathbf{r}_0)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_V\left(g_e\nabla^2U_2-U_2\nabla^2 g_e\right)\beta\,dV. \quad (43)$$

Здесь явный вид g_e можно найти из (40) с помощью (42) и $dV_\varepsilon=dx_\varepsilon\,dy_\varepsilon\,dz_\varepsilon$ следует заменить на $\beta dx'dy'dz'=\beta dV'$.

По теореме Грина для (43) получим

$$I(\mathbf{r}_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left(g_e\frac{\partial U_2}{\partial\mathbf{n}}-U_2\frac{\partial g_e}{\partial\mathbf{n}}\right)\beta dS, \quad (44)$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к поверхности S, ограничивающей V.

Выберем в качестве S плоскость $Z_E=0$ системы E-координат, замкнутую полусферой бесконечного радиуса в области $Z_E>0$. Интегралом на полусфере пренебрегаем на обычных основаниях [3, 5] и заключаем из этого, что поверхностью S в (44) оказывается плоскость $Z_E=0$.

Используя (16), находим, что в ε-координатах положение внешней нормали к S определяется выражением

$$\mathbf{n}=\{-c,\ 0,\ -s\}, \quad (45.1)$$

а в координатах (42)

$$\mathbf{n}=\{-c/\beta, 0, -s\}, \quad (45.2)$$

где, как и раньше, $s=\sin\theta$, $c=\cos\theta$.

Подставим (45.2) в (44). Тогда

$$I(\mathbf{r}_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left[-g_e(c/\beta)\frac{\partial U_2}{\partial x}-g_e s\frac{\partial U_2}{\partial z}+\right.$$

$$\left.+U_2(c/\beta)\frac{\partial g_e}{\partial x}+U_2 s\frac{\partial g_e}{\partial z}\right]\beta\,dS. \quad (46)$$

Далее в (46) возвращаемся к ε-координатам, учитываем, что

$$dS'\sim dx'dy'\to\frac{1}{\beta}dx_\varepsilon dy_\varepsilon\sim\frac{1}{\beta}dS_\varepsilon, \quad (47)$$

и подставляем полученное выражение в (41). В результате получаем

$$U_2(\mathbf{r}_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_V F_2(\mathbf{r})\, g_e(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\, dV +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[-g_e c\frac{\partial U_2}{\partial x} - g_e s\frac{\partial U_2}{\partial z} + U_2 c\frac{\partial g_e}{\partial x} + U_2 s\frac{\partial g_e}{\partial z}\right] dS. \quad (48)$$

Выражение (48) запишем в E-координатах, учтем, что из (16)

$$\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon} = s\frac{\partial}{\partial x_E} + c\frac{\partial}{\partial z_E},\ \frac{\partial}{\partial z_\varepsilon} = -c\frac{\partial}{\partial x_E} + s\frac{\partial}{\partial z_E},$$

и получим окончательно

$$U_2(\mathbf{r}_0) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} dxdy \int_0^{\infty} F_2(\mathbf{r}) g_e(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) dz +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty}\left(U_2\frac{\partial g_e}{\partial z} - g_e\frac{\partial U_2}{\partial z}\right)_{z=0} dxdy, \quad (49)$$

где g_e — это функция (40), записанная в E-координатах и имеющая вид [4]:

$$g_e(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = \frac{\sqrt{a}}{\beta}\frac{e^{ik_2R'}}{R'}; \quad (50)$$

$$R' = \sqrt{\frac{a^2}{\beta^2}(x - x_0 + \rho z_0 - \rho z)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2};$$

k_2 был определен в (29).

Выражение (49), записанное в E-координатах, и является «интегральным эквивалентом» дифференциального уравнения (38). Совершенно аналогично, но не привлекая дополнительную систему координат (42), можно показать, что дифференциальное уравнение (28) эквивалентно интегральному уравнению, которое в E-координатах имеет вид

$$U_1(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty}\left[g_o\frac{\partial U_1}{\partial z} - U_1\frac{\partial g_o}{\partial z}\right]_{z=0} dxdy -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} dxdy \int_0^{z_0} F_1(\mathbf{r}) g_o(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) dz, \quad (51)$$

где функция F_1 была определена в (28);

$$g_o(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = e^{ik_1R}/R; \quad (52)$$

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2};$$

k_1 определен в (23).

