

В.П. Аксенов, А.В. Устинов

## Последствие оптических вихрей в процессе пространственной эволюции «вихревых» лазерных пучков

*Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск*

Поступила в редакцию 24.03.2003 г.

Показано, что сингулярное волновое поле сохраняет память о существовавших в этом поле оптических вихрях. Установлено, что в поперечном распределении фазы такого поля после аннигиляции оптических вихрей остаются характерные метки, представляющие собой ограниченные области с величинами полной фазы, существенно превышающими значения фазы в соседних областях. Обнаружено, что последствие оптических вихрей проявляется также и на поверхности волнового фронта, где вихревой след после исчезновения вихрей сохраняется, а такие характеристики волнового фронта, как средняя и гауссова кривизна при стремлении точки наблюдения к центру вихревого следа быстро возрастают по модулю. Обсуждается ряд методических вопросов, связанных с расчетом распределения фазы сингулярных волновых полей.

### Введение

Вихревые структуры в волновых полях любой природы привлекают всевозрастающий интерес специалистов, занимающихся проблемами распространения волн в линейных и нелинейных средах, а также проблемами диагностики этих сред. Особенно интенсивно исследования таких структур развиваются в последнее время в оптике, где они получили название оптических вихрей [1–3]. Оптический вихрь представляет собой локальное распределение поля в поперечной направлению распространения плоскости. При этом в центре вихря интенсивность поля обращается в нуль, а фаза поля при обходе центра вихря по замкнутому контуру приобретает приращение, равное  $2\pi m$ , где  $m$  — целое число, называемое топологическим зарядом вихря. Поверхность волнового фронта в области локализации оптического вихря представляет собой винтовую структуру, подобную той, которая возникает в области дефекта кристаллической решетки твердого тела. Именно поэтому такие особенности волнового фронта получили название дислокаций. В процессе распространения излучения в среде оптические вихри возникают, перемещаются в пространстве и исчезают (аннигилируют).

С одной стороны, это явление стало препятствием для функционирования систем адаптивной оптики, действующих в турбулентной атмосфере [4], а с другой, благодаря многим замечательным свойствам, стало источником постоянно увеличивающегося числа приложений. Поскольку оптический вихрь обладает орбитальным угловым моментом  $m\hbar$  на фотон [5], то это служит предпосылкой использования вихрей для оптической манипуляции микроскопическими частицами.

Мы знаем [1, 2], что вихри, рождающиеся и аннигилирующие в процессе распространения лазерного пучка в однородной или неоднородной среде,

возникают и исчезают парами, если только они уже не существовали на границе этой среды. При этом предполагается, что при исчезновении вихрей исчезают и особенности волнового фронта, связанные с вихрями, и таким образом волновой фронт становится гладким [6].

Необходимо отметить, однако, что при исследовании сингулярных оптических полей изучается, как правило, лишь главное значение фазы или главное значение аргумента комплексной амплитуды поля, являющейся решением волнового уравнения. Тем не менее существует метод расчета фазы на основе интегрирования градиента фазы вдоль лучевых траекторий (линий тока энергии). Этот метод используется, как правило, при решении волновых задач в приближении геометрической оптики [7], но может быть использован и для расчетов фазового распределения, когда следует учитывать и дифракционные явления. При этом должны использоваться линии тока энергии, рассчитанные для дифракционного поля (дифракционные лучи) [8, 9].

Известно, что линии тока энергии (дифракционные лучи) светового пучка в окрестности оптических вихрей имеют вид спиралей [10], поэтому должны увеличиться длина лучей и, соответственно, рассчитанный вдоль лучей фазовый набег. После аннигиляции вихрей спиральный ход лучей пропадает, но фазовый набег, обусловленный спиральным участком лучей, остается. Это является предпосылкой того, что в поле светового пучка после исчезновения оптических вихрей должно проявиться их последствие.

Цель настоящей статьи состоит в исследовании пространственного распределения фазы (волнового фронта) оптического пучка после аннигиляции оптических вихрей с топологическим зарядом противоположного знака. Статья состоит из трех разделов. Первый раздел носит методический характер.

