<Оптика атмосферы и океана>, **6**, N 8 (1993)

УДК 535.416.3

Ш. Енгюхард, Б. Хатфилд, В. Петерсон

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЯДОВ ФРЕДГОЛЬМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОВОГО САМОВОЗДЕЙСТВИЯ

Из анализа теплового самовоздействия, выполненного в приближении геометрической оптики [2], следует, что оператором переноса излучения является матрица размерности 2×2, удовлетворяющая интегральному уравнению типа Фредгольма. Мы нашли решение этого интегрального уравнения в виде обобщенного ряда Фредгольма. Так как ядро является матрицей, то обычные определители ряда Фредгольма содержат порядковые неопределенности. Эти неопределенности мы разрешаем с помощью стандартного представления ряда в виде диаграммы. Знаменатель Фредгольма вычисляется для случаев распространения при наличии коррекции и ее отсутствии при условии однородной атмосферы и однородного распределения скорости ветра. При равном нулю знаменателе Фредгольма в операторе переноса возникают особые точки. Нулевые значения знаменателя появляются в случае применения коррекции. Нестабильное одномодовое усиление в условиях фазовой коррекции, найденное при подстановке нулей, согласуется с результатами, полученными с использованием других методов.

1. Введение. Обзор выполненных исследований

Классификация эффектов теплового воздействия в пучках относительно большого диаметра может быть выполнена по поперечным размерам неоднородностей в пучке. Эффекты, при которых размеры неоднородностей совпадают по порядку величины с размерами пучка, называются тепловым самовоздействием пучка как целого. Если масштаб структуры неоднородностей значительно меньше, чем диаметр пучка (обычно это порядок характерного масштаба сцинтилляций), эффект называется мелкомасштабным тепловым самовоздействием.

При самовоздействии флуктуации интенсивности преобразуются в фазовые флуктуации (в данном случае эффект является паразитным). В приближении оптики идеальных пучков существуют два основных источника возникновения флуктуаций интенсивности, которые, в свою очередь, инициируют развитие теплового самовоздействия. Эти источники – атмосферная турбулентность и краевые дифракционные эффекты. Генерация атмосферной турбулентностью флуктуаций интенсивности характеризуется турбулентным числом Френеля $N_{\text{Т}} = r_0^2 / \lambda L$. Чем меньше турбулентное число Френеля, тем больше флуктуации интенсивности. Генерация флуктуаций интенсивности, обусловленная краевыми дифракционными эффектами, характеризуется числом Френеля для всего пучка $N_F = D^2 / \lambda L$, где D – диаметр пучка. Чем меньше размеры пучка, тем меньше N_F и больше вклад краевых дифракционных эффектов.

Таким образом, является ли доминирующим самовоздействие пучка как целого или мелкомасштабное тепловое самовоздействие – это определяется квадратом отношения турбулентного диаметра когерентности к диаметру пучка. В качестве простого примера рассмотрим 10-метровую систему, при этом будем учитывать, что самовоздействие развивается в атмосферном слое высотой до 5 км. Из данных, приведенных в таблице, следует, что мощные лазерные системы с апертурой большого диаметра попадают в область мелкомасштабного теплового самовоздействия.

Профиль турбулентности Хуфнагеля – Велли (5/7) D = 10 м, L = 5 км, $N_{\text{т}} = r_0^2 / \lambda L$, $N_F = D^2 / \lambda L$

Длина волны λ, мкм	0,41	0,8	1,7	3,8	10,0
Число Френеля для пучка N_F	48780	25000	11764	5263	2000
Турбулентное число Френеля $N_{\text{т}}$	0,780	2,06	5,90	18,2	70,7

Два физических процесса определяют механизм самовоздействия: вынужденное тепловое рассеяние Рэлея (ВТРР) и нестабильности фазовой компенсации (НФК). Качественное описание этих процессов дано в [1]. ВТРР – явление, наблюдаемое для всех поперечных пространственных масштабов. Если ВТРР развивается в диапазоне масштабов, не входящем в полосу компенсации, то адаптивная система не влияет на протекание процесса и не корректирует его. НФК – это нестабильности обратной связи, и поэтому характерные масштабы эффекта попадают в полосу компенсации. Несмотря на это, из-за дифракции, НФК также невозможно полностью скомпенсировать, даже если адаптивная система имеет бесконечный динамический диапазон во всех областях управления.

