«Оптика атмосферы и океана», **23**, № 9 (2010)

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛН

УДК 535.361:535.51+519.676

Оценка методом Монте-Карло параметров асимптотики помехи обратного рассеяния с учетом поляризации

Г.А. Михайлов[1,2], Н.В. Трачева[1], С.А. Ухинов[1,2]*

[1]*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН*
630090, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 6
[2]*Новосибирский государственный университет*
630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2

Поступила в редакцию 11.06.2010 г.

Дается оценка параметров временнóй асимптотики потока поляризованного излучения, выходящего из полубесконечного слоя рассеивающего и поглощающего вещества, при освещении его внешним направленным источником. Проведенные на многопроцессорном кластере вычисления показали, что в этом случае поляризация не влияет на параметры асимптотики отраженного излучения, определяющего «помеху обратного рассеяния» при оптическом зондировании. Для ограниченных сред параметры асимптотики поляризованного и неполяризованного излучения различаются в зависимости от размера области переноса, т.е. деполяризация потока излучения несколько запаздывает относительно перехода к асимптотике.

Ключевые слова: перенос поляризованного излучения, временнáя асимптотика, метод Монте-Карло; polarized radiation transfer, time asymptotics, Monte Carlo method.

1. Вводная информация

Рассмотрим процесс переноса поляризованного изучения в рассеивающей и поглощающей среде. Для описания поляризационных свойств света воспользуемся способом, предложенным Дж.Г. Стоксом в 1852 г. Он ввел четыре параметра I, Q, U, V, которые определяют в совокупности интенсивность, степень поляризации, плоскость поляризации и степень эллиптичности излучения. Используем в качестве компонентов вектор-параметра Стокса $\mathbf{I} = (I, Q, U, V)^{\mathrm{T}}$ в четырехмерном функциональном пространстве. При этом для параметров Стокса справедливы следующие соотношения: $I \geq 0$, $I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2$.

Отметим, что для естественного света $Q = U = V = 0$, для эллиптически поляризованного $I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$.

Традиционной математической моделью процесса переноса поляризованного излучения является стационарное векторное интегродифференциальное уравнение переноса

$$\omega\nabla\mathbf{\Phi}(r,\omega) + \sigma(r)\mathbf{\Phi}(r,\omega) = \int_{\Omega}\sigma_s(r)P(\omega',\omega,r)\mathbf{\Phi}(r,\omega')\,d\omega' + \mathbf{f}_0(r,\omega),$$

или в операторном виде

$$L\mathbf{\Phi} + \sigma\mathbf{\Phi} = S\mathbf{\Phi} + \mathbf{f}_0, \qquad (1)$$

где $\mathbf{\Phi} = (\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\Phi_4)$ — вектор-функция (вектор Стокса) плотности потока частиц («векторных фотонов»), иначе — вектор-функция интенсивности излучения; Ω — пространство единичных векторов направления; $\omega \in \Omega$, $r \in D \subset R^3$; σ — полное сечение, $\sigma = \sigma_s + \sigma_c$ (σ_c — сечение поглощения, σ_s — сечение рассеяния); $\mathbf{f}_0 = (f_0^{(1)}, f_0^{(2)}, f_0^{(3)}, f_0^{(4)})^{\mathrm{T}}$ — вектор-функция плотности распределения источника частиц. Матричная функция рассеяния (фазовая матрица рассеяния) $P(\omega',\omega,r)$ определяется соотношением $P(\omega',\omega,r) = \Theta(\pi - i_2)\times R(\omega',\omega,r)\Theta(-i_1)$, где Θ — специальная матрица поворота; R — матрица рассеяния; i_1 — угол между плоскостью ω', s и плоскостью рассеяния ω, ω'; i_2 — угол между плоскостью рассеяния ω, ω' и плоскостью ω, s; s — вектор локальной сферической системы координат (более подробно см. [1, 2]). Для изотропной среды матрица рассеяния R имеет вид

$$R(\mu,r) = \frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & -r_{43} & r_{44} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где $\mu = (\omega, \omega')$; r_{11} — индикатриса рассеяния, $\int r_{11}(\mu)d\mu = 1$. Если рассеивающие частицы являются однородными сферами, то

$$r_{11} = r_{22},\ \ r_{12} = r_{21},\ \ r_{33} = r_{44},\ \ r_{34} = r_{43}.$$

Известно, что для неполяризованного излучения асимптотика нестационарного потока частиц при

---

* Геннадий Алексеевич Михайлов (gam@sscc.ru); Сергей Анатольевич Ухинов (sau@sscc.ru); Наталья Валерьевна Трачева (tnv@osmf.sscc.ru).

выполнении довольно общих условий является экспоненциальной:

$$\Phi_1(r,\omega,t) \sim C(r,\omega,t)e^{\lambda^* t}, \ \ t \to +\infty,$$

т.е. асимптотика интенсивности излучения определяется функцией $e^{\lambda^* t}$ [3] с точностью до множителя $C(r,\omega,t)$, который изменяется при $t \to \infty$ слабее экспоненты. После подстановки матрицы $P_R = \mathrm{diag}\{r_{11}, 0, 0, 0\}$ вместо P в систему уравнений переноса с поляризацией получаем уравнение переноса излучения без поляризации. Параметром экспоненциальной асимптотики при этом является ведущее характеристическое число λ^* однородного стационарного уравнения переноса

$$L\Phi_\lambda + (\sigma + \lambda/v)\Phi_\lambda = S\Phi_\lambda \qquad (3)$$

со стандартными краевыми условиями [3]. Здесь v — скорость частиц (света).

Ряд публикаций (см., например, [4, 5]) показывает, что для функционалов от интенсивности без учета поляризации, определяющих помеху обратного рассеяния при оптическом зондировании полубесконечной среды, имеет место асимптотическое соотношение

$$\Phi_1(r,\omega,t) \sim C(r,\omega)t^{-\alpha}e^{-\sigma_c v t}, \ \ t \to +\infty.$$

Настоящая статья посвящена решению вопросов, связанных с распространением этих утверждений на поляризованное излучение.

В пространственно-однородном случае, т.е. когда однородная среда заполняет все пространство, это достигается довольно просто на основе теории весового моделирования процесса переноса, причем оказывается, что $\lambda^* = \lambda^*_\infty = -\sigma_c v$ независимо от типа поляризации.

Специалистам хорошо известно также, что $\lambda^* = \lambda^*_\infty = -\sigma_c v$ и для полупространства. Эвристически это достаточно ясно из соображений непрерывности λ^* как функции оптической толщины плоского слоя.

Для ограниченной среды теоретически неразрешимым оказался вопрос о связи значений λ^*_{S} и λ^*_{V}, т.е. значений параметра асимптотики соответственно для скалярного и векторного вариантов с одинаковой индикатрисой рассеяния r_{11}. Это фактически вопрос о соотношении скоростей деполяризации потока частиц и его перехода к экспоненциальной асимптотике.

В данной статье с помощью прецизионных расчетов методом Монте-Карло показано, что для ограниченных сред в случаях молекулярного и аэрозольного рассеяния $\lambda^*_{\mathrm{S}} \neq \lambda^*_{\mathrm{V}}$, т.е. деполяризация потока частиц несколько запаздывает относительно перехода к асимптотике.

