«Оптика атмосферы», **4**, № 8 (1991)

УДК 535.36

В.А. Бабенко

АСИММЕТРИЯ ПОГЛОЩЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ СФЕРОЙ

В рамках теории Ми, описывающей рассеяние излучения в виде плоской электромагнитной волны на однородной сфере, получены аналитические соотношения для мощности поглощения в теневой и освещенной полусферах и коэффициента асимметрии поглощения. Построен устойчивый алгоритм расчета этих величин.

Вопрос о поглощении электромагнитного излучения аэрозолем является классическим в оптике дисперсных сред. В простейшем случае сферических рассеивателей для расчета поглощения используют теорию Ми [1]. При этом частицу обычно рассматривают как целое и характеризуют величиной сечения поглощения $\sigma_{\text{погл}}$. Альтернативный подход — подробное описание распределения поля внутри сферы [2]. Первый подход дает слишком мало сведений о процессе поглощения, а во втором, связанном с большими затратами машинного времени, информация зачастую избыточна и трудно интерпретируема. В этой связи представляет интерес введение достаточно простых дополнительных характеристик поглощения. Примером могут служить работы [3— 5] по расчету $\sigma_{\text{погл}}$ для выделенных сферических подслоев внутри многослойной сферы. На наш взгляд, удобная и информативная характеристика такого рода — отношение η мощности поглощения W_s в передней (теневой) полусфере к аналогичному значению W_l для задней (освещенной) полусферы: $\eta = W_s/W_l$. Расчет $W_{s,l}$ путем прямого численного интегрирования функции источников по соответствующим областям, особенно для больших частиц, затруднен сложной интерференционной структурой внутреннего поля. Поэтому предпочтительным является нахождение аналитических выражений для параметра асимметрии поглощения η. Решение этой задачи и представлено в данной статье.

Уточним геометрию задачи. На сферическую однородную частицу радиусом R с комплексным показателем преломления $m = N+i\varkappa$ (центр частицы совпадает с началом Декартовой системы координат x, y, z и сферической системы r, θ, φ) падает в положительном направлении оси z плоская монохроматическая ($e^{-i\omega t}$) линейно поляризованная (колебания вектора $\mathbf{E}$ вдоль оси x) электромагнитная волна с амплитудой E_0. Поскольку это полностью совпадает с системой обозначений монографии [1], сразу выпишем разложения внутренних электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей по системе векторных сферических функций $\mathbf{M}^{(1)}_{\sigma 1n}$, $\mathbf{N}^{(1)}_{\sigma 1n}$ (σ = e, o — четная и нечетная компоненты), определение и свойства которых можно найти в [1]:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\,\mathbf{H} \end{pmatrix} = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \left[\begin{pmatrix} c_n \\ -d_n \end{pmatrix} \mathbf{M}^{(1)}_{\substack{o \\ e}1n}(mk_0\mathbf{r}) - i \begin{pmatrix} d_n \\ c_n \end{pmatrix} \mathbf{N}_{\substack{e \\ o}1n}(mk_0\mathbf{r}) \right].$$

Здесь $\gamma_n = i^n/n(n+1)$; $k_0 = 2\pi./\lambda$ — волновое число для окружающего пространства; ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная, постоянные; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор внутренней точки частицы; c_n и d_n — амплитудные коэффициенты внутреннего поля (в отличие от [1] множитель $(2n+1)$ мы включили в эти коэффициенты). Компоненты полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в сферической системе координат имеют вид

$$\begin{pmatrix} E_r \\ \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\,H_r \end{pmatrix} = \frac{E_0 \sin\theta}{(m\rho a)^2} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ m \sin\varphi \end{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} \begin{pmatrix} Z_n \\ X_n \end{pmatrix} \pi_n;$$

$$\begin{pmatrix} E_\theta \\ E_\varphi \end{pmatrix} = \frac{E_0}{m\rho a} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \left[X_n \begin{pmatrix} \pi_n \\ \tau_n \end{pmatrix} - i V_n \begin{pmatrix} \tau_n \\ \pi_n \end{pmatrix} \right], \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} H_\theta \\ H_\varphi \end{pmatrix} = \frac{E_0}{\rho a} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \left[Z_n \begin{pmatrix} \pi_n \\ \tau_n \end{pmatrix} - i Y_n \begin{pmatrix} \tau_n \\ \pi_n \end{pmatrix} \right], \tag{2}$$

