

Т.А. Сушкевич

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ СИСТЕМЫ «АТМОСФЕРА — ОКЕАН»  
МЕТОДОМ ФУНКЦИИ ВЛИЯНИЯ**

Распространение солнечного излучения в системе «атмосфера — океан» описывается моделью с двумя средами, разделенными отражающей и пропускающей гладкой или взволнованной границей. Решение представлено в виде линейного и нелинейных функционалов — оптического передаточного оператора, ядром которого является вектор-функция влияния атмосферы и океана. Вектор-функция влияния для горизонтально-однородной задачи — отклик каждой среды на внешний мононаправленный поток излучения, падающий со стороны границы раздела.

В настоящей статье сформулированы математические модели, позволяющие достаточно детально изучать процессы формирования полей излучения и переноса изображения в системе «атмосфера — океан» на базе вычислительных экспериментов. Метод функций влияния (ФВ), или фундаментальных решений, развит применительно к двухсредным задачам с отражающей и пропускающей, гладкой или взволнованной границей раздела [1–4]. В основе математического аппарата построения моделей ФВ и оптического передаточного оператора (ОПО) лежат ряды теории возмущений, теория обобщенных решений кинетических уравнений и теория фундаментальных решений уравнений с дифференциальными операторами в частных производных. Полное решение задачи с учетом нелинейных приближений по кратности взаимодействия (отражения и пропускания) излучения с границей раздела сводится к нахождению функций влияния атмосферы и океана — фундаментальных решений линейных задач теории переноса отдельно для каждой из сред и вычислению нелинейных функционалов, ядрами которых являются ФВ атмосферы ( $\theta_a$ ) и океана ( $\theta_{ок}$ ). В результате, помимо того, что определяется полное решение задачи, устанавливается явная связь между измеряемыми радиационными характеристиками и параметрами границы раздела сред, которая описывает оптический передаточный оператор системы. Принципиально новыми результатами в предлагаемом подходе являются сведение численного решения одной краевой задачи для двухсредной системы к численному решению двух краевых задач для каждой из сред отдельно и формулировка ОПО в матричном виде с ядром — двухкомпонентным вектором  $\{\Theta = \theta_a, \theta_{ок}\}$ . Построенные математические модели ФВ и ОПО позволяют разрабатывать новые алгоритмы дистанционного зондирования системы «атмосфера — океан» и теории переноса изображений.

В этой статье мы ограничиваемся рассмотрением горизонтальнооднородной задачи, хотя излагаемый подход развит на задачи с неоднородностями в горизонтальных плоскостях. Как будет показано, в случае однородных гладких или взволнованных границ раздела ФВ атмосферы и океана являются откликами сред на распространение мононаправленного широкого пучка.

**Постановка задачи**

Распространение солнечного излучения в системе «атмосфера — океан» описывается двумя классами задач:

- 1) задачи с неортотропной границей, когда океан моделируется как отражающая подложка (рис. 1);
- 2) задачи для системы «атмосфера — океан» с внутренней границей раздела, отражающей и пропускающей излучение (рис. 2).

Задачи с неортотропной поверхностью детально рассмотрены в работах [1–4]. Здесь же основное внимание уделяется задачам для системы (рис. 2).

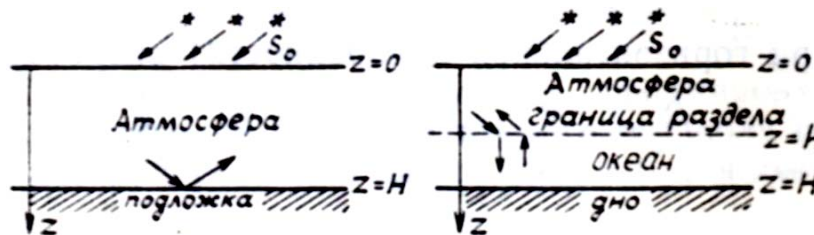


Рис. 1

Рис. 2

Направление распространения излучения определяется вектором  $s = \{\mu, \varphi\}$ ,  $\mu = \cos \nu$ ,  $\mu \in [-1, 1]$ , на единичной сфере  $\Omega = [-1, 1] \times [0, 2\pi]$ , где  $\nu \in [0, 180^\circ]$  — зенитный угол, отсчитываемый от по-

ложительного направления оси  $z$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$  — азимут. Значение  $\varphi = 0$  полагается в плоскости солнечного вертикала, т.е. солнечный поток падает на границу слоя  $z = 0$  в направлении  $s_0 = \{\mu_0, \varphi_0\}$  с зенитным углом  $\nu_0 \in [0, 90^\circ]$ ,  $\mu_0 = \cos \nu_0$  и азимутом  $\varphi_0 = 0$ .

Для нисходящего, пропущенного излучения вводится полусфера направлений  $\Omega^+ = \{(\mu, \varphi): \mu > 0\}$ , а для восходящего, отраженного излучения — полусфера  $\Omega^- = \{(\mu, \varphi): \mu < 0\}$ ;  $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ .

Граничные условия записываем с помощью следующих множеств:

$$\Gamma_0 = \{(z, s): z=0, s \in \Omega^+\}; \quad \Gamma_H = \{(z, s): z=H, s \in \Omega^-\}; \\ \Gamma_{h^+} = \{(z, s): z=h, s \in \Omega^+\}; \quad \Gamma_{h^-} = \{(z, s): z=h, s \in \Omega^-\}.$$

На уровне  $z = h$  располагается граница раздела двух сред. Прохождение излучения через эту границу описывается с помощью операторов отражения  $\hat{R}_1, \hat{R}_2$  и пропускания  $\hat{T}_{12}, \hat{T}_{21}$ , где индекс 1 относится к верхнему слою (обычно атмосфера), а индекс 2 — к нижнему слою (океан):

$$[\hat{R}_1 \Phi^+](z=h, s) = \int_{\Omega^+} \Phi(z=h, s') R_1(s, s') ds', \quad s \in \Omega^-; \\ [\hat{R}_2 \Phi^-](z=h, s) = \int_{\Omega^-} \Phi(z=h, s') R_2(s, s') ds', \quad s \in \Omega^+; \\ [\hat{T}_{12} \Phi^+](z=h, s) = \int_{\Omega^+} \Phi(z=h, s') T_{12}(s, s') ds', \quad s \in \Omega^+; \\ [\hat{T}_{21} \Phi^-](z=h, s) = \int_{\Omega^-} \Phi(z=h, s') T_{21}(s, s') ds', \quad s \in \Omega^-.$$

Оптические свойства атмосферы и океана задаются высотными распределениями коэффициента экстинкции  $\sigma_t(z) = \sigma_s(z) + \sigma_{abs}(z)$ , поглощения  $\sigma_{abs}(z)$ , суммарного рассеяния  $\sigma_s(z) = \sigma_a(z) + \sigma_m(z)$ , включающего аэрозольную  $\sigma_a(z)$  и молекулярную  $\sigma_m(z)$  компоненты, а также суммарной индикатрисой рассеяния

$$\gamma(z, \chi) = \frac{\sigma_a(z)}{\sigma_s(z)} \gamma_a(z, \chi) + \frac{\sigma_m(z)}{\sigma_s(z)} \gamma_m(\chi),$$

в общем случае содержащей аэрозольную  $\gamma_a(z, \chi)$  и молекулярную  $\gamma_m(\chi) = 3(1 - \cos^2 \chi)/(16\pi)$  составляющие.

Интегродифференциальный оператор кинетического уравнения  $\hat{K} \equiv \hat{D} - \hat{S}$  содержит оператор переноса  $\hat{D} \equiv (s, \text{grad}) + \sigma_t(z)$  и интеграл столкновений  $\hat{S} \Phi = \sigma_s(z) \int_{\Omega} \Phi \gamma ds'$ . В пространственно-одномерной плоской задаче (при горизонтальной однородности) оператор переноса

$$\hat{D}_z \equiv \mu \frac{\partial}{\partial z} + \sigma_t(z); \quad \hat{K}_z \equiv \hat{D}_z - \hat{S}.$$

### О разделении вкладов атмосферы и океана

Рассмотрим краевую задачу для уравнения переноса излучения в системе «атмосфера — океан» с границей раздела:

$$\begin{cases} \hat{K}_z \Phi = 0, \quad \Phi|_{\Gamma_0} = f_0, \quad \Phi|_{\Gamma_H} = q \hat{R}_H \Phi, \\ \Phi|_{\Gamma_{h^+}} = \hat{R}_2 \Phi^- + \hat{T}_{12} \Phi^+, \quad \Phi|_{\Gamma_{h^-}} = \hat{R}_1 \Phi^+ + \hat{T}_{21} \Phi^- \end{cases} \quad (1)$$

без детализации вида операторов отражения и пропускания. Воспользуемся линейными свойствами краевой задачи (1) относительно источников и представим суммарное поле излучения системы в виде суперпозиции

$$\Phi = \Phi^0 + \Phi_a + \Phi_{aR} + \Phi_{ок} + \Phi_G,$$

компоненты которой удовлетворяют следующим задачам.

Прямое, ослабленное солнечное излучение  $\Phi^0$  находим из задачи

$$\begin{cases} \hat{D}_z \Phi^0 = C, \quad \Phi^0|_{\Gamma_0} = [\pi S_\lambda \delta(s - s_0)], \\ \Phi^0|_{\Gamma_H} = 0, \quad \Phi^0|_{\Gamma_{h^+}} = 0, \quad \Phi^0|_{\Gamma_{h^-}} = 0 \end{cases}$$

для верхнего слоя  $z \in [0, h]$  и  $\Phi^0 \neq 0$  только для  $s = s_0$ .

Фоновое излучение атмосферы  $\Phi_a$  — решение задачи с нулевыми граничными условиями для слоя  $z \in [0, h]$ :

$$\begin{cases} \hat{K}_z \Phi_a = [\hat{S}\Phi^0], \quad \Phi_a|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Phi_a|_{\Gamma_H} = 0, \\ \Phi_a|_{\Gamma_{h^+}} = 0, \quad \Phi_a|_{\Gamma_{h^-}} = 0. \end{cases}$$

Излучение атмосферы, отраженное от границы раздела, — решение краевой задачи для слоя  $z \in [0, h]$  с источником па  $z = h$ :

$$\begin{cases} \hat{K}_z \Phi_{aR} = 0, \quad \Phi_{aR}|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Phi_{aR}|_{\Gamma_H} = 0, \\ \Phi_{aR}|_{\Gamma_{h^+}} = 0, \quad \Phi_{aR}|_{\Gamma_{h^-}} = \hat{R}_1 \Phi_{aR}^+ + [\hat{R}_1 (\Phi^0 + \Phi_a^+)], \end{cases} \quad (2)$$

можно детальнее искать в виде двух компонент:

$$\Phi_{aR} = \Phi_{aR}^0 + \Phi_{aR}^g.$$

Компонента  $\Phi_{aR}^0$  — вклад в дымку атмосферы, обусловленный рассеянием в верхнем слое прямого, ослабленного излучения, отраженного от границы раздела ( $z \in [0, h]$ ):

$$\begin{cases} \hat{K}_z \Phi_{aR}^0 = 0, \quad \Phi_{aR}^0|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Phi_{aR}^0|_{\Gamma_H} = 0, \\ \Phi_{aR}^0|_{\Gamma_{h^+}} = 0, \quad \Phi_{aR}^0|_{\Gamma_{h^-}} = \hat{R}_1 \Phi_{aR}^0 + [\hat{R}_1 \Phi^0]. \end{cases} \quad (3)$$