При численной оценке параметров асимптотики «векторной освещенности» границы полубесконечного слоя с источником на этой границе, а также интенсивности отраженного излучения, т.е. помехи обратного рассеяния для соответствующего варианта оптического зондирования, показано, что λ^*_{S} статистически не отличается от λ^*_{V}.

Далее дано описание алгоритма метода Монте-Карло для расчета интенсивности многократно рассеянного поляризованного излучения. Отметим, что соответствующий алгоритм моделирования переноса излучения из физических соображений был предложен в [6], где указано, что «более точной», по отношению к первой компоненте вектора Стокса, является угловая переходная плотность, пропорциональная новому значению этой компоненты. Однако соответствующая случайная векторная оценка является нестандартной; ее математическое исследование, а также использование для решения ряда прикладных задач затруднительны. В частности, рассматриваемая в настоящей статье стандартная оценка сравнительно эффективна для вычисления изменения изучаемых функционалов при изменении матрицы рассеяния. Ее построение и обоснование осуществляются на основе общего векторно-интегрального уравнения, которое эквивалентно уравнению переноса (1).

2. Решение системы интегральных уравнений методом Монте-Карло

Рассмотрим вектор-функцию плотности столкновений $\varphi(r,\omega)$, которая связана с вектор-функцией интенсивности излучения соотношением $\varphi(r,\omega) = \sigma\Phi \equiv (\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)^{\mathrm{T}}$. Известно [1], что она удовлетворяет общему векторно-интегральному уравнению переноса с учетом поляризации (системе интегральных уравнений) в $L_1(X)$:

$$\varphi(x) = \int_X K(x',x)\varphi(x')dx' + \mathbf{f}(x), \text{ или } \varphi = K\varphi + \mathbf{f}, \quad (4)$$

т.е.

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{4}\int_X k_{ij}(x',x)\varphi_j(x')dx' + f_i(x), \ \ i = 1,\ldots,4,$$

где

$$x = (r,\omega) \in X = R^3 \times \Omega, \ \ \mathbf{f} = (f_1,f_2,f_3,f_4)^{\mathrm{T}}$$

— вектор-функция плотности распределения начального столкновения; $\|\varphi\|_{L_1} = \sum_{i=1}^{4}\int_X |\varphi_i(x)|dx$.

Здесь

$$K(x',x) = \frac{q(r')\exp(-\tau(r',r))\sigma(r)P(\omega',\omega,r')}{|r-r'|^2}\times \\ \times\delta\left(\omega - \frac{r-r'}{|r-r'|}\right), \qquad (5)$$

где

$$q(r) = \sigma_s(r)/\sigma(r); \ \ \tau(r',r) = \int_0^{|r'-r|}\sigma(r'+t\omega)\,dt$$

— оптический отрезок пути длиной $|r'-r|$ в направлении $\omega = (r-r')/|r-r'|$.

В нестационарном случае вводится дополнительная фазовая временнáя координата t и ядро (5) домножается на $\delta\left(t - (r - r')/v - t'\right)$.

Алгоритмы метода Монте-Карло основаны на представлении решения уравнения (4) рядом Неймана $\boldsymbol{\varphi} = \sum K^n \mathbf{f}$. Такое представление имеет место, если норма оператора K или какой-нибудь его степени K^{n_0} меньше единицы, или, переходя к пределу, если спектральный радиус $\rho(K) = \lim\limits_{n\to\infty} \left\|K^n\right\|^{1/n} < 1$ (это выполняется при наличии поглощения или для ограниченных сред).

Методом Монте-Карло оценивают линейные функционалы и их параметрические производные от решения рассматриваемого векторного интегрального уравнения второго рода. Общий алгоритм метода Монте-Карло для оценки таких функционалов приводится в работах [1, 7–9].

В случае переноса излучения с учетом поляризации будем оценивать линейные функционалы вида $J = (\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{h})$, где

$$(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{h}) = \int\limits_X \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(x)\mathbf{h}(x)\,dx = \sum_{i=1}^{4} \int\limits_X \varphi_i(x) h_i(x), \quad \mathbf{h} \in L_\infty.$$

Оценка «по столкновениям» ξ функционала J строится на однородной цепи Маркова $x_0, \ldots, x_N$ с начальной плотностью $\pi(x)$ и субстохастической переходной плотностью $p(x', x)$. Она имеет вид

$$\xi = \sum_{n=0}^{N} Q_n^T \mathbf{h}(x_n) = \sum_{n=0}^{N} \left[\sum_{i=1}^{4} Q_n^{(i)} h_i(x_n)\right],$$

где векторные веса Q_n определяются следующим образом:

$$Q_0^{(i)} = \frac{f_i(x_0)}{\pi(x_0)}, \quad Q_n^{(i)} = \sum_{j=1}^{4} Q_{n-1}^{(j)} \frac{k_{ij}(x_{n-1}, x_n)}{p(x_{n-1}, x_n)}. \qquad (6)$$

Векторные веса Q_n можно определить через матричные веса $\tilde{Q}_n$ по рекуррентным формулам:

$$\tilde{Q}_0 = \{\delta_{ij}\}, \quad \tilde{Q}_n = \tilde{Q}_{n-1} K^{\mathrm{T}} \frac{(x_{n-1}, x_n)}{p(x_{n-1}, x_n)}, \quad Q_n = \tilde{Q}_n^{\mathrm{T}} Q_0.$$

Для обеспечения несмещенности оценки ξ на начальную и переходную плотности цепи Маркова накладываются следующие условия:

$$\pi(x) \neq 0, \quad \text{если } f(x) \neq 0,$$

$$\text{и } p(x', x) \neq 0, \quad \text{если } K(x', x) \neq 0.$$

Номер N является случайным номером последнего состояния цепи Маркова. Алгоритм с $p(x', x) = k_{11}(x', x)$ будем называть «физическим» моделированием. Иногда целесообразно использовать модификации такого моделирования «без поглощения» и «без вылета» (см. далее заключение этого раздела).

Аналогично тому, как это делается для одного интегрального уравнения, показывается [1, 7, 10], что $E\xi = J$.

Аналогичным образом, в предположении, что $\mathbf{h}$ не зависит от некоторого параметра λ, можно получить «оценку по столкновениям» для параметрических производных функционала J вида

$$\xi^{(m)} = \frac{\partial^m \xi}{\partial \lambda^m} = \sum_{n=0}^{N} \left[\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^m Q_n^{(i)}}{\partial \lambda^m} h_i(x_n)\right]$$

такую, что $E\xi^{(m)} = J^{(m)}$.

Заметим, что для ограниченных сред уравнение (4) естественным образом распространяется на все пространство X, если положить $\sigma \equiv \sigma_c$ вне некоторой выпуклой оболочки среды [1, 7]. При наличии в задаче каких-либо граничных излучающих, отражающих, преломляющих поверхностей все они включаются в фазовое пространство X, не ограничивая общности поставленной задачи [11, 12]. Можно также рассматривать ограниченные функции $\mathbf{h}$ с разрывами 1-го рода, для которых интегралы $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{h})$ определены.