В (49) поверхностный интеграл берется на плоскости $Z = 0$. Это позволяет несколько упростить конечный результат [6], используя вместо $g_e(\mathbf{r},\ \mathbf{r}_0)$ функцию

$$G_e(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = g_e(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) - g_{2m}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0), \quad (53)$$

где $g_{2m} = g_e(x, y, -z, \mathbf{r}_0)$, которая также является строгим решением (39).

Подставляя G_e в (49), убеждаемся, что под интегралом по объему появляются функции

$$F_2\, g_e \sim e^{i(2k_1 - k_2)z},\ F_2 g_{2m} \sim e^{i(2k_1 + k_2)z}. \quad (54)$$

С учетом того что значения k_1z и k_2z очень велики, выражение F_2g_{2m} из (54) оказывается быстро осциллирующей функцией переменной z и интегралом по dz от этой функции можно пренебречь.

Таким образом, привлекая (53) и аналогичную функцию для «o»-волны:

$$G_o(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = g_o(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) - g_{1m}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0), \quad (55)$$

где $g_{1m}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = g_o(x, y, -z, \mathbf{r}_0)$, получаем вместо (49) и (51) соответственно

$$U_1(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty}\left(U_1\frac{\partial g_o}{\partial z}\right)_{z=0} dxdy -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} dxdy \int_0^{z_0} F_1(\mathbf{r}) g_o(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) dz, \quad (56.1)$$

$$U_2(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty}\left(U_2\frac{\partial g_e}{\partial z}\right)_{z=0} dxdy -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} dxdy \int_o^{z_o} F_2(\mathbf{r}) g_e(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) dz, \quad (56.2)$$

где F_1 и F_2, определенные в (28) и (38) соответственно, равны нулю вне кристалла; плоскость наблюдения $z = z_0$ является внутренней по отношению к кристаллу, т.е.

$$0 \le z_o \le L\,. \quad (57)$$

Выражения (56) и являются требуемой нам системой интегральных уравнений для скалярных амплитуд U_1 и U_2 поля на основной частоте и ВГ. При выводе (56) неявно предполагались выполненными следующие условия.

1. Радиус лазерного пучка в кристалле должен быть много меньше поперечных размеров самого кристалла. Это позволяет в интегралах по $dxdy$ из (56) использовать бесконечные пределы.

2. Преломление полей на входной и выходной гранях кристалла не учитывается, т.е. и граничные условия, и само решение (56) считаются определенными внутри кристалла.

3. Отражением от выходной грани кристалла и обратным рассеянием волн пренебрегаем, что и позволяет использовать (56) для любой внутренней плоскости [7].

Отметим еще, что в параксиальном приближении (см. разд. 5) (56) можно легко обобщить на случай, когда $z_0 > L$ [8, 9]. Однако в рамках настоящей статьи эта возможность принципиального интереса для нас не представляет и мы ограничиваемся рамками, определенными неравенством (57).

5. Уравнения для ГВГ в параксиальном приближении

Предположим, что нелинейный кристалл является слабоанизотропной средой, а лазерное излучение — слаборасходящимся пучком, т.е. имеет место

$$|\rho| \sim |\alpha| \sim \mu \ll 1, \tag{58}$$

где α — расходимость пучка; ρ — угол двулучепреломления, определенный в (19).

Условия (58) достаточно [3] для того, чтобы в (56) выполнялось

$$\left|\frac{x-x_0}{z-z_0}\right| \sim \left|\frac{y-y_0}{z-z_0}\right| \sim \mu \ll 1. \tag{59}$$

При этом для величин, входящих в (56), получаем следующие представления [4]:

$$R = (z_0 - z) + \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2(z_0 - z)} + O(\mu^3, \mu^4, \ldots),$$

$$R' = (z_0 - z) + \frac{(x - x_0 + \rho z_0 - \rho z)^2 + (y - y_0)^2}{2(z_0 - z)} + O(\mu^3, \mu^4, \ldots), \tag{60}$$

$$a \sim b \sim \beta \approx 1 + O(\mu, \mu^2, \ldots.),$$

где $O(\mu, \mu^2, \mu^3, \ldots)$ — величины порядка μ, μ^2, μ^3 и т.д.