В результате рассеяния в атмосфере отраженной от границы диффузной составляющей дымки формируется компонента  $\Phi_{aR}^g$  — решение задачи ( $z \in [0, h]$ )

$$\begin{cases} \hat{K}_z \Phi_{aR}^g = 0, \quad \Phi_{aR}^g|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Phi_{aR}^g|_{\Gamma_H} = 0, \\ \Phi_{aR}^g|_{\Gamma_{h^+}} = 0, \quad \Phi_{aR}^g|_{\Gamma_{h^-}} = \hat{R}_1 \Phi_{aR}^{g+} + [\hat{R}_1 \Phi_a^+]. \end{cases} \quad (4)$$

Падающее на границу  $z = h$  излучение, сформированное в атмосфере, является источником компоненты светового поля системы  $\Phi_{ок}$ , в формировании которой участвует океан ( $\Phi_{ок} \neq 0$  для  $z \in [0, H]$ ):

$$\begin{cases} \hat{K}_z \Phi_{ок} = 0, \quad \Phi_{ок}|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Phi_{ок}|_{\Gamma_H} = 0, \\ \Phi_{ок}|_{\Gamma_{h^+}} = \hat{R}_2 \Phi_{ок}^- + \hat{T}_{12} \Phi_{ок}^+ + [\hat{T}_{12} (\Phi^0 + \Phi_a^+ + \Phi_{aR}^+)], \\ \Phi_{ок}|_{\Gamma_{h^-}} = \hat{R}_1 \Phi_{ок}^+ + \hat{T}_{21} \Phi_{ок}^-. \end{cases} \quad (5)$$

При детальном рассмотрении можно ввести суперпозицию

$$\Phi_{ок} = \Phi_{ок}^0 + \Phi_{ок}^g$$

с разделением компонент поля яркости, обусловленных влиянием прямого солнечного излучения  $\Phi_{ок}^0$ :

$$\begin{cases} \hat{K}_z \Phi_{ок}^0 = 0, \quad \Phi_{ок}^0|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Phi_{ок}^0|_{\Gamma_H} = 0, \\ \Phi_{ок}^0|_{\Gamma_{h^+}} = \hat{R}_2 \Phi_{ок}^{0-} + \hat{T}_{12} \Phi_{ок}^{0+} + [\hat{T}_{12} (\Phi^0 + \Phi_{aR}^0)], \\ \Phi_{ок}^0|_{\Gamma_{h^-}} = \hat{R}_1 \Phi_{ок}^{0+} + \hat{T}_{21} \Phi_{ок}^{0-} \end{cases} \quad (6)$$

и дымки атмосферы  $\Phi_{ок}^g$ :

$$\begin{cases} \hat{K}_z \Phi_{ок}^g = 0, \quad \Phi_{ок}^g|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Phi_{ок}^g|_{\Gamma_H} = 0, \\ \Phi_{ок}^g|_{\Gamma_{h^+}} = \hat{R}_2 \Phi_{ок}^{g-} + \hat{T}_{12} \Phi_{ок}^{g+} + [\hat{T}_{12} (\Phi_a^+ + \Phi_{aR}^{g+})], \\ \Phi_{ок}^g|_{\Gamma_{h^-}} = \hat{R}_1 \Phi_{ок}^{g+} + \hat{T}_{21} \Phi_{ок}^{g-}. \end{cases} \quad (7)$$

Вклад подсветки от отражающего дна океана находится как решение краевой задачи

$$\begin{cases} \hat{K}_z \Phi_q = 0, \Phi_q|_{\Gamma_0} = 0, \Phi_q|_{\Gamma_H} = q\hat{R}_H \Phi_q + [qE], \\ \Phi_q|_{\Gamma_{h^+}} = \hat{R}_2 \Phi_q^- + \hat{T}_{12} \Phi_q^+, \Phi_q|_{\Gamma_{h^-}} = \hat{R}_1 \Phi_q^+ + \hat{T}_{21} \Phi_q^-, \end{cases} \quad (8)$$

источником излучения в которой является освещенность дна  $E = \hat{R}_H \Phi_{ок}^-$ .

При ламбертовском дне океана в случае одномерной плоской задачи  $E = \text{const}$  и решение краевой задачи (8) можно искать по формуле

$$\Phi_q(z, \mu, \varphi) = qE\Psi(z, \mu, \varphi)/(1 - qc_0), \quad c_0 \equiv \hat{R}\Psi,$$

устанавливающей явную зависимость подсветки от альbedo дна  $q$  с помощью функции пропускания  $\Psi$ -решения задачи с изотропной инсоляцией на  $z = H$ :

$$\begin{cases} \hat{K}_z \Psi = 0, \Psi|_{\Gamma_0} = 0, \Psi|_{\Gamma_H} = 1, \\ \Psi|_{\Gamma_{h^+}} = \hat{R}_2 \Psi^- + \hat{T}_{12} \Psi^+, \Psi|_{\Gamma_{h^-}} = \hat{R}_1 \Psi^+ + \hat{T}_{21} \Psi^-. \end{cases} \quad (9)$$

### Уравнения для ФВ атмосферы и океана и оптический передаточный оператор

Решение задач для компонент излучения атмосферы (2)–(4) изучено в [1–4], где океан учитывается как отражающая неортогортропная или ламбертовская поверхность. Компоненты поля  $\Phi_{aR}^0, \Phi_{aR}^g, \Phi_{aR}$  вычисляются через функцию влияния атмосферы – решение краевой задачи

$$\{K_z \theta_a = 0, \theta_a|_{\Gamma_0} = 0, \theta_a|_{\Gamma_{h^-}} = \delta(s - s^-). \quad (10)$$

