

**А.А. Попов, О.В. Шефер**

**О ГРАНИЦАХ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА ФИЗИЧЕСКОЙ ОПТИКИ  
В ЗАДАЧАХ РАССЕЯНИЯ СВЕТА НА КРУПНЫХ КРИСТАЛЛАХ.  
Часть 1. РАССЕЯНИЕ НА КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКЕ**

В рамках метода физической оптики получены аналитические соотношения для сечений и факторов эффективности ослабления, рассеяния и поглощения для круглой пластинки в случае, когда нормаль к ее основанию совпадает с направлением распространения падающей волны. На основе энергетического соотношения, связывающего найденные характеристики, показано, что для погрешности метода физической оптики существует оценка в виде линейной комбинации двух интегралов, значения которых зависят только от дифракционного параметра  $p = ka$  ( $a$  – радиус пластинки). Приведены различные численные оценки, связывающие погрешность метода с дифракционным параметром.

В наших статьях [1, 2] показано, что метод физической оптики является наиболее оптимальным методом при описании рассеяния оптического излучения, взаимодействующего с пространственно ориентированными атмосферными кристаллами. Действительно, из-за многогранной формы рассеивателя электромагнитное поле вблизи его поверхности формируется в виде пучков параллельных лучей. Причем линейные размеры каждого образующего пучка практически для любого атмосферного кристалла многократно превышают длину волны не только видимого, но и ближнего и среднего ИК-диапазонов длин волн. Если известны электромагнитное поле в сечении каждого пучка и контуры этого сечения, то метод физической оптики позволяет достаточно просто пересчитать электромагнитные поля рефракционных пучков из ближней зоны в дальнюю. Заметим, что этот метод не учитывает возможные краевые возмущения электромагнитного поля рефракционных пучков. Однако погрешность метода является незначительной при условии, что краевая область сечения исследуемого пучка, в которой существуют искажения поля, на много меньше всего сечения пучка. В конечном счете это требование сводится к известному утверждению, что метод физической оптики тем точнее описывает процесс рассеяния электромагнитного поля на многограннике, чем больше его линейные размеры относительно длины волны. В настоящей статье последнее утверждение реализуется в количественных оценках, выведенных на основе закона сохранения энергии.

В качестве модели кристалла здесь выбрана ее наиболее простая геометрическая форма в виде круглой пластинки, которая имеет комплексный показатель преломления  $\tilde{n} = n + i\kappa$ , радиус  $a$ , толщину  $d$ . Причем нормаль к основанию пластинки ориентирована вдоль направления распространения падающей на нее плоской волны. Подобная постановка задачи дает возможность получить все энергетические характеристики рассеяния в наиболее простой и удобной для анализа форме.

Факторы эффективности ослабления ( $Q_{ext}$ ), рассеяния ( $Q_{sca}$ ) и поглощения ( $Q_{abs}$ ) для любого рассеивателя, в том числе и для круглой пластинки, связаны следующими соотношениями [3]:

$$Q_{ext} = Q_{sca} + Q_{abs}; \quad \kappa \neq 0, \tag{1}$$

$$Q_{ext} = Q_{sca}; \quad \kappa = 0. \tag{2}$$

Опираясь на соотношение (2), установим границы применимости метода физической оптики для частного случая ( $\kappa = 0$ ) сформулированной выше задачи рассеяния. Далее сделаем необходимое обобщение при переходе к общему случаю задачи, когда  $\kappa \neq 0$  и справедливо соотношение (1).

При нормальном падении волны на основание пластинки решение задачи рассеяния в силу симметрии сводится к скалярному случаю. Причем в формуле для рассеянного поля, записанной в сферической системе координат ( $r, \vartheta, \varphi$ ), должна отсутствовать зависимость от азимутального угла  $\varphi$ . С учетом перечисленных упрощений рассеяние на пластинке любой составляющей электромагнитного поля, имеющей единичную амплитуду, описывается соотношением:

$$\Psi(r, \vartheta) = S(\vartheta) \exp(i k r) / i k r, \quad (3)$$

где

$$S(\vartheta) = (1 - T) F_1(\vartheta) + R F_2(\vartheta). \quad (4)$$

В соотношении (4) первое слагаемое объединяет с учетом взаимных фазовых набегов дифракционное поле и рассеянные поля всех пучков, вышедших из пластинки в направлении распространения падающей волны. Второе слагаемое включает рассеянные поля отраженного пучка и всех пучков, вышедших из пластинки в обратном направлении. В рамках поставленной задачи  $T$  и  $R$  определяются как френелевские коэффициенты для плоской волны, взаимодействующей с полупрозрачным слоем, и имеют вид

$$T = \frac{t \exp[i k d (n - 1)]}{1 - r \exp(2 i k d n)}, \quad (5)$$

$$R = \frac{n - 1}{n + 1} \left( 1 - \frac{t \exp(2 i k d n)}{1 - r \exp(2 i k d n)} \right), \quad (6)$$