Еще одним определяющим признаком параксиального приближения является правомочность представления интересующих нас полей U_1 и U_2 в виде квазиплоских волн, т.е. использование

$$U_{1,2}(\mathbf{r}) = A_{1,2}(\mu x, \mu y, \mu^2 z)\, e^{ik_{1,2} z}, \tag{61}$$

где μ — малый параметр (58).

С помощью (61) для функций F_1 и F_2 из (58) получим

$$\begin{aligned} F_1 &= 2k_1\sigma_1 A_1^* A_2 e^{i(k_2 - k_1)z} + O(\mu, \mu^2, \ldots), \\ F_2 &= 2k_2\sigma_2 A_1^2 e^{i2k_1 z} + O(\mu, \mu^2, \ldots). \end{aligned} \tag{62}$$

Подставим (60)–(62) в (56) и сохраним в показателях экспонент слагаемые до второго порядка малости включительно. Для слагаемых, стоящих вне показателей экспонент, ограничимся нулевым порядком малости. В результате вместо (56) получим следующую систему интегральных уравнений для комплексных амплитуд A_1 и A_2 из (61):

$$A_1(\mathbf{r}_0) = -\frac{ik_1}{2\pi z_0} \times$$
$$\times \iint_{-\infty}^{+\infty} A_1(x,y) \exp\left[ik_1 \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2z_0}\right] dxdy -$$
$$- i\sigma_1 \int_o^{z_0} dz \left[-\frac{ik_1}{2\pi(z_0 - z)}\right] e^{i\Delta_k z} \times$$
$$\times \iint_{-\infty}^{+\infty} A_1^*(\mathbf{r}) A_2(\mathbf{r}) \exp\left[ik_1 \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2(z_0 - z)}\right] dxdy, \tag{63.1}$$

$$A_2(\mathbf{r}_0) = -\frac{ik_2}{2\pi z_0} \iint_{-\infty}^{+\infty} A_2(x,y) \times$$
$$\times \exp\left[ik_2 \frac{(x - x_0 + \rho z_0)^2 + (y-y_0)^2}{2z_0}\right] dxdy -$$
$$- i\sigma_2 \int_o^{z_0} dz \left[-\frac{ik_2}{2\pi(z_0 - z)}\right] e^{-i\Delta_k z} \iint_{-\infty}^{+\infty} A_1^2(\mathbf{r}) \times$$
$$\times \exp\left[ik_2 \frac{(x - x_0 + \rho z_0 - \rho z)^2 + (y-y_0)^2}{2(z_0 - z)}\right] dxdy, \tag{63.2}$$

где $A_1(x, y)$ и $A_2(x, y)$ — граничные условия, определенные на входе в кристалл, внутри его.

Прямой подстановкой легко убедиться в том, что интегральные уравнения (63) эквивалентны соответственно следующим дифференциальным уравнениям:

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2ik_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right] A_1 = -i\sigma_1 A_1^* A_2\, e^{i\Delta_k z}, \tag{64.1}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + \rho\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik_2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right] A_2 = -i\sigma_2 A_1^2\, e^{-i\Delta_k z}. \tag{64.2}$$

Уравнения (64) называют укороченными (или параболическими), и именно они являются основными в теории генерации гармоник лазерного излучения [1–3].

6. Асимптотически точное решение системы интегральных уравнений

Если левые и правые части (56) продифференцировать по z_0, то можно получить такую форму системы уравнений, для которой разработан эффективный метод численного расчета [10]. Не рассматривая здесь этот подход, имеющий название — метод разделения по физическим свойствам, попробуем получить аналогичный результат, для нашей конкретной задачи, исходя из простых физических соображений. Нам потребуются основные положения метода возмущений [3], который, в свою очередь, является еще одним способом решения нелинейной задачи.