Перечисленные выше задачи (5)–(7) для нахождения отдельных компонент излучения, сформированного в океане, можно записать в общем виде

$$\begin{cases} \hat{K}_z \Phi_{ок} = 0, \Phi_{ок}|_{\Gamma_0} = 0, \Phi_{ок}|_{\Gamma_H} = 0, \\ \Phi_{ок}|_{\Gamma_{h^+}} = \eta(\hat{R}_2 \Phi_{ок}^- + \hat{T}_{12} \Phi_{ок}^+ + E_{ок}(s)), \\ \Phi_{ок}^0|_{\Gamma_{h^-}} = \eta(\hat{R}_1 \Phi_{ок}^- + \hat{T}_{21} \Phi_{ок}^+ + E_a(s)), \end{cases} \quad (11)$$

где источниками излучения являются  $E_{ок}(s)$  – освещенность океана сверху (со стороны атмосферы),  $E_a(s)$  – освещенность атмосферы снизу (со стороны океана). В частности, для задачи (5)

$$E_{ок}(s) \equiv \hat{T}_{12}(\Phi^0 + \Phi_a^+ + \Phi_{aR}^+),$$

для задачи (6)

$$E_{ок}(s) \equiv \hat{T}_{12}(\Phi + \Phi_{aR}^0),$$

для задачи (7)

$$E_{ок}(s) \equiv \hat{T}_{12}(\Phi_a^+ + \Phi_{aR}^{g+}),$$

для всех трех задач (5)–(7)  $E_a(s) \equiv 0$ .

Введем ряд возмущений для решения задачи (11)

$$\Phi_{ок} = \sum_{n=1}^{\infty} \eta^n \Phi_n \quad (12)$$

с параметром  $\eta$ , фиксирующим акт прохождения границы, и двухкомпонентные векторы

$$\Phi_n = \{\Phi_{an}, \Phi_{окn}\}, \mathbf{E} = \{E_a, E_{ок}\}, \Theta = \{\theta_a, \theta_{ок}\}. \quad (13)$$

В линейном приближении ( $n = 1$ ) задача с двумя источниками  $E_a(s), E_{ок}(s)$

$$\begin{cases} \hat{K}_z \Phi_1 = 0, \Phi_1|_{\Gamma_0} = 0, \Phi_1|_{\Gamma_H} = 0, \\ \Phi_1|_{\Gamma_{h^+}} = E_{ок}(s), \Phi_1|_{\Gamma_{h^-}} = E_a(s) \end{cases}$$

расщепляется на две задачи: для океана ( $z \in [h, H]$ )

$$\{\hat{K}_z \Phi_{ок,1} = 0, \Phi_{ок,1}|_{\Gamma_H} = 0, \Phi_{ок,1}|_{\Gamma_{h^+}} = E_{ок}(s) \quad (14)$$

и для атмосферы ( $z \in [0, h]$ )

$$\{\hat{K}_z \Phi_{a,1} = 0, \Phi_{a,1}|_{\Gamma_0} = 0, \Phi_{a,1}|_{\Gamma_{h^-}} = E_a(s),$$

при этом  $\Phi_{a,1} \equiv 0$ , так как  $E_a(s) \equiv 0$ .

Представим освещенность в виде функционала

$$E_{ок}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^+} E_{ок}(s^+) \delta(s - s^+) ds^+,$$

и тогда решение задачи (14) можно записать как линейный функционал ( $s \in \Omega, z \in [h, H]$ )

$$\Phi_{ок,1}(z, s) = (\theta_{ок}, E_{ок}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^+} E_{ок}(s^+) \theta_{ок}(z, s, s^+) ds^+,$$

ядром которого является ФВ океана — решение задачи в слое  $z \in [h, H]$ :

$$\{\hat{K}_z \theta_{ок} = 0, \theta_{ок}|_{\Gamma_H} = 0, \theta_{ок}|_{\Gamma_{h^+}} = \delta(s - s^+). \quad (15)$$

Во втором приближении ( $n = 2$ ) задача ( $z \in [0, H]$ )

$$\begin{cases} \hat{K}_z \Phi_2 = 0, \Phi_2|_{\Gamma_0} = 0, \Phi_2|_{\Gamma_H} = 0, \\ \Phi_2|_{\Gamma_{h^+}} = \hat{R}_2 \Phi_1^- + \hat{T}_{12} \Phi_1^+, \Phi_2|_{\Gamma_{h^-}} = \hat{R}_1 \Phi_1^+ + \hat{T}_{21} \Phi_1^- \end{cases} \quad (16)$$

распадается на две ( $\hat{R}_1 \Phi_{a,1}^+ = 0, \hat{T}_{12} \Phi_{a,1}^+ = 0$ ): для слоя  $z \in [0, h]$

$$\{\hat{K}_z \Phi_{a,2} = 0, \Phi_{a,2}|_{\Gamma_0} = 0, \Phi_{a,2}|_{\Gamma_{h^-}} = \hat{T}_{21} \Phi_{ок,1}^-$$

и для слоя  $z \in [h, H]$

$$\{\hat{K}_z \Phi_{ок,2} = 0, \Phi_{ок,2}|_{\Gamma_H} = 0, \Phi_{ок,2}|_{\Gamma_{h^+}} = \hat{R}_2 \Phi_{ок,1}^-.$$