Здесь приводится вывод формул для расчетов фазы по лучевым траекториям и рассматриваются ограничения и особенности, связанные с их применением в случае дифракционного сингулярного волнового поля, а также при использовании параболического волнового уравнения. Во втором разделе приводится модель простейшего сингулярного волнового поля, на основании которой и выполняются дальнейшие расчеты. Третий раздел статьи посвящен изложению закономерностей эволюции волнового фронта сингулярного пучка на этапе, следующем за аннигиляцией оптических вихрей. Обсуждается возможность аппроксимации волнового фронта гладкой поверхностью.

## 1. Основные уравнения

Распространение гармонической световой волны  $U(\omega, \mathbf{p}, z) \exp\{i\omega t\}$  с частотой  $\omega$  в однородной среде будем описывать с помощью спектральной амплитуды  $U(\omega, \mathbf{p}, z)$ . Представим ее через действительные функции — амплитуду  $A(\omega, \mathbf{p}, z)$  и фазу  $S(\omega, \mathbf{p}, z)$ :

$$U(\omega, \mathbf{p}, z) = A(\omega, \mathbf{p}, z) \exp\{iS(\omega, \mathbf{p}, z)\}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{p} = \{x, y\}$  — двумерный вектор. Спектральная амплитуда поля  $U(\omega, \mathbf{p}, z)$  подчиняется уравнению Гельмгольца

$$\Delta U(\omega, \mathbf{p}, z) + k_0^2 U(\omega, \mathbf{p}, z) = 0, \quad k_0 = \omega/c, \quad (2)$$

где  $c$  — скорость света;  $\Delta = \nabla\nabla$ ,  $\nabla = \nabla_{\perp} + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $\nabla_{\perp} = \mathbf{l} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{m} \frac{\partial}{\partial y}$ .

Опуская для краткости в дальнейшем аргумент  $\omega$  во введенных выше комплексных и действительных функциях, запишем [11] эквивалентную уравнению (2) систему уравнений, состоящую из уравнения эйконала

$$\{\nabla S(\mathbf{p}, z)\}^2 = k_0^2 + \Delta A(\mathbf{p}, z)/[A(\mathbf{p}, z)] \quad (3)$$

и уравнения переноса

$$\nabla\{A^2(\mathbf{p}, z)\nabla S(\mathbf{p}, z)\} = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) может быть переписано следующим образом:

$$\operatorname{div} \mathbf{L}(\mathbf{p}, z) = 0, \quad (5)$$

где  $\mathbf{L}\{L_{\perp}, L_z\}$  — вектор плотности потока энергии (вектор Умова—Пойнтинга) с компонентами

$$L_z = A^2(\mathbf{p}, z) \frac{\partial}{\partial z} S(\mathbf{p}, z), \quad L_{\perp} = A^2(\mathbf{p}, z) \nabla_{\perp} S(\mathbf{p}, z). \quad (6)$$

Наглядное представление о пространственном распределении потока мощности дает совокупность линий тока, вдоль которых распространяется световая энергия. Линии тока являются интегральными кривыми дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dx}{dz} = \frac{L_x}{L_z}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{L_y}{L_z}. \quad (7)$$

Рассматривая  $z$  в качестве независимой переменной, уравнения (7) можно переписать

$$\frac{d\mathbf{p}(z)}{dz} = \frac{\mathbf{L}_{\perp}}{L_z}. \quad (8)$$

Для конкретных значений  $z$  структура фазового пространства может исследоваться на основе задания поля направлений

$$\frac{dy}{dx} = \frac{L_y}{L_x}. \quad (9)$$

Из уравнений (7) и определений (6) следует, что линии тока энергии совпадают с линиями тока градиента фазы. Другими словами, направление вектора Умова—Пойнтинга совпадает с градиентом фазы, а все линии тока градиента фазы оказываются линиями тока энергии. Компоненты градиента фазы, в свою очередь, являются компонентами локального волнового вектора

$$\mathbf{k}\{k_x = \frac{\partial}{\partial x} S, \quad k_y = \frac{\partial}{\partial y} S, \quad k_z = \frac{\partial}{\partial z} S\}.$$