Преобладание мелкомасштабного самовоздействия имеет несколько важных особенностей. Мы показали, что физика мелкомасштабных процессов является линейной, даже если уравнения движения нелинейны [2]. Для получения аналитического функционала масштабирования мы также использовали аналитические вычисления структурных функций и отношения Штреля, основанные на профилях поглощения. Кроме этого, так как края пучка не влияют на динамику процесса, прогнозирование числа Штреля для всего пучка может быть выполнено по результатам, полученным для бесконечного пучка или для отдельных его областей на основе функционального восстановления [4]. Для получения точных оценок критерия Штреля для широких пучков в реальном времени в модели системы мы использовали масштабирование функционала профиля поглощения и алгоритм восстановления [4,5]. В отличие от прямого моделирования задач четырехмерной волновой оптики, точность методов восстановления возрастает с увеличением радиуса пучка, и в настоящее время только с помощью этих методов можно получить точные оценки параметров широких пучков.

В [2] мы преобразовали линеаризованные дифференциальные уравнения движения в интегральные уравнения движения для функций Грина (пропагаторов). Во временной области решение интегрального уравнения в виде рядов Неймана было найдено методом возмущений. Так как это интегральное уравнение относится к классу уравнений Фредгольма (особенность в нашем случае в том, что ядром является матрица), то решение может быть записано в виде решения Фредгольма. Ядро решения Фредгольма находится как отношение первого минора Фредгольма к определителю Фредгольма. Если это решение разложить в ряд (решение в виде ряда Фредгольма), ряд Неймана проявляется вновь после завершения деления. Но в отличие от решения Неймана, учитывая, что определитель неопределен в точке полюса, определитель Фредгольма может быть использован для регистрации наличия полюсов пропагатора. Если решение Фредгольма не развернуто в степенной ряд, оно является невозмущенным представлением пропагатора. Определитель и минор могут быть записаны в виде интегралов трассы распространения и определены с использованием функциональных вычислений. Представление нескомпенсированного пропагатора в виде интеграла трассы дано в [6]. Получение решения Фредгольма обобщено на рисунке.

Решение Фредгольма:
– пропагатор = свободный пропагатор + решение

– ядро = $\dfrac{\text{первый минор Фредгольма}}{\text{определитель Фредгольма}}$

Возмущения	Возмущения отсутствуют
Выражение первого минора и определителя в виде степенного ряда по λ : –решение в виде ряда Фредгольма	Поиск первого минора и определителя с использованием функциональных вычислений: – определитель – это интеграл трассы при отсутствии источника; – первый минор – это второй момент интеграла трассы при наличии источника

В нашей статье для вычисления определителя Фредгольма мы будем использовать решение в виде ряда Фредгольма как в случае распространения без коррекции, так и при наличии компенсации. Мы обнаружили, что для пучков без управления неопределенность при вычислении определителя не возникает, это означает, что пропагатор ВТРР не содержит особых точек (полюсов). Когда осуществляется только фазовое управление, детерминант неопределен в некоторых изолированных точках, в этом случае пропагатор имеет полюса. Физическим процессом, связанным с наличием полюсов, является нестабильность фазового управления.

2.Интегральные уравнения движения

Для флуктуаций интенсивности и фазы $\hat{I}_1$ и $\hat{S}_1$, являющихся отклонениями от плоской волны, комбинацией уравнений нагрева и распространения для линеаризованного изобарического теплового самовоздействия будет:

$$\partial_\tau = \begin{pmatrix} \partial_n & -1 \\ 1 & \partial_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{S}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{S}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta\delta(\tau)\, \delta\hat{n}(\xi) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