Решение задачи (16) записывается для двух компонент в виде линейных функционалов

$$\Phi_{a,2}(z, s) = (\theta_a, \hat{T}_{21} \Phi_{ок,1}^-) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} [\hat{T}_{21} \Phi_{ок,1}^-](s^-) \theta_a(z, s, s^-) ds^- = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} \theta_a(z, s, s^-) ds^- \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^+} [\hat{T}_{21} \theta_{ок}^-](s_1^+) E_{ок}(s_1^+) ds_1^+,$$

$$\Phi_{ок,2}(z, s) = (\theta_{ок}, \hat{R}_2 \Phi_{ок,1}^-) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^+} [\hat{R}_2 \Phi_{ок,1}^-](s^+) \theta_{ок}(z, s, s^+) ds^+ = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^+} \theta_{ок}(z, s, s^+) ds^+ \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^+} [\hat{R}_2 \theta_{ок}^-](s_1^+) E_{ок}(s_1^+) ds_1^+,$$

или

$$\begin{cases} \Phi_{a,2} = (\theta_a, (\hat{T}_{21} \theta_{ок}^-, E_{ок})) = (\theta_a, \hat{T}_{21}(\theta_{ок}, E_{ок})), \\ \Phi_{ок,2} = (\theta_{ок}, (\hat{R}_2 \theta_{ок}^-, E_{ок})) = (\theta_{ок}, \hat{R}_2(\theta_{ок}, E_{ок})). \end{cases}$$

Для третьего и следующих приближений ( $n \geq 3$ ) полная задача ( $z \in [0, H]$ )

$$\begin{cases} \hat{K}_z \Phi_n = 0, \Phi_n|_{\Gamma_0} = 0, \Phi_n|_{\Gamma_H} = 0, \\ \Phi_n|_{\Gamma_{h^+}} = \hat{R}_2 \Phi_{n-1}^- + \hat{T}_{12} \Phi_{n-1}^+, \Phi_n|_{\Gamma_{h^-}} = \hat{R}_1 \Phi_{n-1}^+ + \hat{T}_{21} \Phi_{n-1}^- \end{cases}$$

расщепляется по источникам на две: для слоя  $z \in [0, h]$

$$\{\hat{K}_z \Phi_{a,n} = 0, \Phi_{a,n}|_{\Gamma_0} = 0, \Phi_{a,n}|_{\Gamma_{h^-}} = \hat{R}_1 \Phi_{a,n-1}^+ + \hat{T}_{21} \Phi_{ок,n-1}^-\}$$

и для слоя  $z \in [h, H]$

$$\{\hat{K}_z \Phi_{ок,n} = 0, \Phi_{ок,n}|_{\Gamma_H} = 0, \Phi_{ок,n}|_{\Gamma_{h^+}} = \hat{R}_2 \Phi_{ок,n-1}^- + \hat{T}_{12} \Phi_{a,n-1}^+\}$$

Выпишем линейные функционалы для нескольких последовательных приближений, включив члены, порождаемые источником  $E_a$ :

$n=1$

$$\Phi_{a,1} \equiv (\theta_a, E_a),$$

$$\Phi_{ок,1} = (\theta_{ок}, E_{ок});$$

$n=2$

$$\Phi_{a,2} = (\theta_a, \hat{R}_1 \Phi_{a,1}^+ + \hat{T}_{21} \Phi_{ок,1}^-),$$

$$\Phi_{ок,2} = (\theta_{ок}, \hat{R}_2 \Phi_{ок,1}^- + \hat{T}_{12} \Phi_{a,1}^+);$$

$n \geq 3$

$$\Phi_{a,n} = (\theta_a, \hat{R}_1 \Phi_{a,n-1}^+ + \hat{T}_{21} \Phi_{ок,n-1}^-),$$

$$\Phi_{ок,n} = (\theta_{ок}, \hat{R}_2 \Phi_{ок,n-1}^- + \hat{T}_{12} \Phi_{a,n-1}^+).$$

Определим векторный линейный функционал

$$(\Theta, f) = \begin{cases} (\theta_a, f_a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} \theta_a(z, s, s^-) f_a(s^-) ds^-, \\ (\theta_{ок}, f_{ок}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^+} \theta_{ок}(z, s, s^+) f_{ок}(s^+) ds^+ \end{cases}$$

и операцию на границе  $z = h$

$$\hat{P}f \equiv \hat{P}(\Theta, f) = \begin{bmatrix} \hat{R}_1 & \hat{T}_{21} \\ \hat{T}_{12} & \hat{R}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\theta_a, f_a) \\ (\theta_{ок}, f_{ок}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{R}_1(\theta_a, f_a) + \hat{T}_{21}(\theta_{ок}, f_{ок}) \\ \hat{T}_{12}(\theta_a, f_a) + \hat{R}_2(\theta_{ок}, f_{ок}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\hat{R}_1 \theta_a^+, f_a) + (\hat{T}_{21} \theta_{ок}^-, f_{ок}) \\ (\hat{T}_{12} \theta_a^+, f_a) + (\hat{R}_2 \theta_{ок}^-, f_{ок}) \end{bmatrix},$$

где

$$[\hat{R}_1 \theta_a^+](s, s^-) = \int_{\Omega^+} \mathbf{R}_1(s, s') \theta_a^+(h, s', s^-) ds', \quad s, s^- \in \Omega^-;$$

$$[\hat{T}_{12} \theta_a^+](s, s^-) = \int_{\Omega^+} \mathbf{T}_{12}(s, s') \theta_a^+(h, s', s^-) ds', \quad s \in \Omega^+, s^- \in \Omega^-;$$

$$[\hat{R}_2 \theta_{ок}^-](s, s^+) = \int_{\Omega^-} \mathbf{R}_2(s, s') \theta_{ок}^-(h, s', s^+) ds', \quad s, s^+ \in \Omega^+;$$

$$[\hat{T}_{21} \theta_{ок}^-](s, s^+) = \int_{\Omega^-} \mathbf{T}_{21}(s, s') \theta_{ок}^-(h, s', s^+) ds', \quad s \in \Omega^-, s^+ \in \Omega^+;$$