Линии тока энергии определены почти повсюду в пространстве за исключением особых точек (линий), на которых плотность светового потока (6) обращается в нуль. Такими точками являются точки нулей амплитуды (интенсивности) поля (дислокации) и седловые точки фазовой поверхности, где обращаются в нуль компоненты градиента фазы. На линиях нулей поля фаза не определена. На этих линиях потенциальность фазы поля нарушается, а области «дефектной» (сингулярной) фазы могут рассматриваться как вихревые нити подобно тому, как в гидродинамике идеальной жидкости рассматриваются области концентрированной завихренности [12, 13]. Известно, что для подобных векторных полей потенциал поля, определяемый посредством соотношения

$$S(x, y, z) = S(x_0, y_0, z_0) + \int_{\Gamma} \nabla S(x', y', z') \mathbf{r}' \cdot d\mathbf{r}', \quad (10)$$

через свое исходное значение  $S(x_0, y_0, z_0)$  и криволинейный интеграл (циркуляцию) вдоль произвольной кривой  $\Gamma$ , соединяющей без самопересечений исходную  $\mathbf{r}_0\{x_0, y_0, z_0\}$  и конечную  $\mathbf{r}\{x, y, z\}$  точки, является в целом многозначной функцией. Ее значения в общем случае зависят от формы кривой, вдоль которой производится интегрирование. Возьмем в качестве таких кривых линии тока энергии. Так как через каждую точку пространства проходит только одна линия тока (через точки нуля линии тока не проходят совсем), каждая из этих линий однозначно определяется положением своей исходной точки. Таким образом, вычисление интеграла (10) вдоль линий тока позволяет, зная исходное значение фазы, сопоставить любой точке на линии тока единственное значение фазы. Так как на линии

тока вектор градиента фазы и единичный касательный вектор к кривой  $\Gamma$  имеют одно и то же направление, соотношение (10) может быть переписано в виде

$$S(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r}_0) + \int_{\Gamma} |\nabla S(\mathbf{r}')| dr', \quad (11)$$

а с использованием координаты  $z$  в качестве независимой переменной и с учетом того, что длина элемента дуги  $dr = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ , соотношение (11) примет вид

$$S(\mathbf{p}, z) = S(z_0) + \int_{z_0}^z \sqrt{k_x^2[x(z'), y(z'), z'] + k_y^2[x(z'), y(z'), z'] + k_z^2[x(z'), y(z'), z']} \times \sqrt{1 + \left[ \frac{d\rho(z')}{dz'} \right]^2} dz'. \quad (12)$$

Уравнение эйконала (3) можно рассматривать как уравнение поверхности волновых векторов [11], которая в каждой точке пространства представляет собой сферу

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_0^2 + \Delta A(\mathbf{p}, z)/[A(\mathbf{p}, z)]. \quad (13)$$

Только в случае плоской волны эта сфера имеет постоянный радиус  $k_0$ . Для произвольного поля эта величина изменяется от точки к точке. Поэтому для определения компоненты волнового вектора  $k_z$ , на основе пары остальных компонент, к которому приходится прибегать в ряде задач распространения волн, в случае произвольного волнового поля необходимо использовать равенство (13), а не условие  $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_0^2$ , справедливое только для плоских волн.

Пусть рассматриваемое волновое поле таково, что при выборе представления фазы в виде

$$S(\mathbf{p}, z) = k_0 z + S'(\mathbf{p}, z) \quad (14)$$

и, соответственно, его производной в виде

$$\frac{\partial}{\partial z} S(\mathbf{p}, z) = k_0 + \frac{\partial}{\partial z} S'(\mathbf{p}, z) \quad (15)$$

выполняется неравенство

$$\left| \frac{\partial S'}{\partial z} \right| \ll k_0, \quad (16)$$

означающее, что фаза  $S'$  мало меняется на длине волны. Если, кроме того, можно пренебречь дифракцией в продольном направлении, считая, что имеет место неравенство

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial z^2} A(\mathbf{p}, z) \right| / [A(\mathbf{p}, z)] \ll k_0^2,$$