или

$$\left(D^{(0)} + V\right) \begin{pmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{S}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta\delta(\tau)\, \delta\hat{n}(\xi) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$\xi = \mathbf{\kappa}^2 z/2\,k$ – безразмерная высота z; τ – безразмерное время и $\beta = 4\,k^2/\mathbf{\kappa}^2$, где $k = 2\pi/\lambda$ и $\mathbf{\kappa}$ – поперечная пространственная частота. Оператор самовоздействия V преобразует интенсивность в фазу в некоторой точке

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ S_{\mathrm{bloom}} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Для флуктуаций фазы и интенсивности функция Грина (или пропагатор) $G(\xi, \xi; \tau - \tau_0)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(D^{(0)} + V\right) G(\xi, \xi_0; \tau - \tau_0) = \begin{pmatrix} \delta(\xi - \xi_0)\, \delta(\tau - \tau_0) & 0 \\ 0 & \delta(\xi - \xi_0)\, \delta(\tau - \tau_0) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Пропагатор также удовлетворяет интегральному уравнению [2]

$$G(\xi, \xi_0; \tau - \tau_0) = G^{(0)}(\xi, \xi_0; \tau - \tau_0) - \int d\,\tau_1 \int d\,\xi_1\, G^{(0)}(\xi, \xi_1; \tau - \tau_1)\, V(\xi_1)\, G(\xi_1, \xi_0; \tau_1 - \tau_0)\,, \tag{5}$$

где $G(\xi, \xi_0; \tau - \tau_0)$ – свободный пропагатор ($V = 0$, самовоздействие отсутствует, искажения только из-за турбулентности). Если адаптивная коррекция не применяется или $\mathbf{\kappa}$ находится за пределами полосы компенсации, нескомпенсированным свободным пропагатором является [2]:

$$G^0(\xi, \xi_0; \tau - \tau_0) = H(\xi - \xi_0)\, H(\tau - \tau_0) \begin{pmatrix} \cos(\xi - \xi_0) & \sin(\xi - \xi_0) \\ -\sin(\xi - \xi_0) & \cos(\xi - \xi_0) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где H – функция шага (функция Хевисайда). Когда пространственная частота $\mathbf{\kappa}$ попадает в полосу коррекции, скомпенсированный пропагатор, который мы обозначим как $G_{PC}(\xi, \xi_0; \tau - \tau_0)$, удовлетворяет тому же интегральному уравнению (5), что и пропагатор в отсутствие коррекции. Отличие только в том, что свободный пропагатор изменяется для включения новых граничных условий в точке $\xi = 0$, обусловленных применением адаптивного управления. К этому вопросу мы вернемся в разделе 6.

3. Ряды Фредгольма

Так как интерес представляет вычисление полюсов (если, конечно, они существуют) как для некорректируемого, так и для корректируемого пропагаторов, применим преобразование Лапласа к интегральному уравнению движения (5). Пусть переменной s будет обозначена трансформанта Лапласа, соответствующая временной переменной τ. После умножения на s уравнение (5) преобразуется к виду:

$$sG(\xi, \xi_0; s) = G^{(0)}(\xi, \xi_0) - (1/s) \int d\,\xi_1\, G^{(0)}(\xi, \xi_1)\, V(\xi) \left(s\, G(\xi_1, \xi_0; s)\right), \tag{7}$$

где при отсутствии компенсации

$$G^0(\xi, \xi_0) = H(\xi, \xi_0)\begin{pmatrix} \cos(\xi - \xi_0) & \sin(\xi - \xi_0) \\ -\sin(\xi - \xi_0) & \cos(\xi - \xi_0) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Уравнение Фредгольма второго рода имеет вид [7]:

$$G(x, y) = G_0(x, y) + \lambda \int \mathrm{d}\, z\, K(x, z)\, G(z, y)\,,$$

где $K\,(x, z)$ – ядро. Сравнивая это с уравнением (7), мы видим, что $\lambda = -1/s$, и $K = G^{(0)}\, V$. Более удобно связать оператор самовоздействия V с интегралом $\int \mathrm{d}\, z$, чем с ядром K, поэтому мы будем искать решение интегрального уравнения в виде ряда Фредгольма, имеющего вид

$$G(x, y) = G_0(x, y) + \lambda \int \mathrm{d}\, z\, K\,(x, z)\, V(z)\, G(z, y)\,. \tag{9}$$