где

$$t = \frac{4 n}{(n + 1)^2}; r = \left( \frac{n - 1}{n + 1} \right)^2.$$

Амплитудные функции  $F_1(\vartheta)$  и  $F_2(\vartheta)$ , характеризующие рассеяние прошедших и отраженных пучков, определяются как интегралы Фраунгофера по площади основания пластинки. В конечном счете эти интегралы сводятся к следующим, типичным для теории рассеяния [3, 4] аналитическим выражениям:

$$F_1(\vartheta) = p^2 \frac{1 + \cos \vartheta}{2} \frac{J_1(p \sin \vartheta)}{p \sin \vartheta}; \quad (7)$$

$$F_2(\vartheta) = p^2 \frac{1 + \cos(\pi - \vartheta)}{2} \frac{J_1(p \sin(\pi - \vartheta))}{p \sin(\pi - \vartheta)}, \quad (8)$$

где  $p = k a$  – дифракционный параметр;  $k$  – волновое число;  $J_1(z)$  – функция Бесселя первого порядка.

Сечение ослабления  $\sigma_{\text{ext}}$  определим по формуле [3, 4]:

$$\sigma_{\text{ext}} = \frac{4\pi}{k^2} \text{Re}(S(0)). \quad (9)$$

Подставляя (4) в (9) и учитывая, что  $F_2(0) = 0$  и  $F_1(0) = (1/2) p^2 = (1/2)(k a)^2$ , для сечения ослабления получим

$$\sigma_{\text{ext}} = 2\pi a^2 (1 - \text{Re}(T)), \quad (10)$$

а искомый фактор эффективности ослабления определим соотношением:

$$Q_{\text{ext}} = \sigma_{\text{ext}} / \pi a^2 = 2(1 - \text{Re}(T)). \quad (11)$$

Сечение рассеяния  $\sigma_{\text{sca}}$  и фактор эффективности рассеяния  $Q_{\text{sca}}$  определим по формулам [4]:

$$\sigma_{\text{sca}} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{|S(\vartheta)|^2}{k^2} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{2\pi}{k^2} \int_0^\pi |S(\vartheta)|^2 \sin \vartheta \, d\vartheta, \quad (12)$$

$$Q_{\text{sca}} = \sigma_{\text{sca}} / \pi a^2. \quad (13)$$

Используя (4), получим соотношение для  $|S(\vartheta)|^2$ . В результате несложных преобразований имеем

$$|S(\vartheta)|^2 = [F_1(\vartheta)]^2 |1 - T|^2 + [F_2(\vartheta)]^2 |R|^2 + 2 F_1(\vartheta) F_2(\vartheta) \text{Re}[(1 - T)R^*]. \quad (14)$$

Для амплитудных функций  $F_1(\vartheta)$  и  $F_2(\vartheta)$  нетрудно доказать следующие тождества:

$$\int_0^\pi [F_1(\vartheta)]^2 \sin \vartheta \, d\vartheta = \int_0^\pi [F_2(\vartheta)]^2 \sin \vartheta \, d\vartheta, \quad (15)$$

$$\int_0^\pi F_1(\vartheta) F_2(\vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta = 2 \int_0^{\pi/2} F_1(\vartheta) F_2(\vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta. \quad (16)$$

С учетом соотношений (14) – (16) выражение для фактора эффективности рассеяния преобразуется к виду:

$$Q_{\text{sca}} = (|1 - T|^2 + |R|^2) A(p) + 2 \text{Re}[(1 - T)R^*] B(p), \quad (17)$$

где

$$A(p) = 2 \int_0^\pi \left( \frac{1 + \cos \vartheta}{2} \right)^2 \frac{J_1^2(p \sin \vartheta)}{\sin \vartheta} \, d\vartheta, \quad (18)$$

$$B(p) = \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta J_1^2(p \sin \vartheta) \, d\vartheta. \quad (19)$$