распространение волны можно рассматривать в приближении параболического уравнения

$$2ik \frac{\partial V}{\partial z} + \Delta_{\perp} V = 0, \quad (17)$$

где

$$V(\mathbf{p}, z) = U(\mathbf{p}, z) \exp \{-ik_0 z\}.$$

В его рамках уравнения эйконала и переноса будут иметь вид

$$2k_0 \frac{\partial S'}{\partial z} + \{\nabla_{\perp} S'\}^2 = \frac{\Delta_{\perp} A(\mathbf{p}, z)}{A(\mathbf{p}, z)}, \quad (18)$$

$$\nabla_{\perp} \{A^2(\mathbf{p}, z) \nabla_{\perp} S'\} = -k_0 \frac{\partial A^2}{\partial z}. \quad (19)$$

Выполнение равенств (14) и (15) означает, что волновой вектор  $\mathbf{k}$  представляется в виде  $\mathbf{k} = k_0 \mathbf{n} + \mathbf{q}$ , где  $\mathbf{q} \{q_x = \frac{\partial}{\partial x} S', q_y = \frac{\partial}{\partial y} S', q_z = \frac{\partial}{\partial z} S'\}$ .

В квазиоптическом приближении [14] поверхность волновых векторов аппроксимируется параблоидом

$$2k_0 q_z + q_x^2 + q_y^2 = \Delta_{\perp} A(\mathbf{p}, z)/[A(\mathbf{p}, z)], \quad (20)$$

а соотношение (12) трансформируется в следующее равенство:

$$S(\mathbf{p}, z) = S(z_0) + \int_{z_0}^z \sqrt{k_0^2 + q_x^2(z') + q_y^2(z')} \times \sqrt{1 + \left[ \frac{d\rho'(z')}{dz'} \right]^2} dz', \quad (21)$$

где

$$\frac{d\rho'(z')}{dz'} = \frac{\nabla_{\perp} S'}{k_0} = \frac{\mathbf{q}_{\perp}}{k_0}. \quad (22)$$

Для плоских волн установлено [14], что сферические поверхности волновых векторов хорошо аппроксимируются параблоидами, если кроме условия (16) ( $|q_z|/k_0 \ll 1$ ) выполняется еще и условие малых углов

$$|\mathbf{q}_{\perp}|/k_0 < 1 \quad (23)$$

или условие «узконаправленности». Покажем, что для волнового поля в окрестности оптического вихря последнее условие не выполняется. Для этого выберем решение уравнения (17) в виде  $V(\mathbf{p}, z) = x + iy$ , откуда получим  $A(\mathbf{p}, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Тогда уравнение (20) для поверхности волновых векторов выводится в уравнение кругового цилиндра

$$q_x^2 + q_y^2 = \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad (24)$$

радиус которого (и величина локального поперечного волнового вектора) неограниченно возрастают с приближением точки наблюдения к центру оптического вихря. Это означает, что поток энергии вблизи оси вихря направлен под большими углами к оси пучка. В связи с этим возникает опасность

подмены понятий. Так как, если полагать, что узконаправленным следует считать пучок, в котором энергия распространяется только под малыми углами к оси, то наш сингулярный пучок нельзя считать узконаправленным. На этом основании может возникнуть сомнение в правильности описания сингулярных волновых полей с помощью параболического уравнения. Ведь общеизвестно, что параболическое уравнение удовлетворительно описывает только узконаправленные пучки. Развеять это сомнение можно, если обратиться к разложению нашего элементарного сингулярного поля по спектру плоских волн. Ведь на самом деле требование (23) сформулировано только для плоских волн. Для  $v(\mathbf{k}_\perp)$ -двумерного спектра «медленной» функции  $x + iy$  будем иметь

$$\begin{aligned} v(\mathbf{k}_\perp) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x + iy) \exp(-i\mathbf{k}_\perp \boldsymbol{\rho}) d^2\rho = \\ &= -\delta(k_x) \delta'(k_y) + i\delta'(k_x) \delta(k_y), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{k}_\perp = \{k_x, k_y\}$ , а  $\delta(\kappa)$  и  $\delta'(\kappa)$  — дельта-функция Дирака и ее производная соответственно. Полученное равенство означает, что спектральное разложение нашей функции отлично от нуля лишь на оси  $z$ , т.е. наш сингулярный пучок обладает свойством узконаправленности [14]. Таким образом, неограниченное возрастание поперечных компонентов градиента фазы (компонентов поперечного волнового вектора) не является сигналом о необходимости каких-либо ограничений в применении параболического уравнения вблизи центра оптического вихря. Это ограничение может быть принято только для того, чтобы упростить соотношение (21), которое при выполнении (22) принимает вид