где для упрощения последующих выкладок введены обозначения: $\rho = k_0 R$ — параметр дифракции; $a = r/R$ — относительная радиальная координата; π_n, τ_n — угловые функции от аргумента $\mu = \cos\theta$

$$\pi_n(\mu) = P_n^{(1)}(\mu)/\sqrt{1-\mu^2},\ \ \tau_n(\mu) = -\sqrt{1-\mu^2}\,dP_n^{(1)}(\mu)/d\mu$$

($P_n^{(1)}(\mu)$ — присоединенный полином Лежандра);

$$X_n(a) = c_n\psi_n(m\rho a),\ Y_n(a) = c_n\psi_n'(m\rho a),$$
$$Z_n(a) = d_n\psi_n(m\rho a),\ V_n(a) = d_n\psi_n'(m\rho a), \tag{3}$$

$\psi_n(m\rho a)$ — функция Рикатти-Бесселя, штрих означает производную по аргументу.

По теореме Пойнтинга мощность поглощения внутри объема, окруженного замкнутой поверхностью S, равна

$$W = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int\limits_S [\mathbf{EH}^*]\cdot\mathbf{n}dS,$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S; * — комплексное сопряжение. Очевидно, что для теневой полусферы $S_s = S_1+S_3$, а для освещенной $S_l = S_2+S_3$, где S_1 — поверхность теневой полусферы ($a = 1,\ 0 \le \theta < \pi/2,\ 0 \le \varphi < 2\pi$), S_2 — поверхность освещенной полусферы ($a = 1,\ \pi/2 < \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi$), S_3 — плоская граница раздела теневой и освещенной полусфер ($0 \le a \le 1,\ \theta = \pi/2,\ 0 \le \varphi < 2\pi$). Очевидно также, что для S_1 и S_2 внешней нормалью является единичный вектор $\mathbf{e}_r$, а для S_3 вектор $\pm\mathbf{e}_0$ («+» для S_s, «−» для S_l). Если соответствующие интегралы обозначить как W_1, W_2, W_3, то параметр асимметрии

$$\eta = (W_1+W_3)/(W_2-W_3). \tag{4}$$

Перейдем к выводу выражений для W_1, W_2, W_3. В развернутом виде интеграл Пойнтинга для W_1 имеет вид

$$W_1 = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{2\pi}(E_\varphi H_\theta^* - E_\theta H_\varphi^*)_{a=1} R^2 \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Подставляя сюда разложения (1)–(2) и интегрируя по углу φ, получаем

$$W_1 = -A\,\mathrm{Re}\frac{1}{m}\int\limits_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\gamma_n\gamma_l^*[(X_n\tau_n - iV_n\pi_n)(Z_l\pi_l - iY_l\tau_l)^* +$$
$$+ (X_n\pi_n - iV_n\tau_n)(Z_l\tau_l - iY_l\pi_l)^*]_{a=1}d\mu,$$

где $A = \pi E_0^2\sqrt{\varepsilon_0}\,/\,2k_0^2\sqrt{\mu_0}$. Комбинируя члены и меняя местами интегрирование и суммирование, приходим к выражению

$$W_1 = A\,\mathrm{Re}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\gamma_n\gamma_l^*\left[i\beta_{nl}\int\limits_0^1(\pi_n\pi_l + \tau_n\tau_l)d\mu - \alpha_{nl}\int\limits_0^1(\pi_n\tau_l + \tau_n\pi_l)d\mu\right], \tag{5}$$

где

$$\alpha_{nl} = (X_nZ_l^* + V_nY_l^*)_{a=1},\ \beta_{nl} = (V_nZ_l^* - X_nY_l^*)_{a=1}. \tag{6}$$

Известно [6], что

$$\int\limits_0^1(\pi_n\tau_l + \tau_n\pi_l)d\mu = \pi_n(0)\pi_l(0); \tag{7}$$

$$\int\limits_0^1(\pi_n\pi_l + \tau_n\tau_l)d\mu = \frac{n(n+1)\pi_n(0)\tau_l(0) - l(l+1)\pi_l(0)\tau_n(0)}{(n-l)(n+l+1)},$$
$$n \ne l. \tag{8}$$