Средние квадраты векторных оценок «по столкновениям» определяются специальным уравнением с матрично-интегральным оператором K_p [7, 8, 13]. Если спектральный радиус $\rho(K_p) < 1$, то для любой вектор-функции $\mathbf{h}(x) \in L_\infty$ дисперсия соответствующей оценки $D\xi < +\infty$. В работе [8] также показано, что при выполнении условия $\rho(K_p) < 1$ справедливы соотношения: $E\xi^{(m)} = J^{(m)}$ и $D\xi^{(m)} < +\infty$. В работе [13] на основе теории положительных операторов вычислен аналогичный спектральный радиус $\rho(S_p)$ для оператора переноса поляризованного излучения в бесконечной однородной среде. Показано, что в общем случае значение $\rho(K_p)$ приближенно, с большой степенью точности, равно произведению $\rho(S_p)$ на спектральный радиус оператора, соответствующего переносу излучения без поляризации. При этом для изотропной среды $\rho(S_p) = \lambda_0$, где (λ_0, a_1, a_2) – положительное решение системы уравнений

$$c_{11} + c_{21}a_1 = \lambda_0; \; c_{12} + (c_{22} + c_{33})a_1 + c_{43}a_2 = 2\lambda_0 a_1;$$
$$c_{34}a_1 + c_{44}a_2 = \lambda_0 a_2.$$

Здесь

$$c_{ij} = \int \left[r_{ij}^2(\mu)/p_2(\mu)\right] d\mu;$$

$p_2(\mu)$ – плотность моделирования косинуса угла рассеяния в цепи Маркова.

Для молекулярного рассеяния в работе [13] вычислено значение $\rho(S_p) = 1{,}178$ и, следовательно, дисперсия оценки ξ в реальной среде конечна только при достаточно большом поглощении. Например, для «физического» моделирования легко получить оценку $\rho(K_p) \le (1 - p)\rho(S_p)$, где p – нижняя граница вероятности поглощения (с учетом вылета) в среде. Следовательно, $\rho(K_p) \le 1$ и $D\xi^{(m)} < +\infty$ при $p > 0{,}151$.

Для использованной нами модели аэрозольного рассеяния (см. разд. 8) в работе [13] показано, что

$\rho(S_p) \approx 1{,}02007$, поэтому для «физического» моделирования $\rho(K_p) \le 1$ и $D\xi^{(m)} < +\infty$ при $p > 0{,}02034$.

Рассмотрим модификацию «физического» моделирования переноса излучения «без поглощения». В этом случае моделирование проводится с применением замены $\sigma \to \sigma_s$, $\sigma_c \to 0$, а учет поглощения — весовым множителем $e^{-\sigma_c|r-r'|}$ [1, 14]. Тогда

$$\rho(K_p) \le \frac{1-p}{1+p}\rho(S_p). \qquad (7)$$

Следовательно, $\rho(K_p) \le 1$ и $D\xi^{(m)} < +\infty$ при $p > 0{,}0818$ для молекулярного и при $p > 0{,}0103$ для аэрозольного рассеяния, т.е. при относительно меньшем поглощении в среде. Неравенство (7) получается очевидным образом из мажорантного случая бесконечной среды.

Полученные выводы о конечности дисперсий оценок функционалов и их производных являются основанием применимости алгоритмов Монте-Карло, в том числе с использованием модификаций моделирования переноса излучения.

3. Локальные оценки

Пусть требуется вычислить интенсивность излучения $\mathbf{\Phi}$ в заданной точке фазового пространства $x^* = (r^*, \omega^*)$. Для простоты записи формул предположим, что $\mathbf{f}(x^*) = 0$.

По аналогии со скалярным случаем можно получить выражение

$$\int_{\Omega_d} \Phi_i(r^*,\omega^*)\,d\omega^* = \sum_{j=1}^{4} \int_X l_{ij}(x',r^*)\varphi_j(x')\,dx', \;\; i = 1,\ldots,4,$$

где

$$l_{ij}(x',r^*) = \frac{q(r')\exp\left(-\tau(r',r^*)\right)p_{i,j}(\omega',\omega^*,r')}{|\,r'-r^*\,|^2}\Delta_d(\omega^*);$$

$$\omega^* = (r^* - r')/|\,r^* - r'\,|,$$

$\Delta_d(\omega^*)$ — индикатор некоторой области направлений Ω_d (апертуры детектора излучения); $p_{i,j}$ — (i,j)-я компонента матрицы рассеяния P.

Следовательно, среднее значение интенсивности $\mathbf{\Phi}$ по телесному углу Ω_d равно $\bar{\mathbf{\Phi}}(r^*) = E\tilde{\boldsymbol{\xi}}$, где $\tilde{\boldsymbol{\xi}} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3, \tilde{\xi}_4)$,

$$\tilde{\xi}_i = \frac{1}{|\Omega_d|}\sum_{n=0}^{N}\left[\sum_{j=1}^{4} Q_n^{(j)} l_{ij}(x_n, r^*)\right]; \qquad (8)$$

Q_n — веса, рассчитанные по формуле (6).

Формула (8) представляет собой векторный аналог хорошо известной скалярной локальной оценки потока частиц. Эта оценка имеет следующие недостатки: она не позволяет рассчитывать поток непосредственно в заданном направлении ω^* в точке r^*, дисперсия ее может быть бесконечной из-за множителя $|\,r - r^*\,|^2$ в знаменателе. Однако если детектор расположен вне рассматриваемой области переноса излучения и среда ограничена, то дисперсия оценки $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$, очевидно, конечна.

Нетрудно заметить, что уравнение (4) эквивалентно уравнению $\varphi = K^2\varphi + Kf + f$. Соответствующая последнему уравнению локальная оценка называется двойной локальной.

Она имеет вид

$$\hat{\xi}_i = \sum_{n=0}^{N}\left[\sum_{j=1}^{4} Q_n^{(j)} h_{ij}(x_n, x^*)\right],$$

где

$$h_{ij}(x',x^*) = \int_X \sum_{s=1}^{4} k_{sj}(x',x'')k_{is}(x'',x^*)/\sigma(r^*)\,dx''. \; (9)$$

В предположении, что $f(x^*) = 0$ и $Kf(x^*) = 0$, имеем $E\hat{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{\Phi}(x^*)$.

Эта оценка дает возможность рассчитывать интенсивность непосредственно в заданной точке фазового пространства x^* [1].

Нетрудно заметить, что интеграл в (9) берется по лучу $r''(t) = r^* - \omega^* t$, $t > 0$. Этот интеграл можно оценивать по одному случайному углу ρ'', который выбирается подходящим способом. Наиболее просто полагать $\rho'' = r^* - \omega^* l^*$, где l^* — случайная длина свободного пробега из r^* в направлении, обратном ω^*. Соответствующая случайная оценка величины (9) после перехода под знаком интеграла к полярной системе координат с центром r^* принимает следующий вид:

$$\hat{h}_{ij}\,(x',x^*) = \sum_{s=1}^{4} p_{s,j}\left(\omega', \frac{\rho''-r'}{|\,\rho''-r'\,|}, r'\right) \times$$

$$\times p_{i,s}\left(\frac{\rho''-r'}{|\,\rho''-r'\,|}, \omega^*, \rho''\right)\frac{q(r')q(\rho'')\exp\left(-\tau(r',\rho'')\right)}{|\,\rho''-r'\,|^2}. \; (10)$$

Если требуется вычислить интеграл от интенсивности излучения в точке r^* по некоторому телесному углу Ω_d, то в алгоритме добавляется случайный выбор равномерного направления $\omega^* \in \Omega_d$ при каждом вычислении вклада, а функция-вклад $\hat{h}_{ij}$ умножается на $|\,\Omega_d\,|$.