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{\rho}, z) &= S(z_0) + \\ &+ k_0 \int_{z_0}^z \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{d\mathbf{p}'(z')}{dz'} \right]^2 \right\} dz'. \end{aligned} \quad (25)$$

## 2. Модель поля с оптическими вихрями

В качестве объекта исследования выберем лаггер-гауссов пучок с комплексной амплитудой поля вида

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= \frac{\Omega}{(1 + \Omega^2)^3} \exp \left\{ -\frac{\Omega}{2a^2} \frac{(x^2 + y^2)}{(1 + \Omega^2)} (\Omega - i) \right\} \times \\ &\times (V_r + iV_i) (1 + i\Omega)^3, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$V_r = -3 + 2\Omega - \Omega^2 + 2 \frac{\Omega^2}{a^2} (x^2 + y^2 - xy),$$

$$V_i = 3 + 2\Omega + \Omega^2 - 2 \frac{\Omega^2}{a^2} (x^2 + y^2 + xy);$$

Последствие оптических вихрей в процессе пространственной эволюции «вихревых» лазерных пучков 683

$\Omega = k_0 a^2 / z$  — обобщенный дифракционный параметр;  $a$  — радиус пучка. Пусть  $\lambda = 0,63$  мкм,  $a = 0,05$  м. В лазерном пучке с такими параметрами, как показано в [10], дислокации существуют уже на выходе из лазера ( $z = 0$ ), далее при значении дифракционного параметра  $\Omega = 3$  они исчезают и появляются вновь при  $\Omega = 1$ . Этапы трансформации сингулярного поля (26) подробно представлены в работе [10], в настоящей статье рассмотрим процесс формирования волнового фронта лазерного пучка после аннигиляции дислокаций.

## 3. Линии тока энергии и формирование волнового фронта лазерного пучка после аннигиляции оптических вихрей

Приведем вначале распределения интенсивности  $I(\boldsymbol{\rho}, z) = A^2$  и главных (в диапазоне  $(-\pi, \pi)$ ) значений фазы на входе лазерного пучка  $\Omega = 5,0$  ( $z_0 = 5 \cdot 10^3$ ) и в плоскости  $z_1$ , отвечающей значению дифракционного параметра  $\Omega = 2,5$  ( $z_1 = 10^4$ ), рассчитанные с помощью формул (26). Эти данные представлены на рис. 1 в первой и второй колонках. Здесь же в третьей колонке представлены направления перемещения световых лучей в поперечной плоскости  $xOy$  при заданном значении продольной координаты  $z$  (поле направлений вектора Умова—Пойнтинга или градиента фазы), рассчитанные по формуле (9). Напомним [10], что аннигиляция дислокаций происходит через бифуркацию особых точек: пара неустойчивых фокусов (рис. 1,а) — пара устойчивый—неустойчивый узел (рис. 1,б).

Расчет фазового распределения на рис. 1 производился на основе комплексной амплитуды поля (26) как главное значение аргумента этой функции

$$\bar{s}(\boldsymbol{\rho}, z) = \arg[V(\boldsymbol{\rho}, z)]. \quad (27)$$

Далее рассчитаем распределение полной фазы в плоскости  $z_1$ , воспользовавшись формулой (21) и в качестве начального распределения распределением фазы в плоскости  $z_0$ . Необходимым этапом расчета полной фазы является расчет линий тока энергии, или дифракционных лучей, которые строились посредством численного решения уравнений (22) методом Эйлера с автоматическим выбором шага. Исходящее из плоскости  $z_0$  семейство лучей, подобных винтовой линии, вращающейся вокруг траектории оптического вихря, изображено на рис. 2. Этот вихрь помечен на рис. 1 знаком  $\oplus$ . Видно, как после аннигиляции оптических вихрей противоположных знаков спиральный ход лучей становится близким к прямолинейному. Отметим, что в процессе расчетов контролировалось выполнение условия (16) применимости параболической аппроксимации и в расчетах полной фазы использовались только те лучи, на которых выполнялось  $|\partial S' / \partial z| \leq 0,1k_0$ . Кроме того, при расчетах мы ограничивались лучами, на которых выполнялось условие малых углов (23) (они отстояли достаточно далеко от точки сингулярности),