Применение интеграла (8) при $n = l$ представляет, с одной стороны, некоторые затруднения, однако использование интегрирования по частям и уравнения для полиномов Лежандра приводит к выражению

$$\int_0^1 (\pi_n^2 + \tau_n^2)\, d\mu = n^2 (n+1)^2/(2n+1). \tag{9}$$

С другой стороны,

$$\pi_l(0) = \begin{cases} \nu_l (-1)^{(l-1)/2}, \\ 0, \end{cases} \quad \tau_l(0) = \begin{cases} 0, & l \text{ нечетное} \\ l\nu_{l+1}(-1)^{l/2}, & l \text{ четное} \end{cases} \tag{10}$$

где $\nu_l = l!!/(l-1)!!$. Поэтому после некоторых преобразований вместо (5) получаем

$$W_1 = A \operatorname{Re} \frac{1}{m} \left[i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_{nn}}{2n+1} - \sum_{n=1}^{\infty}{}' \sum_{l=1}^{\infty}{}' \frac{\alpha_{nl}}{nl\nu_{n+1}\nu_{l+1}} + \sum_{n=2}^{\infty}{}'' \sum_{l=1}^{\infty}{}' \frac{\nu_l (\beta_{ln} - \beta_{nl})}{\nu_n (n-l)(n+l+1)} \right], \tag{11}$$

где Σ' и Σ'' означают соответственно суммирование по нечетным и четным индексам. Соотношение (11) для W_1 можно рассматривать как окончательное (отметим лишь, что при учете (6) первая двойная сумма распадается на произведение одинарных сумм). Выражение для W_2 получается из соответствующего выражения (5) для W_1 заменой пределов интегрирования на $(-1,0)$. Но при такой замене интегралы (7) и (8) меняют знак, а интеграл (9) остается неизменным. В результате W_2 отличается от W_1 (см. (11)) лишь измененными знаками перед двойными суммами.

Для плоской границы раздела между теневой и освещенной полусферами интеграл Пойнтинга имеет вид

$$W_3 = \frac{R^2}{2} \operatorname{Re} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (E_r H_\varphi^* - E_\varphi H_r^*)_{\mu=0}\, a\, da\, d\varphi. \tag{12}$$

Выпишем компоненты полей при $\mu = 0$ (с учетом (10)):

$$\begin{pmatrix} E_r \\ \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} H_r \end{pmatrix}_{\mu=0} = \frac{E_0}{(m\rho a)^2} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ m \sin\varphi \end{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \nu_n \begin{pmatrix} Z_n \\ X_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E_\varphi \\ \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} H_\varphi \end{pmatrix}_{\mu=0} = \frac{E_0}{m\rho a} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ m\cos\varphi \end{pmatrix} \left[\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n\nu_{n+1}} \begin{pmatrix} V_n \\ Y_n \end{pmatrix} + \sum_{n=2}^{\infty}{}'' \frac{1}{\nu_n} \begin{pmatrix} X_n \\ Z_n \end{pmatrix} \right]$$

и подставим их в (12). После интегрирования по углу φ получаем

$$W_3 = \frac{A}{\rho} \operatorname{Re} \int_0^1 \frac{da}{a^2} \left[\frac{1}{m^2} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \nu_n Z_n \left(\sum_{l=1}^{\infty}{}' Y_l \frac{\nu_l}{l(l+1)} + \sum_{l=2}^{\infty}{}'' \frac{Z_l}{\nu_l} \right)^* + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{|m|^2} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \nu_n X_n \left(\sum_{l=1}^{\infty}{}' V_l \frac{\nu_l}{l(l+1)} + \sum_{l=2}^{\infty}{}'' \frac{X_l}{\nu_l} \right)^* \right]. \tag{13}$$

К сожалению, нам не удалось избавиться от интеграла по a в выражении (13), поскольку интегралы вида

$$\int_0^1 \psi_n(m\rho a)\, \psi_l^*(m\rho a) \frac{da}{a^2} \quad (n \text{ нечетное, } l \text{ четное})$$

не имеют замкнутого аналитического представления. Не удалось получить для (13) и рекурсивных соотношений по n и l. Поэтому выражение (13) для W_3 следует считать окончательным. Отметим, что интегрирование в (13) идет по «спокойной» области, где практически не наблюдается интерференционная структура внутреннего поля [2].