Несмещенность такой оценки $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ проверяется повторным осреднением. Дисперсия ее также может быть бесконечной из-за множителя $|\,\rho'' - r'\,|^2$ в знаменателе. В этом случае оценку обычно немного смещают, вводя специальную ε-окрестность точки r', в которой ее полагают равной нулю [1]. Кроме того, оценка (10) может давать плохие результаты для сред с сильно вытянутой индикатрисой из-за наличия двух значений этой функции в $\hat{h}$. Аналогичное замечание, впрочем, можно сделать и в отношении обычной локальной оценки. При этом возможны сильно заниженные оценки результата и дисперсии для задач, в которых существенную роль играют «фотоны», рассеивающиеся назад и затем испытывающие одно или несколько рассеяний на пути к приемнику. Впрочем, эти недостатки ослабевают при увеличении объема статистической выборки.

4. Значение параметра λ^* экспоненциальной временно́й асимптотики для бесконечного однородного изотропного пространства

В пространственно-однородном изотропном случае слагаемое $\omega\nabla\mathbf{\Phi}$ в уравнении переноса (1) отсутствует, так как $\mathbf{\Phi}(\omega) \equiv \mathbf{\Phi}$ и соответствующее характеристическое уравнение (3) принимает вид

$$(\sigma + \lambda/v)\mathbf{\Phi}_\lambda = S\mathbf{\Phi}_\lambda. \qquad (11)$$

Матрица рассеяния при этом является блочно-диагональной и имеет вид (2). Предполагается, что матрица рассеяния непрерывна по ω и, следовательно, оператор S вполне непрерывен.

Утверждение 1

Главное характеристическое число λ^* уравнения (11) равно $(-\sigma_c v)$.

Доказательство. Оператор S оставляет инвариантным конус T непрерывных по ω вектор-функций Стокса. Нетрудно проверить, что выполняется равенство $S\mathbf{I}_0 = \sigma_s\mathbf{I}_0$, где $\mathbf{I}_0 = (1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Таким образом, значение $\lambda = \lambda^* = (\sigma_s - \sigma)v = -\sigma_c v$ является характеристическим числом, соответствующим «характеристическому элементу» $\mathbf{I}_0$, который является внутренним для конуса T. Следовательно, $\lambda^* = -\sigma_c v$ — главное характеристическое число [15].

Рассмотрим теперь вопрос о временно́й зависимости функции $\mathbf{\Phi}$ для пространственно-однородного случая. Если $\sigma_c = 0$, то эта асимптотика имеет вид $C\mathbf{I}_0$ вследствие закона сохранения энергии и хорошо известной временно́й деполяризации излучения. Если же $\sigma_c \neq 0$, то при $\mathbf{f}_0 = \delta(t)\mathbf{f}(\omega)$, используя модификацию стандартного весового метода статистического моделирования траекторий «векторного фотона» «без поглощения», т.е. с заменой $\sigma \to \sigma_s$, $\sigma_c \to 0$, получаем асимптотику $C\mathbf{I}_0 e^{-\sigma_c v t}$. Таким образом, для пространственно-однородного случая показатель λ_∞^* экспоненциальной асимптотики интенсивности поляризованного излучения определяется главным характеристическим числом $\lambda^* = -\sigma_c v$. На полубесконечный слой это утверждение переносится с помощью эвристически очевидного свойства непрерывности величины λ^* как функции толщины слоя. Это свойство численно проверено представленными в разд. 8 расчетами.

5. Оценка параметров временно́й асимптотики

5.1. Значение параметра экспоненциальной временно́й асимптотики λ^* можно вычислять специальным итерационным методом [14, 16], реализующим итерации резольвенты для уравнения (3):

$$\lim_{m\to\infty} \frac{mJ_\lambda^{(m-1)}(\lambda_0)}{J_\lambda^{(m)}(\lambda_0)} = \lambda^* - \lambda_0.$$

Здесь λ_0 — некоторое начальное значение; J_λ — произвольный линейный функционал от плотности потока $\mathbf{\Phi}_\lambda$; $J_\lambda^{(m)}(\lambda_0)$ — m-кратная производная от J_λ по параметру λ в точке $\lambda = \lambda_0$. Наиболее полное обоснование этого метода для векторного случая дано в [16].

При численной реализации алгоритма вычисления параметрических производных $J_\lambda^{(m)}$ применялось моделирование цепи Маркова «без поглощения» и использовалась модификация оценки по столкновениям $\xi^{(m)}$ в состоянии «после рассеяния» [10]. Веса в этом случае вычисляются по формулам:

$$Q_n^{(i)} = \exp\{-l_n(\lambda_0 + \sigma_c)\} \sum_{j=1}^{4} \frac{p_{i,j}}{r_{11}/2\pi} Q_{n-1}^{(j)};$$

$$\mathbf{Q}_0 = (1,0,0,0)^{\mathrm{T}}, \quad Q_n^{(i,m)} \equiv \frac{\partial^m Q_n^{(i)}}{\partial {\lambda_0}^m} = (-L_n)^m Q_n^{(i)},$$

где L_n — полная длина пробега до n-го столкновения; l_n — длина n-го пробега. Здесь предполагается, что $v = 1$.

В качестве вектор-функции $\mathbf{h}$, определяющей вид рассматриваемого функционала, использовалась функция $\mathbf{h} = (1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Таким образом, расчеты проводились для функционала $J_\lambda = (\sigma_s\mathbf{\Phi}_\lambda, \mathbf{h})$, определяющего число рассеяний до поглощения или вылета из среды.

Отметим, что здесь разработана конкретная реализация общего алгоритма метода Монте-Карло для оценки главного собственного числа с использованием итераций Келлога из работы [17]. Однако этот метод не позволяет находить параметр асимптотики α, и мы будем использовать также метод, основанный на вычислении параметрических производных по времени [14, 16].

5.2. Далее сформулирована оценка параметров λ^* и α временно́й асимптотики на основе параметрических производных по времени.

Рассмотрим нестационарный процесс переноса от источника, вообще говоря, поляризованного излучения, причем функция источника излучения имеет вид

$$\mathbf{F}(r,\omega,t) = f(r,\omega,t)\mathbf{I}_0,$$

где $\mathbf{I}_0 = (I_0, Q_0, U_0, V_0) = \mathrm{const}$.

Справедливо соотношение

$$J(t) = \iint_{R\,\Omega} \varphi^{\mathrm{T}}(r,\omega,t)\mathbf{h}(r,\omega)\,dr\,d\omega =$$

$$= \iiint_{R\,\Omega\,0}^{\quad t} f(r_0,\omega_0,\tau) J_0(r_0,\omega_0,t-\tau)\,dr_0\,d\omega_0\,d\tau,$$

где

$$J_0(r_0,\omega_0,t) = \iint\limits_{R\Omega} \varphi_0^{\mathrm{T}}(r,\omega,t;r_0,\omega_0)\mathbf{h}(r,\omega)dr\,d\omega;$$

$\varphi_0(x;r_0,\omega_0)$ – векторная плотность столкновений (по аргументу $x = (r,\omega,t)$) от одного столкновения в точке $(r_0,\omega_0,0)$, т.е. для функции источника $\delta(r-r_0)\times\times\delta(\omega-\omega_0)\delta(t)\mathbf{I}_0$.