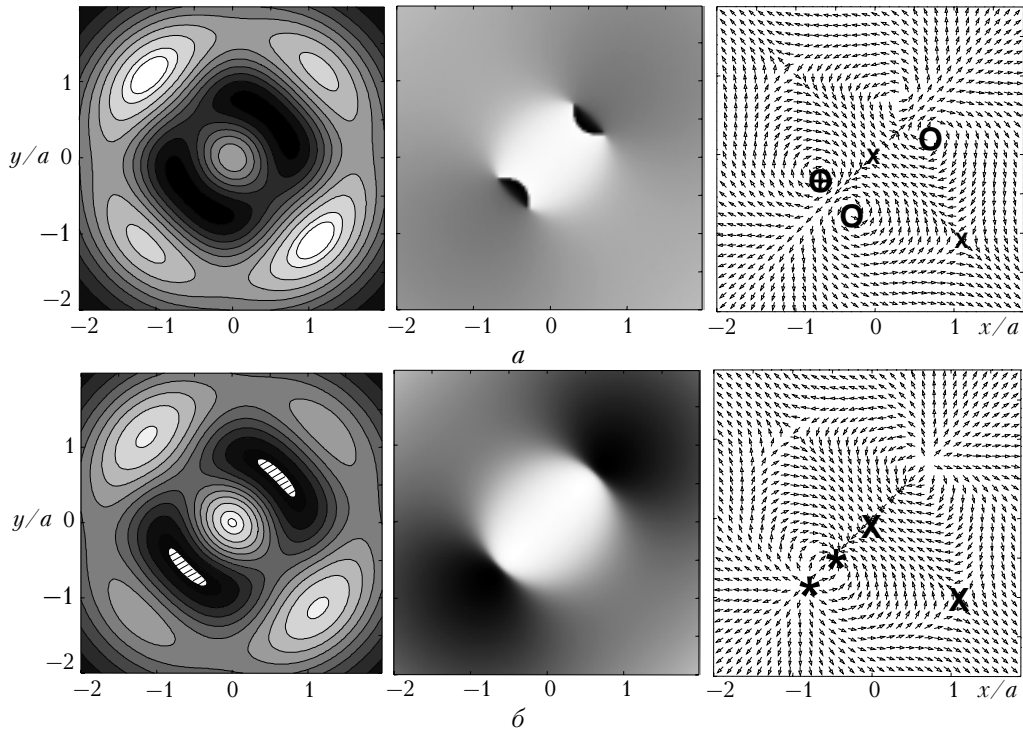


Рис. 1. Распределение интенсивности, главного значения фазы и поля направлений в поперечной плоскости при существовании дислокаций  $\Omega = 5,0$  (а) и после аннигиляции дислокаций  $\Omega = 2,5$  (б). Положение особых точек указано символами:  $\bigcirc$  – фокус,  $-$  – узел,  $\times$  – седло. На изображениях интенсивности рис. 1,б заштрихованная область указывает область вихревого последствия