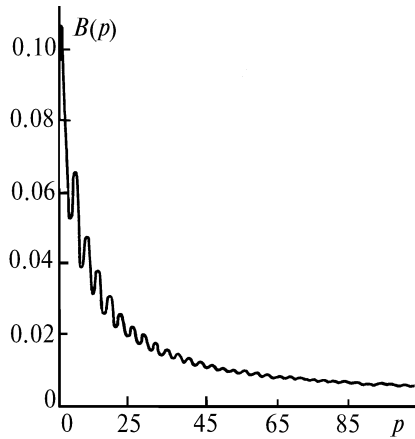


Рис. 1. Зависимость значений интегралов  $A(p)$  от дифракционного параметра  $p$

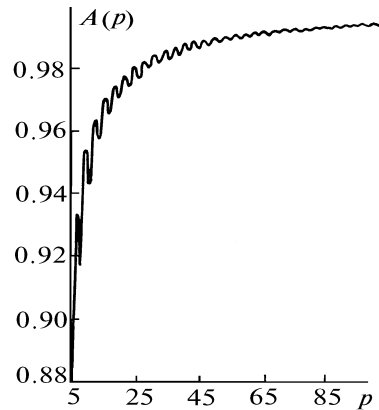


Рис. 2. Зависимость значений интегралов  $B(p)$  от дифракционного параметра  $p$

На рис. 1 и 2 приведены зависимости значений интегралов  $A(p)$  и  $B(p)$  от дифракционного параметра  $p$ . Анализируя выражения (18) и (19), нетрудно убедиться, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} A(p) = 1, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} B(p) = 0. \quad (20)$$

В результате при  $p \rightarrow \infty$  доказательство соотношения (2) сводится к доказательству следующего тождества:

$$2(1 - \text{Re}(T)) = |1 - T|^2 + |R|^2, \quad (21)$$

которое нетрудно преобразовать к более простому виду

$$|T|^2 + |R|^2 = 1. \quad (22)$$

После подстановки в тождество (22) выражений (5) и (6) для  $T$  и  $R$  оно легко доказывается. Следует заметить, что в тождестве (22) закон сохранения электромагнитной энергии представлен в более видимой форме, чем в соотношении (2). Действительно, из (22) следует, что при отсутствии в пластинке поглощения ( $\kappa = 0$ ) сумма интенсивностей прошедшего и отраженного электромагнитных полей равна интенсивности падающего поля.

Как и следовало ожидать, метод физической оптики точно описывает процесс <рассеяния> только при  $p \rightarrow \infty$ . Оценим погрешность данного метода в случае произвольного дифракционного параметра  $p$ . Введем следующее обозначение:

$$\frac{Q_{\text{ext}} - Q_{\text{sca}}}{Q_{\text{ext}}} = \Delta(p). \quad (23)$$

Соотношение (2) связывает между собой локальные и интегральные значения амплитудной функции  $S(\vartheta)$ . Тогда отличие величин  $Q_{\text{ext}}$  и  $Q_{\text{sca}}$  примем за оценку погрешности метода, в рамках которого получена амплитудная функция  $S(\vartheta)$ . Чтобы найти верхнюю границу для  $\Delta(p)$ , воспользуемся следующим неравенством:

$$-(|1 - T|^2 + |R|^2) \leq 2\text{Re}[(1 - T)R^*] \leq |1 - T|^2 + |R|^2. \quad (24)$$

Отметим, что неравенство (24) легко доказывается в общем виде, т.е. оно не связано с определенными значениями комплексных величин  $T$  и  $R$ . Преобразуем неравенство (24) с учетом тождества (21) и выражений (11), (17) для  $Q_{\text{ext}}$  и  $Q_{\text{sca}}$ . В результате имеем:

$$Q_{\text{ext}} = (A(p) - B(p)) \leq Q_{\text{sca}} \leq Q_{\text{ext}} (A(p) + B(p)). \quad (25)$$

Объединяя соотношение (23) и левую часть неравенства (25), получаем оценку для относительной характеристики (23):

$$\Delta(p) \leq 1 - A(p) + B(p). \quad (26)$$

Из последнего неравенства, в частности, вытекают следующие численные оценки:  $\Delta(p) < 10\%$  при  $p > 10$  ( $a > 1,6 \lambda$ );  $\Delta(p) < 5\%$  при  $p > 20$  ( $a > 3,2 \lambda$ );  $\Delta(p) < 2\%$  при  $p > 55$  ( $a > 8,8 \lambda$ );  $\Delta(p) < 1\%$  при  $p > 120$  ( $a > 19,1 \lambda$ ). Из неравенства (26) следует, что только высшая степень локализации амплитудных функций вблизи направлений выхода рефракционных пучков ( $A(p) \approx 1$ ,  $B(p) \approx 0$ ) обеспечивает малые значения относительной погрешности.