Обозначим через $\eta(r_0,\omega_0)$ оценку по столкновениям для функционала

$$J_h^{(0)}(r_0,\omega_0) = \iint\limits_{R\Omega}\int\limits_0^\infty \varphi_0^{\mathrm{T}}(r,\omega,\tau;r_0,\omega_0)\mathbf{h}(r,\omega)dr\,d\omega\,d\tau.$$

Известно, что при $\rho(K_p) < 1$ имеем $E\,|\,\eta\,|^2 < +\infty$ [7, 10].

Справедливо следующее утверждение [16]:

Утверждение 2

Пусть точка (r_0,ω_0) *распределена для* $t_0 \equiv 0$ *с плотностью* $f_1(r,\omega)$, *причем функция* $f_t^{(n-1)}(x)$ *абсолютно непрерывна по t во всяком конечном интервале времени* $\forall\,(r,\omega) \in R\times\Omega$ *и* $|\,f_t^{(m)}(x)\,| \le Cf_1(r,\omega)$ *для почти всех* x, $m = 0,\ldots,n$. *Пусть также* $f_1E\,|\,\eta\,|^2 \in L_1(R\times\Omega)$ *и* $|\,J_0(x)\,| < C < +\infty$. *Тогда выполняются соотношения* $J^{(m)}(t) = E\xi_t^{(m)}$, *где*

$$\xi_t^{(m)} = \sum_{n=0}^{N} \frac{\mathbf{F}^{(m)\mathrm{T}}(r_0,\omega_0,t-t_n)}{f_1(r_0,\omega_0)}\tilde{Q}_n\mathbf{h}(r_n,\omega_n),$$

причем $D\xi_t^{(m)} < +\infty$, *если* $\rho(K_p) < 1$.

Утверждение доказывается по аналогии со скалярным вариантом, который изучен в [14].

Рассмотрим теперь оценку параметра экспоненциальной временно́й асимптотики. Как указано в разд. 1, в скалярном случае при выполнении довольно общих условий имеет место экспоненциальная асимптотика

$$J_0(r,\omega,t) \sim C(r,\omega)e^{\lambda^* t}, \quad t\to+\infty. \tag{12}$$

Эти условия, в частности, имеют место для односкоростного процесса переноса в ограниченной среде с функцией источника, достаточно быстро убывающей по времени [3]. Поэтому мы предполагаем, что если

$$\int_0^\infty f(r,\omega,t)\exp(-\lambda^* t)\,dt < +\infty, \quad \forall\,(r,\omega),$$

то выполняется соотношение (12) и

$$J(t) = Ce^{\lambda^* t}\left[1+\varepsilon(t)\right], \quad \varepsilon(t)\underset{t\to+\infty}{\to}0, \tag{13}$$

так же и для поляризованного излучения.

Можно показать, что функция $J'(t)$ обладает аналогичным свойством, т.е. если

$$\int_0^\infty f'(r,\omega,t)\exp(-\lambda^* t)\,dt < +\infty, \quad \forall\,(r,\omega),$$

то

$$J'(t) = C\lambda^* e^{\lambda^* t}\left[1+\varepsilon_1(t)\right], \quad \varepsilon_1(t)\underset{t\to+\infty}{\to}0. \tag{14}$$

С учетом соотношений (13) и (14) $J'(t)/J(t)$ для достаточно большого значения t дает оценку временно́й константы λ^*.

При реализации основанных на данном методе алгоритмов рассматривались следующие варианты временны́х плотностей распределения источника вида $\mathbf{F}(r,\omega,t) = f_1(r,\omega)f(t)\mathbf{I}_0$:

а) $f(t) = c_1t^2e^{-c_2t}$, $t > 0$; б) $f(t) = c_1te^{-c_2t}$, $t > 0$;
в) $f(t) = c_1t(1-c_2t)$, $0 \le t \le 1/c_2$.

Оценки функционалов $J(t)$, $J'(t)$, согласно утверждению 2, имеют при этом вид

$$J(t) = E\sum_{n=0}^{N} f(t-\tau_n)Q_n^{\mathrm{T}}h(r_n,\omega_n),$$
$$J'(t) = E\sum_{n=0}^{N} f'(t-\tau_n)Q_n^{\mathrm{T}}h(r_n,\omega_n). \tag{15}$$

В работе [18] для финитной функции (п. «а») предложен специальный алгоритм аналитического осреднения, улучшающий асимптотические оценки. В этом случае в равенствах (15) функции f и f' заменяются соответствующими среднеинтегральными на некотором интервале $(t-a, t+a)$ значениями $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$:

$$\mathcal{F}(t-\tau_n) = \int\limits_{t-a}^{t+a} f(t'-\tau_n)\,dt'.$$

Для уточнения поведения асимптотики излучения в полубесконечном слое по аналогии со скалярным вариантом задачи предположим, что для функционала $J(t)$ при $t\to\infty$ имеет место следующее асимптотическое представление: $J(t) \sim t^{-\alpha}e^{-\sigma_c vt}$, $\alpha > 0$ (см., например, [5]). Отсюда формально получаем соотношение

$$\left[\ln\left(J(t)\right)\right]' = \frac{J'(t)}{J(t)} \sim -\frac{\alpha}{t} - \sigma_c v, \quad t \gg 1, \tag{16}$$

которое дает возможность приближенно вычислять параметр α по формуле $\alpha \approx -(\bar{\lambda}+\sigma_c v)t$, где $\bar{\lambda} = J'(t)/J(t) = E\xi_t'/E\xi_t$ – приближенное значение λ^*, вычисленное в момент времени t. В [18] дано обоснование оценки (16) для финитной временно́й плотности (п. «в») и ее среднеинтегрального варианта.

6. Общий алгоритм моделирования траекторий

Процесс моделирования траекторий «векторного фотона» с учетом веса состоит из следующих этапов.

1) Моделируем начальные точку r_0 и направление движения «фотона» $\omega_0 = (a_0, b_0, c_0)$ в соответствии с заданным (выбранным) источником излучения.

Так, для оценки λ^* в плоском слое рассматривается изотропный источник, равномерно распределенный вдоль оси Z в слое толщиной d. Формулы моделирования при этом выглядят следующим образом:

$$r_0 = (0,0,\alpha_1 d); \;\; a_0 = \mu;$$

$$b_0 = \sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi; \;\; c_0 = \sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi,$$

где

$$\mu = 1 - 2\alpha_2; \;\; \varphi = 2\pi\alpha_3.$$

Здесь и далее α_i — независимые случайные величины, равномерно распределенные в интервале (0, 1).

2) «Разыгрываем» длину свободного пробега l.

При использовании весовой модификации моделирования «без вылета» моделируем l по формуле

$$l = -\ln\left(1 - \alpha_1(1 - e^{-\tau_0})\right)/\sigma,$$

где τ_0 — оптическое расстояние от начала пробега до границы среды.