Представим систему уравнений (56) в виде

$$\begin{aligned} U_1(x,y,L) &= U_{1л}(x,y,L) + \sigma \hat{L}_1 U_{1(\mathbf{r})}^* U_2(\mathbf{r}), \\ U_2(x,y,L) &= U_{2л}(x,y,L) + \sigma \hat{L}_2 U_1^2(\mathbf{r}), \end{aligned} \tag{65}$$

где L — длина кристалла; $U_{1л}$ и $U_{2л}$ — решения соответствующих линейных задач для полей на выходе из кристалла (они совпадают с интегралами по плоскости в (56)); $\hat{L}_1$ и $\hat{L}_2$ — интегралы по объему из (56), и для простоты положим $\sigma_1 \approx \sigma_2 \approx \sigma$.

Уравнения (65) решаются с граничными условиями, которые определяются на входе в кристалл:

$$U_1(x,y,0) = U_{10}(x,y),\ U_2(x,y,0) = U_{20}(x,y). \tag{66}$$

Очевидно, что при заданных условиях (66) функции $U_{1л}$ и $U_{2л}$ также следует считать известными.

Перепишем уравнения (65) следующим образом:

$$V_1(x,y,L)=V_{1\text{л}}(x,y,L)+\mu\hat{L}_1\frac{1}{L}V_1^*(\mathbf{r})V_2(\mathbf{r}),$$
$$V_2(x,y,L)=V_{2\text{л}}(x,y,L)+\mu\hat{L}_2\frac{1}{L}V_1^2(\mathbf{r}), \tag{67}$$

где

$$V_{1,2}=U_{1,2}/A_0;\ (V_{1,2})_\text{л}=(U_{1,2})_\text{л}/A_0;$$

A_0 — максимальное значение функции $U_{10}(x, y)$; μ — безразмерный параметр, определяемый выражением

$$\mu=\sigma LA_0. \tag{68}$$

Если

$$\mu\ll 1, \tag{69}$$

то решение (67) целесообразно искать в виде

$$V_1=V_{10}+\mu V_{11}+\mu^2V_{12}+\ldots,$$
$$V_2=V_{20}+\mu V_{21}+\mu^2V_{22}+\ldots . \tag{70}$$

Подставим (70) в (67) и приравняем коэффициенты при μ в одинаковых степенях. Тогда в нулевом приближении (невозмущенная, линейная задача) решение запишется в виде $V_{10}=V_{1\text{л}}$, $V_{20}=V_{2\text{л}}$, а решением (67) в первом приближении окажутся функции

$$V_1=V_{10}+\mu V_{11}=V_{1\text{л}}+\mu\hat{L}_1\frac{1}{L}V_{1\text{л}}^*V_{2\text{л}},$$
$$V_2=V_{20}+\mu V_{21}=V_{2\text{л}}+\mu\hat{L}_2\frac{1}{L}V_{1\text{л}}^2. \tag{71}$$

Не составляет труда показать, как будут выглядеть приближения более высоких порядков, но мы ограничимся выражениями (71), которые в первоначальных обозначениях принимают вид

$$U_1=U_{1\text{л}}+\sigma\hat{L}_1U_{1\text{л}}^*U_{2\text{л}},$$
$$U_2=U_{2\text{л}}+\sigma\hat{L}_2U_{1\text{л}}^2. \tag{72}$$

Приближение (72) чаще всего используют вместе с предположением о том, что функция V_{20} из (70) равна нулю (поле ВГ отсутствует на входе в кристалл). При этом получается, что в (72) $U_1=U_{1\text{л}}$ (поле на основной частоте не испытывает нелинейного возмущения) и мы приходим к так называемому приближению заданного поля, широко применяемому [1–3] для описания низкоэффективной генерации гармоник.