Решение уравнения (9) записывается с использованием ядра решения $R(x, y)$

$$G(x, y) = G_0(x, y) + \lambda \int \mathrm{d}\, z\, R(x, z)\, V(z)\, G_0(z, y)\,. \tag{10}$$

В решении Фредгольма ядро выражается отношением

$$R(x, y) = D_1(x, y, \lambda)/D(\lambda), \tag{11}$$

где $D_1(x, y, \lambda)$ – первый минор Фредгольма; $D(\lambda)$ – определитель Фредгольма.

При поисках решения в виде рядов Фредгольма D, D_1 раскладываются в степенной ряд по λ:

$$D_1(x, y, \lambda) = K(x, y) - \lambda \int \mathrm{d}\, z\, V(z)\begin{vmatrix} K(x, y) & K(x, z) \\ K(z, y) & K(z, z) \end{vmatrix} + \frac{\lambda^2}{2!}\int\!\!\int \mathrm{d}\, z\, \mathrm{d}\, z'\, V(z)\, V(z')\begin{vmatrix} K(x, y) & K(x, z) & K(x, z') \\ K(z, y) & K(z, z) & K(z, z') \\ K(z', y) & K(z', z) & K(z', z') \end{vmatrix} + \ldots$$

$$D(\lambda) = 1 - \lambda \int \mathrm{d}z V(z)\, K(z, z) + \frac{\lambda^2}{2!}\int\!\!\int \mathrm{d}\, z\, \mathrm{d}\, z'\, V(z)\, V(z')\begin{vmatrix} K(x, y) & K(x, z) \\ K(z, y) & K(z, z) \end{vmatrix} + \ldots \tag{12}$$

4. Диаграммное представление

Решение в виде ряда может быть преобразовано в диаграммы Фейнмана с использованием следующих обозначений [7]:

$$K(\, x, y) \leftrightarrow \Big|\,\blacksquare^{x}_{y}\,,$$

$$\int \mathrm{d}z\, K(\, x, z)\, V(z)\, K(\, z, y) \leftrightarrow \Big|\;\; V(z)\;\; ; \tag{13}$$

$$\int \mathrm{d}z\, K(\, z, z)\, V(z) \leftrightarrow \bigcirc\blacksquare\,; \tag{14}$$

$$\int \mathrm{d}z\, K(\, x, y)\, K(\, z, z)\, V(z) \leftrightarrow \Big|\bigcirc\blacksquare\,. \tag{15}$$

Первый минор Фредгольма $D_1(x, y, \lambda)$ в уравнении (12) преобразуется к виду

$$D_1(x, y, \lambda) = \Big\vert - \lambda\Big(\Big\vert\bigcirc\blacksquare - \Big\vert\blacksquare\Big) + \frac{\lambda^2}{2!}\Big(\Big\vert\bigcirc\blacksquare\bigcirc\blacksquare + 2\Big\vert\substack{\blacksquare\\ \blacksquare} - \Big\vert\blacksquare\bigcirc\blacksquare - 2\Big\vert\blacksquare\bigcirc\blacksquare\Big) + \ldots, \tag{16}$$

тогда как определителем Фредгольма $D(\lambda)$ в уравнении (12) является

$$D(\lambda) = 1 - \lambda\bigcirc\blacksquare + \frac{\lambda^2}{2}\big(\bigcirc\blacksquare\bigcirc\blacksquare - \blacksquare\bigcirc\blacksquare\big) + \ldots\,. \tag{17}$$

Определитель Фредгольма также может быть записан следующим образом:

$$D(\lambda) = \exp\left(-\lambda\bigcirc\blacksquare - \frac{\lambda^2}{2}\blacksquare\bigcirc\blacksquare - \frac{\lambda^3}{3}\blacksquare\underset{\blacksquare}{\bigcirc}\blacksquare - \ldots\right), \tag{18}$$

что может быть проверено разложением экспоненты в степенной ряд и сопоставлением результата с диаграммами или приведенными выше уравнениями.