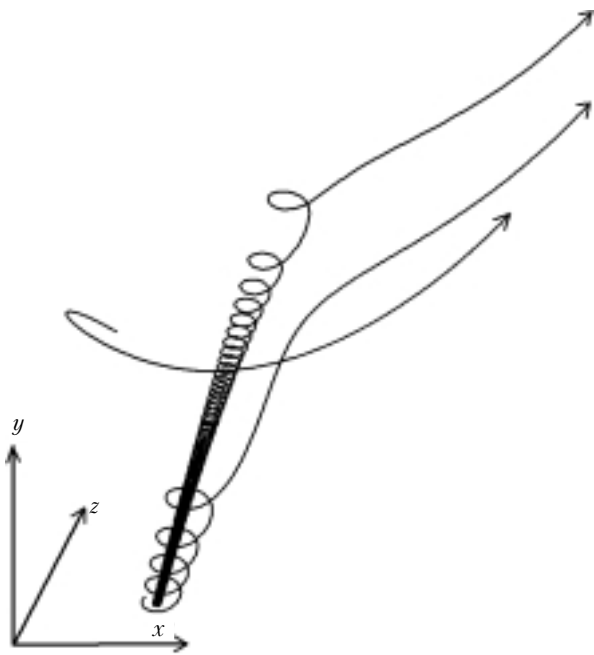


Рис. 2. Дифракционные лучи в окрестности дислокаций волнового фронта

поэтому при расчете полной фазы мы могли пользоваться формулой (25). Абсолютная ошибка расчета набегая фазы по дифракционным лучам составляла  $0,01\pi$ . На рис. 3 представлено распределение полной фазы, рассчитанной по формуле (25) для плоскости  $z_1 = 10000$  м ( $\Omega = 2,493$ ). Это распределение

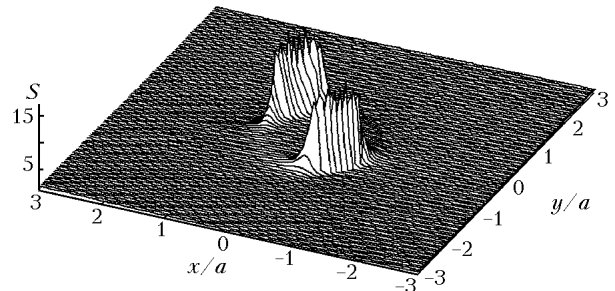


Рис. 3. Распределение фазы после аннигиляции дислокаций. Показано полное значение фазы за вычетом  $k_0 z$ , нормированное на  $\pi$

соответствует объединению двух семейств линий тока энергии. Каждый из лучей, составляющих эти семейства, в процессе пространственной эволюции пучка совершает поступательно-вращательное движение вокруг траектории соответствующего оптического вихря (нуль-линии поля), а после аннигиляции этих вихрей поступательно движется к периферии пучка. Отметим, что значения полной фазы на лучах, составляющих это объединение, существенно превышают значения фазы в смежных областях. Далее на основе рассчитанной фазы проводилось построение поверхности волнового фронта на основе равенства  $S(\mathbf{p}, z) = \text{const}$ .

Общий вид волнового фронта после аннигиляции оптических вихрей, соответствующий значению эйконала  $10^4$  (эйконал – это величина, значением которой является фаза, нормированная на  $k_0$ ), представлен на рис. 4,а. Фрагмент волнового фронта

(рис. 4,б) соответствует участку, ограниченному на рис. 4,а окружностью. Здесь же изображена и часть дифракционных лучей, вдоль которых производился расчет фазы.