При использовании весовой модификации моделирования «без вылета» и «без поглощения» моделируем l по формуле

$$l = -\ln\left(1 - \alpha_1(1 - e^{-\tau_{s0}})\right)/\sigma_s,$$

где τ_{s0} — оптическое расстояние «по рассеянию» от начала пробега до границы среды.

При использовании весовой модификации моделирования «без поглощения» моделируем l по формуле $l = -\ln(\alpha_1)/\sigma_s$.

3) Вычисляем координаты следующей точки столкновения $r_n = r_{n-1} + \omega_{n-1} l$ и новое время «фотона» $t_n = t_{n-1} + l/v$, $t_0 = 0$.

4) Если был возможен вылет из среды, то проверяем и в таком случае обрываем траекторию частицы.

5) Пересчитываем вес Q_n в зависимости от способа моделирования длины пробега. Так, при моделировании «без вылета» вес преобразуется по формуле $Q_n = Q_n'(1 - e^{-\tau_0})$, при моделировании «без поглощения» $Q_n = Q_n' e^{-\sigma_c l}$.

6) Вычисляем вклады в искомые функционалы.

7) Моделируем значение косинуса угла рассеяния μ соответственно индикатрисе рассеяния $r_{11}(\mu)$. Для молекулярного рассеяния, т.е. для

$$r_{11}(\mu) = \frac{3}{8}(1+\mu^2),$$

это осуществляется модифицированным методом суперпозиции [1], для аэрозольного рассеяния используется кусочно-линейная непрерывная индикатриса r_{11} и моделирование осуществляется методом обратной функции [19].

8) Пересчитываем координаты a_n, b_n, c_n направления пробега ω_n по известным формулам [1], используя значение μ и равномерно распределенное в $(0, 2\pi)$ значение азимутального угла φ. Азимутальный угол φ равен углу между плоскостями ω', s и ω, ω', отсчитывается против часовой стрелки, если смотреть против направления падающего луча ω', и, таким образом, равен углу i_1, который используется при пересчете вектора Стокса (см. разд. 1).

9) Вычисляем элементы матрицы рассеяния $P(\omega_{n-1},\omega_n,r_n)$ для реализованного значения ω_n.

10) Пересчитываем векторный вес

$$Q_n = P(\omega_{n-1},\omega_n,r_n) Q_n' 2\pi / r_{11}(\mu).$$

11) Действуем в соответствии с п. 2 и так далее, пока траектория не оборвется.

После реализации N траекторий находим среднеарифметические $E_N\xi = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi^{(i)}$ полученных в п. 6 оценок, а также их среднеквадратические погрешности.

В качестве приближенной оценки $g(J_1,J_2) = J_1/J_2$, где $J_i = E\xi_i$, используем выражение $g_N = E_N\xi_2/E_N\xi_1$. Оценка относительного среднеквадратического отклонения $\tilde{\sigma}_N$ асимптотического распределения g_N имеет вид [9]:

$$\left[\frac{Dg_N}{(E_N\xi_2/E_N\xi_1)^2}\right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\frac{D_N\xi_1}{(E_N\xi_1)^2} - 2\frac{\mathrm{cov}_N(\xi_1,\xi_2)}{E_N\xi_1 E_N\xi_2} + \frac{D_N\xi_2}{(E_N\xi_2)^2}\right)^{1/2} = \tilde{\sigma}_N(\xi_2/\xi_1), \quad (17)$$

где D_N, cov_N — статистические дисперсия и ковариация.

Заметим, что параметры временнóй асимптотики оцениваются отношением двух вычисляемых функционалов как при использовании метода итераций резольвенты, а также метода параметрического дифференцирования по времени. Среднеквадратические отклонения полученных оценок вычисляются по формуле (17).

7. Алгоритм моделирования для решения задач оптического зондирования

Рассмотрим задачу оценки помехи обратного рассеяния, которая возникает в связи с использованием импульсных сигналов от оптических квантовых генераторов в системах локации, передачи информации и для изучения структуры атмосферы и океана.

Сложность решения этой задачи по сравнению с другими состоит в том, что вероятность попадания рассеянного излучения в узконаправленный приемник мала, поэтому в зависимости от величины апертуры приемника будем использовать либо локальную оценку, либо двойную локальную оценку, а также их комбинацию для вычисления значений искомых функционалов.

Пусть в точке r_s находится источник, излучающий в направлении $\omega_s = (a_s, b_s, c_s)$, угол его полуапертуры γ_s, а в точке r_d — приемник, принимающий излучение в направлении $\omega_d = (a_d, b_d, c_d)$, угол его полуапертуры γ_d.

Процесс моделирования траекторий «векторного фотона» с использованием локальных оценок в целом соответствует общему алгоритму (см. разд. 6). Опишем этот процесс с использованием комбинации локальной и двойной локальной оценок.

1) Направление $\omega_0 = (a_0, b_0, c_0)$ вылета «фотона» из источника моделируем по известным формулам равномерно в телесном угле Ω_s с полуапертурой γ_s: $\mu = 1 - \alpha_1(1 - \cos\gamma_s)$, $\varphi = 2\pi\alpha_2$, где $\mu = (\omega_s, \omega_0)$; φ — азимутальный угол. Телесный угол $|\Omega_s| = 2\pi(1 - \cos\gamma_s)$.

2—5) Моделируем длину свободного пробега, находим новую точку столкновения r_n, проверяем вылет из среды и пересчитываем вес Q_n.

6) Вычисляем направляющий вектор ω^* от детектора r_d до точки r_n: $\omega^* = r_n - r_d / |r_n - r_d|$.

Если $(\omega^*, \omega_d) < \cos\gamma_d$, то точка столкновения r_n находится вне поля зрения детектора и в этом случае вычисляем вклад в функционал с помощью двойной локальной оценки $\tilde{\xi}$. Иначе (точка r_n «видима») есть два варианта: если в предыдущей точке r_{n-1} вычислялась двойная локальная оценка, то вклад не делается, если в r_{n-1} вклад не делался или в r_{n-1} вычислялась локальная оценка $\tilde{\xi}$, то делаем вклад оценкой $\tilde{\xi}$.

7—11) Эти пункты полностью соответствуют пп. 7—11 разд. 6.

8. Решение модельных задач

Рассматривается процесс переноса излучения в среде, коэффициенты рассеяния и поглощения которых заданы: $\sigma_s = 0{,}9$ км$^{-1}$, $\sigma_c = 0{,}1$ км$^{-1}$, $\sigma = 1$ км$^{-1}$. Пространственные координаты имеют размерность км.

В расчетах использовались известная матрица молекулярного рассеяния и матрица аэрозольного рассеяния, рассчитанная по теории Ми для следующих параметров среды: коэффициент преломления частиц $n = 1{,}331 - i \cdot 1{,}3 \cdot 10^{-4}$ (вода), распределение частиц по размерам логнормально с функцией распределения

$$f(r) = \frac{1}{r}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_g^2}\ln^2\left(\frac{r}{r_g}\right)\right),\ r \in (0{,}10 \text{ мкм}),$$

$$r_g = 0{,}12 \text{ мкм},\ \sigma_g = 0{,}5,$$

длина волны излучения 0,65 мкм.

8.1. Далее получены численные оценки параметра λ^* экспоненциальной временно́й асимптотики для плоских слоев различных оптических толщин $\tau = H\sigma$, где H — высота слоя.