так что

$$[\hat{P}f](s) \equiv \hat{P}(\Theta, f)(s) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} \{[\hat{R}_1 \theta_a^+](s, s^-) f_a(s^-) + [\hat{T}_{21} \theta_{ок}^-](s, s^-) f_{ок}(s^-)\} ds^-, & s \in \Omega^-, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^+} \{[\hat{T}_{12} \theta_a^+](s, s^+) f_a(s^+) + [\hat{R}_2 \theta_{ок}^-](s, s^+) f_{ок}(s^+)\} ds^+, & s \in \Omega^+. \end{cases} \quad (17)$$

Запишем  $n$ -приближения в векторной форме и воспользуемся определением (17):

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_{\text{ок}1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\theta_a, E_a) \\ (\theta_{\text{ок}}, E_{\text{ок}}) \end{bmatrix} = (\Theta, \mathbf{E}),$$

$$\mathbf{F}_1 = \hat{P}\Phi_1 = \hat{P}(\Theta, \mathbf{E}) = \hat{P}\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \hat{T}_{21} \Phi_{\text{ок}1}^- \\ \hat{R}_2 \Phi_{\text{ок}1}^- \end{bmatrix},$$

$$\Phi_2 = (\Theta, \mathbf{F}_1) = (\Theta, \hat{P}\mathbf{E}) = (\Theta, \hat{P}\Phi_1) = (\Theta, \hat{P}(\Theta, \mathbf{E})),$$

$$\mathbf{F}_2 = \hat{P}\Phi_2 = \hat{P}(\Theta, \mathbf{F}_1) = \hat{P}\mathbf{F}_1 = \hat{P}^2\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \hat{R}_1 \Phi_{a2}^+ + \hat{T}_{21} \Phi_{\text{ок}2}^- \\ \hat{R}_2 \Phi_{\text{ок}2}^- + \hat{T}_{12} \Phi_{\text{ок}2}^+ \end{bmatrix},$$

$$\Phi_3 = (\Theta, \mathbf{F}_2) = (\Theta, \hat{P}\Phi_2) = (\Theta, \hat{P}\mathbf{F}_1) = (\Theta, \hat{P}^2\mathbf{E}),$$

$$\mathbf{F}_3 = \hat{P}\Phi_3 = \hat{P}(\Theta, \mathbf{F}_2) = \hat{P}\mathbf{F}_2 = \hat{P}(\Theta, \hat{P}^2\mathbf{E}) = \hat{P}^3\mathbf{E}.$$

Хорошо видно, что два последовательных приближения связаны рекуррентным соотношением

$$\Phi_n = (\Theta, \hat{P}\Phi_{n-1}),$$

в которое входит матричный оператор, описывающий один акт прохождения границы раздела  $z = h$ . Так что двухкомпонентный вектор — источник на границе  $z = h$  в задаче для  $n$ -приближения

$$\mathbf{F}_{n-1} \equiv \hat{P}\Phi_{n-1} = \begin{bmatrix} \hat{R}_1 & \hat{T}_{21} \\ \hat{T}_{12} & \hat{R}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{a,n-1}^+(z=h, s) \\ \Phi_{\text{ок},n-1}^-(z=h, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{R}_1 \Phi_{a,n-1}^+ + \hat{T}_{21} \Phi_{\text{ок},n-1}^- \\ \hat{R}_2 \Phi_{\text{ок},n-1}^- + \hat{T}_{12} \Phi_{a,n-1}^+ \end{bmatrix}.$$

Пусть для  $n \geq 2$

$$\Phi_n = (\Theta, \hat{P}^{n-1}\mathbf{E}).$$

Тогда для  $(n+1)$ -го приближения задача

$$\begin{cases} \hat{K}_z \Phi_{n+1} = 0, \Phi_{n+1}|_{\Gamma_0} = 0, \Phi_{n+1}|_{\Gamma_H} = 0, \\ \Phi_{n+1}|_{\Gamma_{h^+}} = \hat{R}_2 \Phi_n^- + \hat{T}_{12} \Phi_n^+, \Phi_{n+1}|_{\Gamma_{h^-}} = \hat{R}_1 \Phi_n^+ + \hat{T}_{21} \Phi_n^- \end{cases}$$

расщепляется на две: задача для слоя  $z \in [0, h]$

$$\{\hat{K}_z \Phi_{a,n+1} = 0, \Phi_{a,n+1}|_{\Gamma_0} = 0, \Phi_{a,n+1}|_{\Gamma_{h^-}} = \hat{R}_1 \Phi_{a,n}^+ + \hat{T}_{21} \Phi_{\text{ок},n}^-\}$$

и для слоя  $z \in [h, H]$

$$\{\hat{K}_z \Phi_{\text{ок},n+1} = 0, \Phi_{\text{ок},n+1}|_{\Gamma_H} = 0, \Phi_{\text{ок},n+1}|_{\Gamma_{h^+}} = \hat{R}_2 \Phi_{\text{ок},n}^- + \hat{T}_{12} \Phi_{a,n}^+\}$$

и двухкомпонентное решение получается в форме линейных функционалов

$$\begin{aligned} \Phi_{a,n+1}(z, s) &= (\theta_a, \hat{R}_1 \Phi_{a,n}^+ + \hat{T}_{21} \Phi_{\text{ок},n}^-), \quad z \in [0, h], \\ \Phi_{\text{ок},n+1}(z, s) &= (\theta_{\text{ок}}, \hat{R}_2 \Phi_{\text{ок},n}^- + \hat{T}_{12} \Phi_{a,n}^+), \quad z \in [h, H], \end{aligned}$$