Ядром $R(x, y, \lambda)$ является отношение двух приведенных выше диаграмм. При разложении по λ уравнение (11) имеет вид

$$R(x, y, \lambda) = \frac{\Big\vert - \lambda\Big(\Big\vert\bigcirc\blacksquare - \Big\vert\blacksquare\Big)}{1 - \lambda\bigcirc\blacksquare} = \frac{\Big\vert\big(1 - \lambda\bigcirc\blacksquare\big) + \lambda\Big\vert}{1 - \lambda\bigcirc\blacksquare} = \Big\vert + \lambda\Big\vert\blacksquare\,. \tag{19}$$

Результатом деления является ряд Неймана для ядра. Диаграммное представление ряда

$$R(x, y, \lambda) = \Big\vert + \lambda\Big\vert\blacksquare + \lambda^2\Big\vert\substack{\blacksquare\\ \blacksquare} + \lambda^3\Big\vert\substack{\blacksquare\\ \blacksquare\\ \blacksquare} + \ldots\,. \tag{20}$$

В данной статье мы рассматриваем обобщенное решение в виде ряда Фредгольма, в котором ядром $K(\xi, \xi_0) = G^{(0)}(\xi, \xi_0)$ (уравнение (8)), является матрица. Так как в общем случае умножение матриц не коммуникативно, то имеет значение порядок, в котором записаны члены уравнения (12). То же относится и к коэффициентам оператора V. Это означает, что порядок, в котором нарисованы диаграммы, также имеет значение. Например, так как ядро является матрицей

$$\int \mathrm{dz}\, K(x, y)\, K(z, z)\, V(z) \neq \int \mathrm{dz}\, K(z, z)\, V(z)\, K(x, y)\,,$$

или для диаграмм

$$\Big\vert\bigcirc\blacksquare \neq \bigcirc\blacksquare\Big\vert\,. \tag{21}$$

Более того, ядро является отношением двух матриц. Фактически это означает, что ядро – это результат матричного умножения первого минора и обращенной матрицы определителя. Так как умножение матриц не коммуникативно, возникают неопределенности в порядке следования элементов. А именно, должны мы записывать

$$R(\xi, \xi_0; s, \lambda) = D_1(\xi, \xi_0; s, \lambda)\, D^{-1}(\lambda)$$

или

$$R(\xi, \xi_0; s, \lambda) = D^{-1}(\lambda)\, D_1(\xi, \xi_0; s, \lambda)\,.$$

Диаграммы могут быть использованы для нахождения правильного порядка следования, которым определяются правила расположения отдельных элементов. В частности, порядок расположения коэффициентов минора D_1 задается таким образом, чтобы из записи для D_1 можно было получить символьную запись для $D(\lambda)$. Например, мы выбираем порядок

$$\Big|\bigcirc\blacksquare\;, \tag{22}$$

а не

$$\bigcirc\blacksquare\Big| \tag{23}$$

для члена $O(\lambda)$ в миноре D_1. В этом случае коэффициенты $D(\lambda)$, полученные из выражения для D_1, записываются как

$$D_1(\xi, \xi, \lambda) = \Bigg| - \lambda\Big(\Big|\bigcirc\blacksquare - \Big|\blacksquare\Big) + \ldots = \Big(\Big| + \lambda \Big|\blacksquare\Big)\,(1 - \lambda \bigcirc\blacksquare) + \ldots\,. \tag{24}$$

Следовательно, мы должны полагать, что $R(\xi, \xi_0; s, \lambda) = D_1(\xi, \xi_0; s, \lambda)D^{-1}(\lambda)$. В противном случае ряд для определителя не сходится.

5. Распространение без компенсации

Теперь мы подготовлены для того, чтобы получить определитель Фредгольма для ВТРР. Результат исключительно прост.