Таким образом, соотношения (4), (11) и (13) дают возможность аналитического расчета $\sigma_{\text{погл}}$ для освещенной и теневой полусфер и коэффициента асимметрии поглощения η для однородной сферы. Расчет интеграла (13), точнее функций X_n, Y_n, Z_n, V_n в подынтегральных точках a_i позволяет одновременно провести вычисление функции $W(a)$, представляющей собой мощность поглощения в сферической области радиуса aR [3, 4]:

$$W(a) = 2A\,\mathrm{Re}\left\{\frac{i}{m}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)^{-1}\left[V_n(a)\,Z_n^*(a) - X_n(a)\,Y_n^*(a)\right]\right\}, \tag{14}$$

а также усредненной по углам θ, φ величины нормированной интенсивности локального электрического поля $B(a)$ [4]:

$$B(a) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} B(a,\ \theta,\ \varphi)\sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2|m|^2\rho^2 a^2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)^{-1}\left[\frac{n(n+1)}{|m|^2\rho^2 a^2}|Z_n(a)|^2 + |V_n(a)|^2 + |X_n(a)|^2\right]. \tag{15}$$

Отметим, что аналогичная (15) формула в [4] содержит ошибку в коэффициенте перед суммой. Функция $B(a)$, элементарным образом связанная с усредненной по углам функцией $q(a)$ источников тепла ($q(a) = 4\pi I_0 N\varkappa B(a)/\lambda$, где I_0 — интенсивность падающей волны), может быть использована при решении в одномерном приближении задачи о тепловом воздействии электромагнитной волны на аэрозольную частицу, особенно при невысоких значениях I_0. При $a = 1$ выражение (14) фактически аналогично формуле Каттавара—Эйснера [7] для, фактора эффективности поглощения.

Остановимся на некоторых вычислительных аспектах задачи. Если ввести логарифмические производные функций Рикатти-Бесселя φ_n и Рикатти-Ханкеля ξ_n

$$D_n(m\rho a) = \frac{\psi_n'(m\rho a)}{\psi_n(m\rho a)},\ D_n(m\rho) = \frac{\psi_n'(m\rho)}{\psi_n(m\rho)},\quad G_n(\rho) = \frac{\xi_n'(\rho)}{\xi_n(\rho)}$$

и отношение функций

$$R_n(m\rho a) = \frac{\psi_n(m\rho a)}{\psi_n(m\rho)},$$

то с учетом явных выражений для амплитудных коэффициентов c_n и d_n [1] формулы (3) перепишутся в виде

$$X_n(a) = \frac{im(2n+1)R_n(m\rho a)}{\xi_n(\rho)\left[G_n(\rho) - mD_n(m\rho)\right]},\quad Y_n(a) = X_n(a)\,D_n(m\rho a),$$

$$Z_n(a) = \frac{im(2n+1)R_n(m\rho a)}{\xi_n(\rho)\left[mG_n(\rho) - D_n(m\rho)\right]},\quad V_n(a) = Z_n(a)\,D_n(m\rho a).$$

Таким образом, для расчета $W_{1,2}$ необходимо получить набор ·функций $D_n(m\rho)$, $G_n(\rho)$, $\xi_n(\rho)$ и ν_n, а для численного расчета интеграла W_3 — значения функций $D_n(m\rho a_i)$ и $R_n(m\rho a_i)$ в каждой точке a_i разбиения интервала интегрирования $a = 0\div1$.

Функции $\xi_n(\rho)$, $G_n(\rho)$, ν_n рассчитываются по восходящей рекурсии

$$\xi_{n+1} = \frac{2n+1}{\rho}\xi_n - \xi_{n-1},\quad G_n = -\frac{n}{\rho} + \frac{1}{n/\rho - G_{n-1}},\quad \nu_{n+1} = \frac{n+1}{\nu_n}$$