или в векторной записи

$$\Phi_{n+1} = (\Theta, \hat{P}\Phi_n) = (\Theta, \hat{P}(\Theta, \hat{P}^{n-1}\mathbf{E})) = (\Theta, \hat{P}^n\mathbf{E}).$$

Итак, для  $n \geq 1$  ( $\mathbf{F}_0 \equiv \mathbf{E}$ )

$$\mathbf{F}_n = \hat{P}\mathbf{F}_{n-1} = \hat{P}\Phi_n = \hat{P}^n\mathbf{E},$$

$$\Phi_n = (\Theta, \mathbf{F}_{n-1}) = (\Theta, \hat{P}\Phi_{n-1}) = (\Theta, \hat{P}^{n-1}\mathbf{E}),$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n = (\Theta, \mathbf{E}) + \sum_{n=2}^{\infty} (\Theta, \hat{P}^{n-1}\mathbf{E}) = (\Theta, \mathbf{E}) + \left( \Theta, \sum_{n=2}^{\infty} \hat{P}^{n-1}\mathbf{E} \right) = (\Theta, \mathbf{E}) + \left( \Theta, \sum_{n=1}^{\infty} \hat{P}^n \mathbf{E} \right) = \left( \Theta, \sum_{n=0}^{\infty} \hat{P}^n \mathbf{E} \right) = \\ &= (\Theta, \hat{Z}\mathbf{E}), \text{ где } \hat{Z} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \hat{P}^n. \end{aligned}$$

Таким образом, члены параметрического ряда являются членами ряда Неймана по кратности прохождения излучения через границу раздела.

Выделяя из суммарного излучения системы фоновую компоненту  $\Phi^0 + \Phi_a$ , обусловленную пространством излучения только в атмосфере, вклад влияния океана можно описать краевой задачей (11) с двумя ненулевыми источниками

$$E_a = \hat{R}_1(\Phi^0 + \Phi_a^+), \quad E_{ок} = \hat{T}_{12}(\Phi^0 + \Phi_a^+).$$

Прежде чем рассчитывать функционалы любого приближения, предварительно в дискретном или аналитическом виде вычисляются выражения

$$[\hat{R}_1\theta_a](s, s^-), [\hat{T}_{12}\theta_a](s, s^-), [\hat{T}_{21}\theta_{ок}](s, s^+), [\hat{R}_2\theta_{ок}](s, s^+)$$

как функции направления  $s$  и параметров  $s^-, s^+$ .

#### Об учете вклада отражающего дна

На нижней границе системы ( $z = H$ ) закон отражения задается оператором

$$[\hat{R}_H\Phi] = \frac{1}{\pi} \int_{\underline{\Omega}^+} \Phi(z = H, s') \mu' ds'$$

при ламбертовской, ортотропной поверхности или оператором

$$[\hat{R}_H\Phi](s) = \int_{\underline{\Omega}^+} \Phi(z = H, s') \eta(s, s') ds'$$

при неортотропной (например, френелевской) поверхности.

Решение задачи для подсветки, создаваемой дном, расположенным на уровне  $z = H$ ,

$$\begin{cases} \hat{K}_z \Phi_q = 0, \quad \Phi_q|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Phi_q|_{\Gamma_H} = q\hat{R}_H\Phi_q + qE_H, \\ \Phi_q|_{\Gamma_{h^+}} = (\hat{R}_2\Phi_q^- + \hat{T}_{12}\Phi_q^+) \varepsilon, \\ \Phi_q|_{\Gamma_{h^-}} = (\hat{R}_1\Phi_q^+ + \hat{T}_{21}\Phi_q^-) \varepsilon \end{cases}$$

находим в виде параметрического ряда возмущений

$$\Phi_q(z, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Phi_{qk}.$$

В нулевом приближении ( $k = 0$ ) поле излучения формируется за счет освещенности  $E_H$ :

$$\begin{cases} \hat{K}_z \Phi_{q0} = 0, \quad \Phi_{q0}|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Phi_{q0}|_{\Gamma_H} = q\hat{R}_H\Phi_{q0} + qE_H, \\ \Phi_{q0}|_{\Gamma_{h^+}} = 0, \quad \Phi_{q0}|_{\Gamma_{h^-}} = 0 \end{cases}$$

и учитывается только в пределах океана ( $z \in [h, H]$ ). Учитывая  $n$ -кратное взаимодействие с границей раздела, получаем задачу для системы ( $z \in [0, H]$ )

$$\begin{cases} \hat{K}_z \Phi_{qn} = 0, \quad \Phi_{qn}|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Phi_{qn}|_{\Gamma_H} = q\hat{R}_H\Phi_{qn}, \\ \Phi_{qn}|_{\Gamma_{h^+}} = \hat{K}_2\Phi_{q,n-1}^- + \hat{T}_{12}\Phi_{q,n-1}^+, \\ \Phi_{qn}|_{\Gamma_{h^-}} = \hat{R}_1\Phi_{q,n-1}^+ + \hat{T}_{21}\Phi_{q,n-1}^-, \end{cases} \quad (18)$$