Пусть теперь показатель поглощения пластинки  $\kappa$  отличен от нуля. Данное усложнение задачи влечет за собой только формальные изменения в полученных выше соотношениях. В частности, вещественный показатель преломления  $n$  в формулах для  $T$  и  $R$  необходимо заменить на комплексный показатель  $\tilde{n} = n + i\kappa$ . После такой замены указанные выше коэффициенты Френеля обозначим символами  $\tilde{T}$  и  $\tilde{R}$ . Процедуры решения поставленной задачи рассеяния для общего ( $\kappa \neq 0$ ) и частного ( $\kappa = 0$ ) случаев совпадают. Поэтому величины  $Q_{\text{ext}}$  и  $Q_{\text{sca}}$  при  $\kappa \neq 0$  будут определяться теми же соотношениями (11) и (17), в которых только необходимо вместо  $T$  и  $R$  использовать их новые обозначения  $\tilde{T}$  и  $\tilde{R}$ .

Определим фактор эффективности поглощения  $Q_{\text{abs}}$  из формулы (1), считая, что  $A(p) = 1$ ,  $B(p) = 0$ . В результате имеем:

$$Q_{\text{abs}} = 1 - |\tilde{T}|^2 - |\tilde{R}|^2. \quad (27)$$

Обратившись к доказанному при  $\kappa = 0$  тождеству (22), нетрудно убедиться, что правая часть соотношения (27) включает в себя единственно возможную комбинацию коэффициентов Фре-

нея, которая описывает поглощение в пластинке электромагнитной энергии. Действительно, если из интенсивности падающего на пластинку поля вычесть интенсивности прошедшего и отраженного электромагнитных полей, то полученная разность будет определять интенсивность, потерянную на поглощение. Таким образом, единственно возможный вид правой части соотношения (27) доказывает справедливость тождества (1). В результате полученная выше оценка (26) для относительной погрешности метода физической оптики остается в силе при переходе к поглощающим рассеивателям.

Используя (27), запишем формулу для сечения поглощения  $\sigma_{\text{abs}}$ , которая может оказаться полезной при оценке поглощенной интенсивности для оптического излучения, взаимодействующего с системой ориентированных пластинчатых кристаллов. Она имеет вид

$$\sigma_{\text{abs}} = \pi a^2 (1 - |\tilde{T}|^2 - |\tilde{R}|^2). \quad (28)$$

Напомним, что  $\tilde{T}$  и  $\tilde{R}$  определяются соотношениями (5) и (6), в которых  $n$  следует заменить на  $\tilde{n}$ .

Линейные размеры ориентированных в пространстве атмосферных кристаллов составляют, как правило, сотни и даже тысячи микрометров. Поэтому полученные в статье численные оценки, устанавливающие границы применимости метода физической оптики, гарантируют его использование для указанных кристаллов с более чем удовлетворительной точностью не только в видимой части, но и в ИК-диапазоне длин волн.

Авторы выражают благодарность Американскому астрономическому обществу за финансовую поддержку данной работы.

1. П о п о в А . А . , Ш е ф е р О . В . // К поляризационному лазерному зондированию кристаллических облаков: простейшая оптическая модель частицы. Томск, 1988. 59 с. (Препринт / ИОА СО АН СССР, N 65).
2. П о п о в А . А . // ДАН СССР. 1988. Т. 303. N 3. С.594–597.
3. В а н д е Х ю л с т Г . // Рассеяние света малыми частицами. М.: ИЛ, 1961. 536 с.
4. Б о р е н К . , Х а ф м а н Д . // Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 660 с.

Институт оптики атмосферы СО РАН,  
Томск

Поступила в редакцию  
9 февраля 1993 г.

**A. A. Popov, O. V. Shefer. Applicability Limits of the Method of Physical Optics in the Problems on Light Scattering by Large Crystals. Part I. Scattering by a Round Plate.**

Analytical relations for cross-section and the extinction, scattering, and absorption efficiency factors are obtained within the framework of the physical optics method for a round plate in the case when the normal to its base coincides with the direction of incident wave propagation. It is shown based on the energy relationship between the sought characteristics that the error of the physical optics method is estimated by a linear combination of two integrals whose values depend only on the diffraction parameter  $p = ka$  ( $a$  is the radius of a profile). Different numerical estimates of the relationship of the method uncertainty with the diffraction parameter are presented.