с начальными значениями $\xi_0 = -ie^{i\rho}$, $\xi_1 = -(1+i/\rho)e^{i\rho}$, $G_0 = i$, $\nu_1 = 1$, а функции $D_n(m\rho)$ и $D_n(m\rho a_i)$ — по нисходящей рекурсии

$$D_{n-1}(z) = \frac{n}{z} - \frac{1}{n/z + D_n(z)},$$

начиная с некоторого номера $L = fL_W$, где L_W — оценка числа членов ряда Ми в соответствии с работой [8], а f — эмпирический коэффициент, больший единицы. Появление коэффициента f связано с тем, что ряды по амплитудным коэффициентам внутреннего поля сходятся несколько медленнее аналогичных рядов по коэффициентам внешнего поля, для которых была первоначально введена оценка L_W. Наш опыт расчетов внутреннего поля показывает, что $f \sim 1,\ 2$. Начальное значение D_L рассчитывается по методу цепных дробей Ленца [9].

В соответствии с рекомендациями работы [10] отношение функций $R_n(m\rho a_i)$ рассчитывается по восходящей рекурсии

$$R_n = \frac{D_n(m\rho) + n/m\rho}{n + m\rho a_i D_n(m\rho a_i)} \cdot m\rho a_i R_{n-1}.$$

Начальное значение R_0 удобно представить в виде, не содержащем легко переполняющихся множителей типа $\exp(\varkappa\rho)$:

$$R_0 = \frac{B\sin(N\rho a_i) - iC\cos(N\rho a_i)}{U\sin(N\rho) - iQ\cos(N\rho)} \cdot e^{\varkappa\rho(a_i - 1)},$$

где

$$\left.\begin{matrix} B \\ C \end{matrix}\right\} = e^{-2\varkappa\rho a_i} \pm 1, \quad \left.\begin{matrix} U \\ Q \end{matrix}\right\} = e^{-2\varkappa\rho} \pm 1.$$

Численное интегрирование выражения (13) осуществлялось по квадратурным формулам Гаусса [11]. Число узлов п квадратуры предварительно оценивалось на основании нашего опыта расчета внутренних полей и уточнялось исходя из сходимости (13) при увеличении числа точек интегрирования. В подавляющем большинстве рассмотренных нами ситуаций для достижения четырех значащих цифр W_3 оказалось достаточным $\bar{n} = 10-20$. Исключением являются лишь достаточно большие ($\rho > 100$) слабопоглощающие частицы ($\varkappa < 10^{-4}$), где приходится использовать $\bar{n} \sim 30$ и выше.

В заключение автор благодарит А.П. Пришивалко за обсуждения, стимулировавшие выполнение данной работы.

1. Борен К., Хафмен Д. //Поглощение и рассеяние света малыми частицами, М.: Мир, 1986. 662 с.
2. Пришивалко А.П. //Оптические и тепловые поля внутри светорассеивающих частиц. Минск: Наука и техника, 1983. 191 с.
3. Бабенко В.А., Астафьева Л.Г. //Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1985. № 1. С. 55—60.
4. Mackowsky D.W., Altenkirch R.A.. Mengus M.P. //Appl. Optics. 1990. V. 29. № 10. P. 1551—1559.
5. Sitarsky M. //Langmuir. 1987. V. 3. № 1. P. 85—93.
6. Малушков Г.Д. //Труды МИРЭА. 1974. № 70. С. 153—157.
7. Kattawar G.W., Eisner M. //Appl. Optics. 1970. V. 9. № 12. P.2685—2690.
8. Wiscombe W.J. //Appl. Optics. 1980. V. 19. № 9. P. 1505—1509.
9. Lentz W.J. //Appl. Optics. 1976. V. 15. № 3. P. 668—671.
10. Toon O.B., Ackerman T.P. //Appl. Optics. 1981. V. 20. № 20. P.3657—3660.
11. Справочник по специальным функциям /Под ред. М.А. Абрамовиц и И. Стиган. М.: Наука, 1979. Гл. 25.

Институт физики АН БССР им. Б.И. Степанова,
Минск

Поступила в редакцию
11 апреля 1991 г.

V.A. Babenko. **Asymmetry of Radiation Absorption by a Homogeneous Sphere**.

Analytical expression for the efficiency of radiation absorption in the shadow and lighted hemispheres and for the absorption asymmetry coefficient are derived within the framework of the Mie theory on the scattering of plane-electromagnetic wave by a homogeneous sphere. The stable procedure is constructed for the calculation of the quantities.