Отметим еще один достаточно очевидный, но весьма важный момент. Обозначим точное решение нелинейной задачи через $(U_{1,2})_\text{Т}$, а решение в первом приближении [т.е. (72)] — через $(U_{1,2})_\text{П}$. При этом легко показать, что, используя приближение (72), мы при вычислении взаимодействующих полей будем допускать ошибки

$$\eta_{1,2}=\left|\left[(U_{1,2})_\text{Т}-(U_{1,2})_\text{П}\right]/(U_{1,2})_\text{Т}\right|\sim\mu^2, \tag{73}$$

где μ определяется выражением (68).

Учитывая сказанное выше, перейдем к реализации непосредственной цели настоящего раздела. Разобъем мысленно нелинейный кристалл плоскостями, нормальными к продольной оси Z, на N слоев. При этом образуется $N+1$ плоскость:

$$z=z_k=(k-1)\Delta,\ \Delta=L/N,\ k=1,\ 2,\ N+1. \tag{74}$$

Предположим, что каким-то образом решение (65) для произвольной плоскости $z=z_k$ оказалось известным, соответственно оказались известными функции

$$U_1(x,y,z_k)=U_{1,k}(x,y),\ U_2(x,y,z_k)=U_{2,k}(x,y), \tag{75}$$

и наша задача состоит в том, чтобы найти функции U_1 и U_2 на плоскости $z=z_{k+1}$ (т.е. определить $U_{1,k+1}$ и $U_{2,k+1}$), используя (75) в качестве новых граничных условий.

Понятно, что такая «промежуточная» задача оказывается ничем не проще исходной, поскольку она все равно сводится к решению все тех же уравнений (65), но только с другими граничными условиями. Другое дело, что, выбирая величину N из (74) достаточно большой, мы можем с любой требуемой точностью удовлетворить условию

$$\mu_k=(\sigma\Delta A_{0k})=(\sigma\frac{L}{N}A_{0k})\ll 1, \tag{76}$$

где A_{0k} — максимальное значение функции $U_{1,k}(x,y)$, и, следовательно, получить сколько угодно хорошее приближение для функций $U_{1,k+1}$ и $U_{2,k+1}$, воспользовавшись (72).

Реализуя данную возможность, находим, что

$$U_{1,k+1}(x,y,z_{k+1})=U_{1\text{л},k}(x,y,z=\Delta)+U_{1\text{н},k}(x,y,z=\Delta),$$
$$U_{2,k+1}(x,y,z_{k+1})=U_{2\text{л},k}(x,y,z=\Delta)+U_{2\text{н},k}(x,y,z=\Delta), \tag{77}$$

где

$$U_{1\text{л},k}(\mathbf{r}_0)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}U_{1,k}(x,y)\left[\frac{\partial g_o(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial z}\right]_{z=0}dxdy,$$

$$U_{2\text{л},k}(\mathbf{r}_0)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}U_{2,k}(x,y)\left[\frac{\partial g_e(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial z}\right]_{z=0}dxdy,$$

$$U_{1\text{н},k}(r_0)=\sigma\hat{L}_1U_{1\text{л},k}^*U_{2\text{л},k}=$$
$$=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{z_0}dz\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}F_1\left[U_{1\text{л},k}^*(\mathbf{r}),U_{2\text{л},k}(\mathbf{r})\right]g_o(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)dxdy,$$

$$U_{2\text{н},k}(r_0)=\sigma\hat{L}_2U_{1\text{л},k}^2=$$
$$=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{z_0}dz\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}F_2\left[U_{1\text{л},k}^2(\mathbf{r})\right]g_e(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)dxdy;$$

$$\mathbf{r}=\{x,y,z\},\ \mathbf{r}_0=\{x_0,y_0,z_0\};$$

z и z_0 изменяются в интервале от 0 до Δ; явный вид функций F_1 и F_2 приводится в (28) и (38) соответственно.