Моделирование процесса переноса было реализовано в двух плоских слоях: $H = 1$ и 5 км от равномерно распределенных по толщине слоя изотропных источников. При этом было учтено, что значение λ^* не зависит от типа источника [3].

В расчетах использовался мультипликативный генератор псевдослучайных чисел с параметрами $M = 5^{17}$ и $r = 40$ [1].

При численной реализации алгоритма, основанного на параметрических временны́х производных, использовалась функция источника вида $f(t) = c_1 t e^{-c_2 t}$ при $t > 0$.

Результаты расчета параметра экспоненциальной временно́й асимптотики с учетом и без учета поляризации двумя описанными методами (см. разд. 5) приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Параметр λ^* для $\tau = 5$, вычисленный методом итераций резольвенты при $\lambda_0 = 0$ и методом параметрических временны́х производных (молекулярное рассеяние)

Метод	Без учета поляризации	С учетом поляризации
$mJ^{(m-1)}/J^{(m)}$, $m = 5$	$-0{,}1854449 \pm 0{,}0000023$	$-0{,}18424 \pm 0{,}00010$
J'_t/J, $t = 21$	$-0{,}1854017 \pm 0{,}0001060$	$-0{,}18427 \pm 0{,}00048$

Таблица 2

Параметр λ^* для $\tau = 1$, вычисленный методом параметрических временны́х производных при $t = 26$

Тип рассеяния	Без учета поляризации	С учетом поляризации
Молекулярное	$-0{,}6765 \pm 0{,}0011$	$-0{,}6285 \pm 0{,}0037$
Аэрозольное	$-0{,}6112 \pm 0{,}0017$	$-0{,}6052 \pm 0{,}0017$

Скорость света v в расчетах принималась равной 1. Для приведения параметра λ^* к физической размерности (например, μs^{-1}) приведенные в таблице значения надо умножить на физическую скорость света, выраженную в км на единицу времени (например, на $v = 0{,}3$ км/μs). Время t, приведенное в таблицах, пересчитывается в физическую размерность делением на v.

При $\tau = 5$ расчеты проводились для рэлеевской матрицы рассеяния и числа траекторий $N = 7 \cdot 10^9$. При $\tau = 1$ с использованием метода временны́х производных для молекулярного рассеяния число траекторий $N = 1{,}35 \cdot 10^9$, для аэрозольного рассеяния $N = 8{,}2 \cdot 10^8$. Значения параметра λ^* экспоненциальной временно́й асимптотики, полученные разными методами, совпадают в пределах статистической погрешности (см. табл. 1).

Отметим, что статистические оценки для скалярного и векторного случаев получены с использованием одних и тех же ансамблей траекторий и, следовательно, сильно зависимы. С учетом этого обстоятельства можно констатировать, что значения параметров временно́й асимптотики различаются для скалярного и векторного случаев, т.е. деполяризация потока частиц несколько запаздывает относительно перехода к асимптотике; особенно существенным является этот эффект для молекулярного рассеяния. Отметим также, что метод итераций резольвенты более точен.

Полученные для молекулярного рассеяния оценки $\lambda_V^*(1) \approx -0{,}628$, $\lambda_V^*(5) \approx -0{,}184$ подтверждают гипотезу, что $\lambda_V^*(\tau) \to \lambda_\infty^*$, вследствие которой $\lambda_V^* = \lambda_\infty^*$

и для полупространства (это было проверено расчетами). Напомним, что в данном случае $\lambda_\infty^* = -\sigma_c = -0{,}1$.

Полученные результаты показывают, что, как и в скалярном случае, временна́я экспоненциальная асимптотика первой компоненты векторного потока поляризованного излучения определяется главным характеристическим числом соответствующего однородного уравнения переноса. Следовательно, аналогичными являются асимптотики и остальных векторных компонент. Проведенные дополнительные расчеты подтверждают это. В частности, для молекулярного рассеяния методом параметрических производных по времени при $\mathbf{h} = (0, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ получено $\lambda^*(1) = -0{,}6260 \pm 0{,}0063$, а для аэрозольного рассеяния $\lambda^*(1) = -0{,}5808 \pm 0{,}0089$, которые согласуются со значениями, приведенными в табл. 2, вычисленными при $\mathbf{h} = (1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

8.2. Далее рассматривается вычисление параметра α временно́й асимптотики интенсивности отраженного полубесконечной средой света в задачах оптического зондирования. Отметим, что при этом, как указано в разд. 1, $\lambda^* = -\sigma_c v$.

Пусть рассеивающая и поглощающая излучение среда заполняет полупространство $y > 0$. Источник излучения находится за пределами среды в точке $r_s = (0, -1, 0)$, направление излучения $\omega_s = (0, 1, 0)$. Приемник излучения находится в той же точке $r_d = (0, -1, 0)$, $\omega_d = (0, 1, 0)$.

Алгоритм моделирования переноса излучения для решения задач оптического зондирования описан в разд. 7. Расчеты проводились для двух значений апертур приемника γ_d: 0,5 и 90°, апертура источника $\gamma_s = 0{,}5°$.

Для вычисления параметров λ^* и α временно́й асимптотики потока приходящего в детектор рассеянного излучения применяется метод, основанный на параметрических временны́х производных от специального представления решения нестационарного уравнения переноса с поляризацией (см. подразд. 5.2).

В качестве временно́й части источника излучения рассматривалась финитная функция $f(t) = c_1 t(1 - c_2 t)$, $0 \le t \le 1/c_2$. В расчетах использовались комбинация локальной и двойной локальной оценок (см. разд. 7) и аналитическое осреднение $\mathcal{F}$, приведенное в [18].

Оценки метода Монте-Карло для вычисления локальных потоков и их производных $\mathbf{\Phi}^{(m)}(r_d, t)$, проинтегрированных по телесному углу приемника, имеют здесь вид (см. разд. 3):

а) локальная оценка:

$$\tilde{\xi}_i^{(m)}(t) = \sum_{n=0}^{N} f^{(m)}(t - \tau_{1,n}) \sum_{j=1}^{4} Q_n^{(j)} l_{ij}(x_n, r_d),$$

б) двойная локальная оценка:

$$\hat{\xi}_i^{(m)}(t) = |\Omega_d| \sum_{n=0}^{N} f^{(m)}(t - \tau_{2,n}) \sum_{j=1}^{4} Q_n^{(j)} \hat{l}_{ij}(x_n, r_d),$$

где

$$\tau_{1,n} = t_n + |r_n - r_d|/v,$$

$$\tau_{2,n} = t_n + \left(|r_n - \rho''| + |\rho'' - r_d|\right)/v;$$

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} |r_i - r_{i-1}|/v; \quad r_0 = r_s; \quad |\Omega_d| = 2\pi(1 - \cos\gamma_d).$$

Расчеты проводились на многопроцессорной системе НКС-160 (ССКЦ) [20] по технологии MPI. Число реализованных траекторий с использованием 40 процессоров составило $N = 10^{10}$.

В вычислениях применялись два генератора псевдослучайных чисел: конгруэнтный генератор с параметрами $M = 5^{100109}\ (\mathrm{mod}\ 2^{128})$ и $r = 128$ [21] и генератор MT2203 из библиотеки Intel MKL [22]. Результаты расчетов с использованием разных генераторов псевдослучайных чисел статистически не отличаются.