Из уравнения (8) мы видим, что $K(\xi_1, \xi_1) = G^{(0)}(\xi_1, \xi_1)$ – единичная матрица. Значит

$$\bigcirc\blacksquare \tag{25}$$

равен выражению

$$\lambda \int_0^{\xi} \mathrm{d}\,\xi_1\, G^{(0)}(\xi_1, \xi_1)\, V(\xi_1) = \lambda\, \xi\, V = \lambda\, \xi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Тем не менее из-за наличия функции шага $H(\xi_i - \xi_j)$ в $G^{(0)}(\xi_i, \xi_j)$ все диаграммы более высоких порядков исчезают. Например,

$$\xi_2 \bigcirc\blacksquare\, \xi_1 = 0\,,\quad \xi_1 \underset{\xi_3}{\bigcirc}\, \xi_2 = 0 \tag{27}$$

из-за того, что для первой диаграммы мы должны выполнить условие $\xi_1 > \xi_2$, $\xi_2 < \xi_1$, что невозможно, и для второй – $\xi_1 > \xi_2 > \xi_3 > \xi_1$, что также невозможно. Таким образом, остается

$$D(\lambda) = \exp\big(-\lambda \bigcirc\blacksquare\big)\,. \tag{28}$$

Так как $V^2 = 0$, экспоненциальную функцию вычислить просто. Результатом является уравнение

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda\xi & 1 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Очевидно, что детерминант Фредгольма определен для всех λ, и полюсы в пропагаторе ВТРР отсутствуют. Известно, что временная асимптотика пропагатора ВТРР определяется не полюсами, а седловой точкой [8, 9].

6. Распространение при наличии компенсации

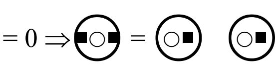
При наличии только фазовой компенсации новый пропагатор G_{PC} удовлетворяет тому же интегральному уравнению (7), что и при отсутствии компенсации. Единственный член, который изменяется – это пропагатор $G^{(0)}_{PC}(\xi, \xi_0)$ в точке $\tau = 0$ или при $V = 0$ (пропагатор учитывает только турбулентность среды). При наличии компенсации пропагатор $G^{(0)}_{PC}(\xi, \xi_0)$ является суммой нескомпенсированного пропагатора и дополнительного члена, учитывающего новые граничные условия, определяемые введением опорного сигнала и корректирующей фазы в плоскости апертуры. Пусть пространственной моде **к** при наличии компенсации будет соответствовать $g(\mathbf{к})$. Тогда [2]:

$$G^{(0)}_{PC}(\xi, \xi_0) = G^{(0)}(\xi, \xi_0) - g(\mathbf{к})\begin{pmatrix} 0 & \sin(\xi)\cos(\xi_0) \\ 0 & \cos(\xi)\cos(\xi_0) \end{pmatrix}. \tag{30}$$

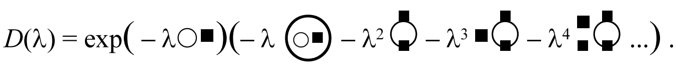
Обратите внимание на то, что дополнительный член не содержит функции шага $H(\xi - \xi_0)$. Из-за появления дополнительного члена в турбулентном пропагаторе требуется введение новых диаграмм. Этот член мы будем представлять с использованием двойных линий:

$$G^{(0)}_{PC}(\xi, \xi_0) = G^{(0)}(\xi, \xi_0) - g(\mathbf{к})G^{(0)}_{bc}(\xi, \xi_0) \leftrightarrow \left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} - g \right|\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right| . \tag{31}$$

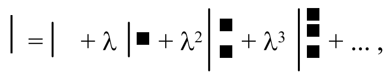
При вычислении определителя Фредгольма большое количество членов исчезает. Например, при явных вычислениях с использованием (30) можно удостовериться, что

$$\begin{vmatrix} G^{(0)}_{bc}(x_1, x_1) & G^{(0)}_{bc}(x_1, x_2) \\ G^{(0)}_{bc}(x_2, x_1) & G^{(0)}_{bc}(x_2, x_2) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$  (32)

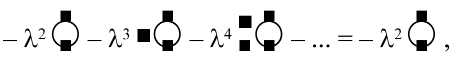
Используя диаграммы, возможно показать, что определитель сокращается до