Формула (77) является рекуррентной для нахождения решения системы уравнений (65) на любой плоскости $z = z_k$ внутри нелинейного кристалла. Действительно, на первом шаге ($k = 1$) используем граничные условия (66), т.е. полагаем, что

$$\begin{aligned} &U_{1,1}(x, y, z_1 = 0) = U_{10}(x, y), \\ &U_{2,1}(x, y, z_1 = 0) = U_{20}(x, y), \end{aligned} \tag{78}$$

и с помощью (77) и (78) определяем функции $U_{1,2}(x, y, z_2)$ и $U_{2,2}(x, y, z_2)$. Затем, подставляя в (77) эти выражения в качестве следующих граничных условий, найдем решение задачи на плоскости $z = z_3$ и т.д. В результате, повторив этот процесс N раз, определим функции

$$U_{1,N+1}(x, y, z_{N+1}) = U_1(x, y, L)$$

и

$$U_{2,N+1}(x, y, z_{N+1}) = U_2(x, y, L),$$

т.е. искомые выражения для скалярных полей U_1 и U_2 на выходе из нелинейного кристалла.

Оценим ошибку решения, неизбежно возникающую при использовании (77). Обратившись к (73), замечаем, что, заменяя на каждом шаге строгое решение приближенным (72), мы не учитываем слагаемые, пропорциональные μ_k^2 из (76). Таким образом, в результате, совершив требуемые N шагов, мы теряем величины порядка

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k^2 \leq N(\mu_{k,\max})^2 = N(\sigma \Delta A_0)^2 = N\left(\sigma \frac{L}{N} A_0\right)^2 = = \frac{(\sigma L A_0)^2}{N} = \frac{\mu^2}{N}. \tag{79}$$

Из (79) следует, что, выбирая число N достаточно большим, ошибку, вносимую (77), можно всегда довести до требуемого минимума.

Итак, можно констатировать, что задача в формально-методологическом плане оказалась решенной. Выражение (77) как раз и является искомым аналитическим решением системы нелинейных уравнений, представленным в виде рекуррентной формулы. При заданном конечном значении N решение является приближенным и точность его определяется (79). Если N стремится к бесконечности, то ошибка вычислений стремится к нулю, что и превращает (77) в асимптотически точное решение нелинейной задачи.

Несмотря на то что предложенный подход предполагает использование компьютера, мы склонны считать, что выражение (77) является именно приближенным решением системы уравнений, а не просто алгоритмом для реализации численного счета. На наш взгляд, аргументом в пользу сказанного является то, что в отличие от классических численных методов (например, предложенного в [9]), (77) сохраняет физический смысл и практическую значимость даже тогда, когда величина N выбирается равной единице. Более того, можно указать ситуации (например, величина A_0 в (67) достаточно мала), когда при $N = 1$ (77) оказывается хорошим приближением к точному решению.

Отметим еще раз, что уравнение (77) имеет исключительно методологическое значение. Использовать (77) в качестве алгоритма для выполнения практических оценок оказывается делом весьма сложным при $N > 1$, и для упрощения задачи попробуем избавиться от интегралов, входящих в выражения для нелинейных добавок. Для этого воспользуемся общими физическими соображениями, не имеющими никакого отношения к теории численных методов, и рассмотрим ситуацию, когда число N достаточно велико.

Нетрудно показать, что в (77) условие $z_0 \to 0$ ($N \to \infty$) превращает экспоненты из $g_o(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ и $g_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ в быстро осциллирующие функции переменных x и y по сравнению с $F_1(\mathbf{r})/R$ и $F_2(\mathbf{r})/R'$. Это означает, что интегралы по dx и dy можно оценить асимптотически, воспользовавшись методом стационарной фазы [5]. В результате для нелинейных добавок из (77) получим

$$U_{1\text{н},k}(\mathbf{r}_0) = -\frac{i}{2k_1} \times \\ \times \int_0^{z_0} F_1\left[U^*_{1\text{л},k}(x_{1k}, y_{1k}, z), U_{2\text{л},k}(x_{1k}, y_{1k}, z)\right] e^{ik_1(z_0 - z)} dz, \tag{80}$$

$$U_{2\text{н},k}(\mathbf{r}_0) = -\frac{i}{2k_2} \int_0^{z_0} F_2\left[U^2_{1\text{л},k}(x_{2k}, y_{2k}, z)\right] e^{ik_2(z_0 - z)} dz,$$

где для точек стационарности фаз имеем

$$x_{1k} = x_0,\ y_{1k} = y_0 \ \text{ и } \ x_{2k} = x_0 - \rho z_0 + \rho z,\ y_{2k} = y_0.$$

Физический смысл проведенной акции совершенно понятен. При вычислении нелинейных добавок мы пренебрегли дифракцией. Очевидно, что это приближение оказывается тем точнее, чем меньше дистанция Δ, на которой происходит нелинейное взаимодействие.