Результаты расчета параметра α временно́й асимптотики при $\gamma_d = 90°$ приведены в табл. 3.

Таблица 3

Параметр α освещенности точечного приемника, вычисленный методом параметрических временных производных (аэрозольное рассеяние)

t	Без учета поляризации	С учетом поляризации
21	$-2{,}1788 \pm 0{,}0057$	$-2{,}2025 \pm 0{,}0059$
41	$-2{,}340 \pm 0{,}023$	$-2{,}346 \pm 0{,}025$
61	$-2{,}503 \pm 0{,}054$	$-2{,}534 \pm 0{,}065$
81	$-2{,}46 \pm 0{,}10$	$-2{,}43 \pm 0{,}14$

Они согласуются с асимптотической формулой $\Phi_1(r, \omega, t) \sim C(r, \omega) t^{-5/2} \exp(-\sigma_c v t)$, полученной для рассматриваемой задачи в диффузионном приближении в работе [4]. Из табл. 3 также видно, что вычисленные значения α для векторного и скалярного вариантов статистически не отличаются.

Отметим, что, как и в разд. 8.1, для приведения времени t из табл. 3 к физической размерности надо значения t разделить на v в соответствующей размерности. Параметр α является безразмерным.

Для апертуры $\gamma_d = 0{,}5°$ проведенные на настоящий момент расчеты в среде с аэрозольным рассеянием дают основание полагать, что параметр $\alpha = -2{,}8$, однако среднеквадратическая погрешность данной оценки велика и составляет более 36% для времени $t > 50$.

В заключение отметим, что в работе [18] нами вычислен параметр α асимптотики интегральной освещенности границы полупространства от точечного мононаправленного источника ($\gamma_s = 0$) с учетом поляризации излучения. Определенные в расчетах значения согласуются с известной асимптотикой $t^{-3/2} \exp(-\sigma_c v t)$, полученной в работе [5] для скалярной задачи аналитическими выкладками, и также статистически не отличаются для векторного и скалярного вариантов.

Заключение

В данной статье двумя различными разработанными авторами методами с помощью прецизионных расчетов показано, что для ограниченных сред (в том числе плоских слоев) значения параметров экспоненциальной временно́й асимптотики интенсивности излучения с учетом поляризации и без ее учета не совпадают, т.е. деполяризация потока частиц несколько запаздывает относительно перехода к асимптотике. Для задач лазерного зондирования полубесконечной среды определены параметры степенной составляющей экспоненциальной асимптотики принимаемого излучения, значения которых оказались не зависящими от учета или неучета поляризации излучения в среде.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 09-01-0035а.

1. *Метод* Монте-Карло в атмосферной оптике / Под ред. Г.И. Марчука. Новосибирск: Наука, 1976. 284 с.
2. *Сушкевич Т.А.* Математические модели переноса излучения. М.: Изд-во БИНОМ, 2005. 661 с.
3. *Дэвисон Б.* Теория переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1960. 520 с.
4. *Зеге Э.П., Кацев И.Л.* Временны́е асимптотические решения уравнения переноса излучения и их применения. Препр. / ИФ АН БССР (Минск). 1973. 20 с.
5. *Романова Л.М.* Предельные случаи функции распределения по пробегам фотонов, выходящих из толстого светорассеивающего слоя // Изв. АН СССР. Физ. атмосф. и океана. 1965. Т. 1, № 6. С. 599–606.
6. *Kattawar G.W., Plass G.N.* Radiation and polarization of multiple scattered light from haze and clouds // Appl. Opt. 1968. V. 7, N 8. P. 1519–1527.
7. *Михайлов Г.А.* Оптимизация весовых методов Монте-Карло. М.: Наука, 1987. 187 с.
8. *Ухинов С.А., Юрков Д.И.* Оценки методов Монте-Карло для параметрических производных поляризованного излучения // Сиб. журн. вычисл. математики. 2002. Т. 5, № 1. С. 40–56.
9. *Ukhinov S.A., Yurkov D.I.* Computation of the parametric derivatives of polarized radiation and the solution of inverse atmosphere optic problems // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2002. V. 17, N 3. P. 283–303.
10. *Ukhinov S.A., Yurkov D.I.* Monte Carlo method of calculating the derivatives of polarized radiation // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1998. V. 13, N 5. P. 425–444.
11. *Rakimgulov K.B., Ukhinov S.A.* Local estimates in Monte Carlo method for the ocean atmosphere system with a random interface // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1994. V. 9, N 6. P. 547–564.
12. *Ukhinov S.A.* Determination of special distribution of thermal radiation sources by Monte Carlo Method // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1992. V. 7, N 2. P. 169–186.
13. *Михайлов Г.А., Ухинов С.А., Чимаева А.С.* Дисперсия стандартной векторной оценки метода Монте-Карло в теории переноса поляризованного излучения // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 2006. Т. 46, № 11. С. 2199–2212.
14. *Лотова Г.З., Михайлов Г.А.* Новые методы Монте-Карло для решения нестационарных задач теории переноса излучения // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 2002. Т. 42, № 4. С. 569–579.
15. *Функциональный* анализ / Под ред. С.Г. Крейна. М.: Наука, 1972. 544 с.
16. *Михайлов Г.А., Трачева Н.В., Ухинов С.А.* Исследование временно́й асимптотики интенсивности поляризованного излучения методом Монте-Карло // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 2007. Т. 47, № 7. С. 1264–1275.
17. *Владимиров В.С.* О применении метода Монте-Карло для отыскания наименьшего характеристического числа и соответствующей собственной функции линейного интегрального уравнения // Теор. вероятн. и ее примен. 1956. Т. 1, № 1. С. 113–130.
18. *Mikhailov G.A., Tracheva N.V., Ukhinov S.A.* The Monte Carlo method and analytic averaging for estimation of parameters of polarized radiation asymptotics // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2008. V. 23, N 3. P. 239–250.
19. *Ермаков С.М., Михайлов Г.А.* Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982. 294 с.
20. *Сибирский* суперкомпьютерный центр. Сервер. URL: http://www2.sscc.ru
21. *Марченко М.А., Михайлов Г.А.* Распределенные вычисления по методу Монте-Карло // Автоматика и телемеханика. 2007. № 5. С. 157–170.
22. *Intel®* Math Kernel Library. Vector Statistical Library Notes. URL: http://software.intel.com/sites/products/documentation/hpc/mkl/vsl/vslnotes.pdf.

G.A. Mikhailov, N.V. Tracheva, S.A. Ukhinov. **Evaluation of the asymptotics parameters of backscattering noise by the Monte Carlo method with allowance for polarization.**

The problem on estimation of the parameters of time asymptotics of the polarized radiation flow outgoing from half-infinite layer of scattering and absorbing media at illumination by an external directional source is explored. The computations performed on a multiprocessing cluster have shown that in this case polarization does not influence the asymptotics parameters of the reflected radiation determining “backscattering noise” in optical sounding. For bounded media the asymptotics parameters of polarized and not polarized radiation differ depending on the size of transfer area, i.e., the depolarization of a radiation flow slightly retards concerning transition to asymptotics.