которую можно расщепить на отдельные задачи для слоев  $z \in [0, h]$  и  $z \in [h, H]$ . Введем суперпозицию компонент излучения, формирующихся под влиянием переотражения от дна и прохождения границы раздела:

$$\Phi_{qn} = \Phi_{qn}^q + \Phi_{qn}^0.$$

Тогда получаем задачу для системы  $z \in [0, H]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{K}_z \Phi_{qn}^0 = 0, \quad \Phi_{qn}^0|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Phi_{qn}^0|_{\Gamma_H} = 0, \\ \Phi_{qn}^0|_{\Gamma_h^+} = \hat{R}_2 \Phi_{qn-1}^- + \hat{T}_{12} \Phi_{qn-1}^+, \\ \Phi_{qn}^0|_{\Gamma_h^-} = \hat{R}_1 \Phi_{qn-1}^+ + \hat{T}_{21} \Phi_{qn-1}^- \end{array} \right. \quad (19)$$

и для слоя  $z \in [h, H]$

$$\{\hat{K}_z \Phi_{qn}^q = 0, \quad \Phi_{qn}^q|_{\Gamma_h^+} = 0, \quad \Phi_{qn}^q|_{\Gamma_H} = q\hat{R}_H \Phi_{qn}^q + q\hat{R}_H \Phi_{qn}^0\}. \quad (20)$$

Решение задачи (19) сводится к решению двух задач: для слоя  $z \in [0, h]$

$$\{\hat{K}_z \Phi_{qna}^0 = 0, \quad \Phi_{qna}^0|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Phi_{qna}^0|_{\Gamma_h^-} = E_{an-1}\}$$

с источником

$$E_{an-1} = \hat{R}_1 \Phi_{qn-1}^+ + \hat{T}_{21} \Phi_{qn-1}^-$$

и для слоя  $z \in [h, H]$

$$\{\hat{K}_z \Phi_{qнок}^0 = 0, \quad \Phi_{qнок}^0|_{\Gamma_H} = 0, \quad \Phi_{qнок}^0|_{\Gamma_h^+} = E_{окn-1}\}$$

с источником

$$E_{окn-1} = \hat{R}_2 \Phi_{qn-1}^- + \hat{T}_{12} \Phi_{qn-1}^+.$$

Используя полученные выше результаты, находим

$$\Phi_{qna}^0 = (\theta_a, E_{an-1}), \quad \Phi_{qнок}^0 = (\theta_{ок}, E_{окn-1}).$$

Задача (20) является задачей для слоя с отражающей ламбертовской или неортотропной поверхностью [1–4] и ее решение можно записать в виде функционала

$$\begin{aligned} \Phi_{qn}^0(z, s) = & \frac{q}{2\pi} \int_{\Omega^-} \theta_H(z, s, s_H) ds_H \left\{ E_{qn}^0(s_H) + \frac{q}{2\pi} \int_{\Omega^-} [\hat{R}\theta_H](s_H, s_1) E_{qn}^0(s_1) ds_1 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{q^{k-1}}{(2\pi)^{k-1}} \int_{\Omega^-} [\hat{R}\theta_H](s_H, s_1) ds_1 \dots \right. \\ & \left. \dots \int_{\Omega^-} [\hat{R}\theta_H](s_{k-3}, s_{k-2}) ds_{k-2} \int_{\Omega^-} [\hat{R}\theta_H](s_{k-2}, s_{k-1}) E_{qn}^0(s_{k-1}) ds_{k-1} \right\}. \end{aligned}$$

Это явное выражение устанавливает связь с освещенностью  $E_{qn}^0 \equiv \hat{R}_H \Phi_{qn}^0$  и законом отражения  $\hat{R}_H$  с помощью ФВ океана  $\theta_H(z, s, s_H)$  — решения задачи

$$\{\hat{K}_H \theta_H = 0, \quad \theta_H|_{\Gamma_h^+} = 0, \quad \theta_H|_{\Gamma_H} = \delta(s - s_H)\}.$$

Предложенный метод декомпозиции краевой задачи для двух сред с границей раздела к двум краевым задачам для каждой из сред отдельно позволяет углубить изучение процессов переноса излучения в сложной системе «атмосфера — океан». Построенные модели функций влияния атмосферы и океана универсальны и инвариантны относительно свойств границ. Новая формулировка оптического передаточного оператора системы «атмосфера — океан» оказывается эффективной в проблемах дистанционного зондирования. Изложенные в данной статье результаты, полученные для горизонтально-однородной задачи, обобщены на случай трехмерной задачи с горизонтальной неоднородностью границы раздела и будут опубликованы.

1. Сушкевич Т. А., Стрелков С. А., Иолтуховский А. А. Метод характеристик в задачах атмосферной оптики. М.: Наука, 1990. 296 с.
2. Сушкевич Т. А. Решение краевых задач теории переноса с неортотропными границами методом ПЧХ и ФВ. М., 1990. 32 с. (Препринт/ИПМ АН СССР, № 107).
3. Сушкевич Т. А. //Оптика атмосферы. 1991. Т. 4. № 10. С. 1084—1100
4. Сушкевич Т. А. Решение задач переноса излучения в системе атмосфера — неортотропная граница методом ПЧХ и ФВ. М., 1992. 23 с. (Препринт/ИПМ РАН. № 7).

Институт прикладной математики им. В.М. Келдыша РАН,  
Москва

Поступила в редакцию  
20 апреля 1992 г.

**T. A. Sushkevich. Modeling of the Atmosphere—Ocean System Radiation by Influence Function Method.**

Solar radiation transfer in the atmosphere—ocean system (AOS) is described using a model accounting for the reflection and retraction of radiation at the atmosphere—ocean interface, including the effects of the ocean waves. Linear and nonlinear approximations of the optical transfer operator (OTO) are functionals whose kernels are the influence functions (IF) of the atmosphere and ocean. In the model of AOS accounting in detail for the radiation transfer in ocean, IF contain two components, i. e. the atmospheric and the ocean ones. For homogeneous anisotropical water surface the source function in the IF problem is a monodirectional beam.