 (33)

Рассматривая приведенное выше выражение, мы замечаем, что сумма кольцевых диаграмм при множителе λ^2 и для степеней более высоких порядков является единичным кольцом, при этом нескомпенсированное ядро стоит слева от кольца, а двойная линия, символизирующая $G^{(0)}_{bc}$ – справа. Если мы обозначим ряд Неймана для нескомпенсированного пропагатора $G(\xi - \xi_0; s, \lambda)$ жирной чертой

 (34)

то сумма кольцевых диаграмм для λ^2 и степеней λ более высоких порядков, входящих в определитель, может быть представлена как

 (35)

при этом найти необходимо только одну кольцевую диаграмму. Ряд Неймана для нескомпенсированного пропагатора может быть найден по описанной выше методике. Результат приводится в [2]. При вычислении единственной оставшейся кольцевой диаграммы член

 (36)

исчезает, и перед формулой появляется общий коэффициент

$$1 + g\,\lambda \int_0^{\xi} d\xi \frac{\sin(\alpha\xi_1)\cos(\xi_1)}{\alpha}, \quad \alpha = \sqrt{1 - \lambda}\,. \tag{37}$$

Таким образом, $D(\lambda)$ неопределен, если этот коэффициент неопределен. Зависит это от члена λ_0. Следовательно, при наличии компенсации пропагатор содержит полюсы, которыми обусловлены нестабильности компенсации. Вспомним, что $\lambda = -1/s$, то есть $-1/s$ – усиление одной моды. Усиление мод, наличие которого следует из уравнения (37), согласуется с результатами, полученными другими методами ([9]) и приведенными в литературных ссылках.

В заключение необходимо отметить, что настоящая работа была частично поддержана контрактом DAAD07–89–C–0035 ракетного полигона Белые Пески армии США, который являлся составной частью контракта 91–02–6203114 Корпорации науки и технологии.

1. Enguehard S., Hatfield B. // Proc. SPIE. 1991. V. 1415. P. 128–137.
2. Enguehard S., Hatfield B. // JOSA A. 1991. V. 8, P. 637–646.
3. Enguehard S., Hatfield B. Section <Analytic Scaling for Thermal Blooming> of the report AMPR-91-12. (To be published).
4. Enguehard S., Hatfield B. Section <Functional Reconstruction of Bloomed Whole Beam Strehl Ratios> of the Report AMPR-91-13. (To be published). Enguehard S., Hatfield B. Section <Analytic Predictions of Uplink Thermal Blooming Strehl Ratios> of the Report AMP-92-21. (To be published).
5. Enguehard S., Hatfield B. // Proc. SPIE. 1991. V. 1408. P. 186–191.
6. Enguehard S., Hatfield B. // Proc. SPIE. 1991. V. 1408. P. 178–185.
7. Mathews J., Walker R.L. Mathematical Methods of Physics. Reading, MA: W.A. Benjamin. 1970.
8. Гочелашвили К.С., Чазый И.В., Шишов В.И. // Квантовая электроника. 1980. Т. 10. С. 1207–1209.
9. Briggs R. <Models of High Spatial Frequency Thermal Blooming Instabilities> 1987. Report UCID-21118.

Лексингтон, США

Поступила в редакцию
31 марта 1993г.

S. Enguehard, B. Hatfield and W. Peterson. **Fredholm Series Solution to the Integral Equations of Thermal Blooming**

From the solution for the linear theory of thermal blooming,[2] the propagator is a 2×2 matrix that satisfies an integral equation of Fredholm type. We develop a generalized Fredholm series solution to this integral equation. Since the Kernel is a matrix, the usual determinants in the Fredholm series contain ordering ambiguities. We resolve all ordering ambiguities using the standard diagrammatic representation of the series. The Fredholm denominator is computed for the case of uncompensated and compensated propagation in a uniform atmosphere with uniform wind. When the Fredholm denominator vanishes, the propagator contains poles. In the compensated case, the denominator does develop zeros. The single mode phase compensation instability gains computed from the zeros agrees with results obtained from other methods.