В зависимости от требуемой точности можно предложить много вариантов упрощения (80). Мы воспользуемся самым грубым приближением, но приводящим к наиболее простым конечным результатам.

Интегралы в правой части (80) можно рассматривать как функции $\Phi_{1,2}(z_0)$. Представим эти функции в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$. После элементарных вычислений, ограничившись первыми отличными от нуля членами ряда, получим

$$\Phi_{1,2}(z_0) = \int_0^{z_0} F_{1,2}(z_0, z) dz \approx z_0 \left[F_{1,2}(z_0, z = z_0)\right]_{z_0 = 0}. \tag{81}$$

Используя (81), для (80) имеем

$$U_{1н,k}(\mathbf{r}_0) = -\frac{iz_0}{2k_1} F_1[U^*_{1,k}(x_0, y_0, z_k) U_{2,k}(x_0, y_0, z_k)],$$
$$U_{2н,k}(\mathbf{r}_0) = -\frac{iz_0}{2k_2} F_2[U^2_{1,k}(x_0, y_0, z_k)], \tag{82}$$

где мы учли, что из (75) и (77) очевидно следует

$$U_{1л,k}(x, y, 0) = U_{1,k}(x, y, z_k), \ \ U_{2л,k}(x, y, 0) = U_{2,k}(x, y, z_k).$$

Физическое содержание приближения (82) также не должно вызывать недоразумений. Переход к (82) означает, что поля $U_{1,k}$ и $U_{2,k}$ не претерпевают изменений на дистанции z_0, т.е. в пределах одного шага. Другими словами, использование (82) подразумевает, что для вычисления нелинейных добавок используется приближение плоских волн (или, точнее, пучков с плоским фазовым фронтом). Асимптотическую (при $\Delta \to 0$) точность такого приближения мы обсуждали ранее [8].

Подставляем (82) в (77) и получаем требуемый нам упрощенный вариант рекуррентной формулы:

$$U_{1,k+1}(x, y, z_{k+1}) = U_{1л,k}(x, y, z = \Delta) -$$
$$- \frac{i\Delta}{2k_1} F_1[U^*_{1,k}(x, y, z_k), U_{2,k}(x, y, z_k)],$$
$$U_{2,k+1}(x, y, z_{k+1}) = U_{2л,k}(x, y, z = \Delta) - \frac{i\Delta}{2k_1} F_2[U^2_{1,k}(x, y, z_k)]. \tag{83}$$

Окончательное выражение (83) оказалось точно совпадающим с результатом, к которому приводит метод разделения по физическим свойствам, предложенный в [9] и применяемый непосредственно к системе, вообще говоря, исходных дифференциальных уравнений. Поскольку ошибки, возникающие при использовании конструкций вида (83), детально исследуются в работе [9], то мы здесь на этих вопросах останавливаться не будем.

Сравнивая рекуррентные формулы (77) и (83) – два алгоритма решения одной и той же системы уравнений, легко заметить их принципиальное отличие. При фиксированном значении N точность решения (83) уже не зависит от амплитуды поля на основной частоте, что характерно для решения (77). Это и понятно, поскольку и приближение (80), и приближение (82) остаются в силе для любых амплитуд взаимодействующих полей, если дистанция z_0 достаточно мала. Поскольку использование указанных приближений правомерно только при достаточно малом шаге, то и само выражение (83) теряет физическое наполнение при $N \to 1$. Именно это мы и имели в виду, когда говорили выше о разном методологическом содержании предлагаемого подхода (77) и уже известного (83).

Заключение

В настоящей статье переход к скалярному приближению продемонстрирован на примере задачи о ГВГ при скалярном «*ooe*»-взаимодействии волн в квадратично нелинейном кристалле. Отметим, что методологическую основу указанного перехода, как и в задаче о линейном поле, составляют общие определения для обыкновенных и необыкновенных волн [4], распространяющихся в одноосной среде. В силу этого представляется вполне очевидным, что все сказанное можно будет обобщить на любые виды нелинейных процессов, протекающих в одноосной среде, т.е. на те случаи, когда электромагнитное излучение может существовать только в виде «*o*»- или «*e*»-волны. При этом, как и в рассмотренной ситуации, любая нелинейная задача такого рода будет сводиться к системе, подобной (56). Понятно, что число интегральных уравнений и вид подынтегральных функций (Fj) будут варьироваться в зависимости от конкретного типа рассматриваемого нелинейного процесса.

Достаточно строгий вывод аналитических решений для скалярных амплитуд взаимодействующих волн (и соответствующих систем дифференциальных и интегральных уравнений) непосредственно из уравнений Максвелла, приведенный в настоящей статье, представляет, на наш взгляд, безусловное методологическое значение. Существенно менее очевидным оказывается вопрос о том, имеет ли практический смысл в рамках скалярной теории использовать уравнения вида (56) или достаточно ограничиться параксиальным приближением, т.е. хорошо известными уравнениями (63). Понятно, что по мере увеличения расходимости лазерного пучка вклад слагаемых, отброшенных при выводе параболических уравнений [в первую очередь имеются в виду разложения (62)], будет расти, и в этом смысле уравнения (56), казалось бы, должны обеспечивать более точное решение задачи. Однако, с другой стороны, следует иметь в виду, что при увеличении расходимости излучения сама возможность использования скалярного приближения, т.е. представлений (6), будет становиться все менее очевидной. На наш взгляд, однозначный ответ на этот вопрос можно получить только при наличии строгого решения принципиально векторной задачи, отыскание которого выходит за рамки настоящей статьи.

Автор искренне признателен В.В. Колосову за ценные советы и замечания.

1. *Ахманов С.А., Хохлов Р.В.* Проблемы нелинейной оптики. Электромагнитные волны в нелинейных диспергирующих средах. М.: ВИНИТИ, 1965. 295 с.
2. *Дмитриев В.Г., Тарасов Л.В.* Прикладная нелинейная оптика. Изд. 2-е. М.: Физматлит, 2004. 512 с.
3. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. Изд. 2-е. М.: Наука, 1990. 432 с.
4. *Творогов С.Д., Троицкий В.О.* Точные и приближенные представления для лазерного пучка в одноосной, однородной среде // Оптика атмосф. и океана. 2005. Т. 18. № 9. С. 744–753.
5. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. Изд. 2-е. М.: Наука, 1973. 719 с.
6. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 2. М.: Наука, 1974. 655 с.
7. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Часть 2. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 463 с.
8. *Колосов В.В., Троицкий В.О.* Параксиальное приближение для задачи распространения пучков

в плоскослоистой среде // Оптика атмосф. и океана. 2005. Т. 18. № 9. С. 754–759.
9. *Троицкий В.О.* ГВГ при фокусировке пучка в одноосный кристалл скрещенными цилиндрическими линзами. Приближение заданного поля // Оптика атмосф. и океана. 2006. Т. 19. № 8. С. 741–747.
10. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. 535 с.

V.O. Troitskii. **Scalar approximation for the SHG in the uniaxial crystal.**

The problem is considered about the second harmonic generation in a quadratically nonlinear uniaxial crystal. It is shown, in what way ignoring the effects of depolarization of interacting waves, one can directly derive a set of differential nonlinear wave equations for scalar fields at frequencies ω and 2ω from the Maxwell equations. The transition to an equivalent set of integral equations is considered in detail. It is shown that the derived equations for the beams with a narrow spatial spectrum are converted to the known shortened equations for slowly varying complex amplitudes of interacting waves. The derivation of a recurrence formula is demonstrated, which is proposed to be considered as an approximated (with a known accuracy) analytical solution of a scalar nonlinear problem and is converted to a known algorithm of the asymptotically exact numerical solution with increasing the number of steps.