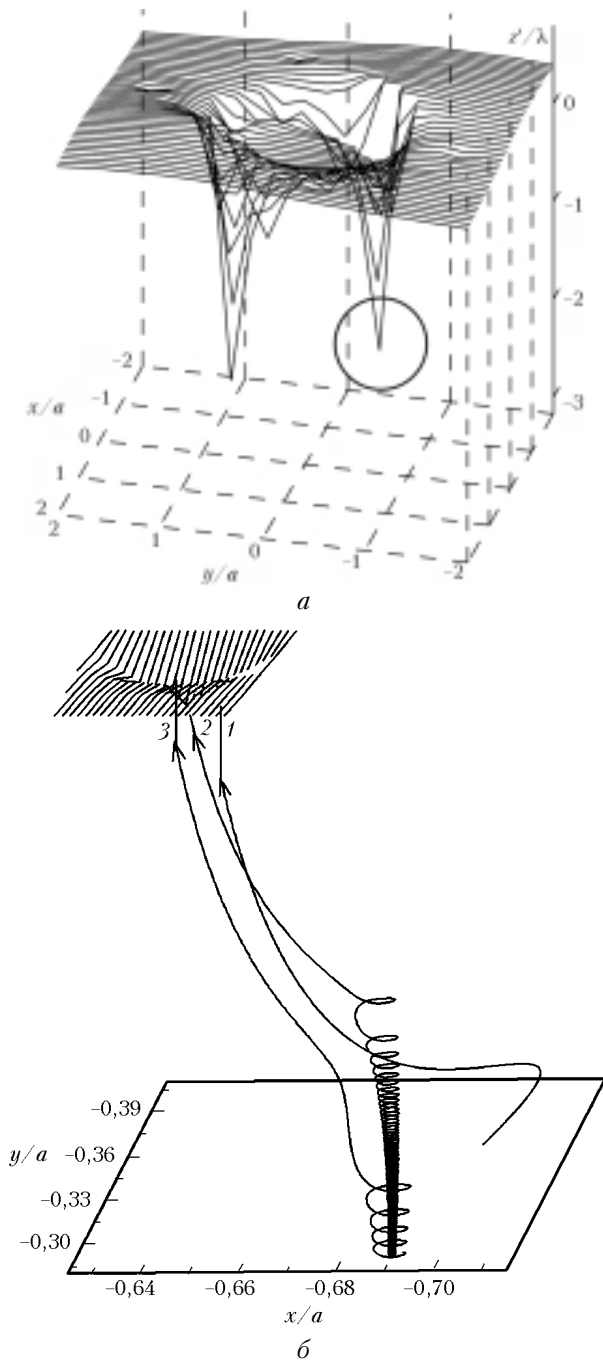


Рис. 4. Общий вид волнового фронта пучка. Координата  $z' = z - z_1$

Лучи 1, 2 и 3 начинаются в плоскости  $z_0 = 5 \cdot 10^3$  м и исходят из точек с координатами  $\{-0,696; -0,365\}$ ,  $\{-0,690; -0,291\}$ ,  $\{-0,691; -0,292\}$  соответственно. Координаты  $x$  и  $y$  нормированы на начальный радиус пучка. Минимальное расстояние до центра вихря имеет луч 2 ( $\approx 500\lambda$ ). Из рис. 4,а следует, что после исчезновения оптических вихрей

поверхность волнового фронта уже не имеет форму геликоида, но и не становится гладкой, как считалось, а сохраняет особенности. Эти особенности с возрастанием продольной координаты смещаются на периферию пучка. Если определить область вихревого последействия как область, в которой значения полной фазы превышают суммарное значение «быстрой»  $k_0 z$  и «медленной»  $\tilde{s}(\mathbf{p}, z)$  фаз больше, чем на  $\pi$  радиан, то можно установить долю энергии, содержащуюся в областях вихревого последействия сингулярного поля. Для этого достаточно проинтегрировать распределение интенсивности в пределах областей вихревого последействия (см. рис. 1,б) и соотнести полученное значение с полной энергией пучка  $P_0$ . Так как энергетика областей вихревого последействия формируется за счет малых значений интенсивности в окрестности нуль-линий, то следует ожидать и пропорционально малых величин энергии, содержащейся в пределах этих областей. Так, для ситуации, представленной на рис. 1,б, доля энергии, содержащаяся в областях вихревого последействия, составляет всего около 2% от полной энергии пучка. Сами же размеры этой области оказываются сравнимыми с эффективным масштабом гауссианы в (26). Отметим, что если ввести эффективный размер пучка  $\rho_e$  на основе соотношения

$$\rho_e^2 = \frac{1}{P_0} \int_{-\infty}^{\infty} I(\mathbf{p}) \rho^2 d^2 \rho,$$

то из (26) будем иметь  $\rho_e(z_0)/a = 1,84$  и  $\rho_e(z_1)/a = 1,91$ .

Локализовать область вихревого последействия можно также с помощью таких характеристик волнового фронта, как средняя

$$h(\mathbf{p}, z) = -\Delta_{\perp} S' / (2k_0)$$

и гауссова кривизна [15]:

$$\rho(\mathbf{p}, z) = \frac{1}{k_0^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} S' \frac{\partial^2}{\partial y^2} S' - \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} S' \right)^2 \right],$$

позволяющих оценить возможности локальной аппроксимации волнового фронта поверхностью второго порядка. Очевидно, что эти функции должны быть сингулярными в области существования оптических вихрей, однако расчеты показывают, что эти функции сохраняют свое особое поведение и после исчезновения вихрей. Сечения средней и гауссовой кривизны волнового фронта в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, пересекающихся в центре области вихревого последействия, приведены на рис. 5.

Из рис. 5 следует, что при стремлении точки наблюдения к центру области вихревого последействия кривизна волнового фронта по модулю быстро растет, что означает, в свою очередь, что величина участка поверхности волнового фронта, которая может быть аппроксимирована поверхностью второго порядка, стремится к нулю.

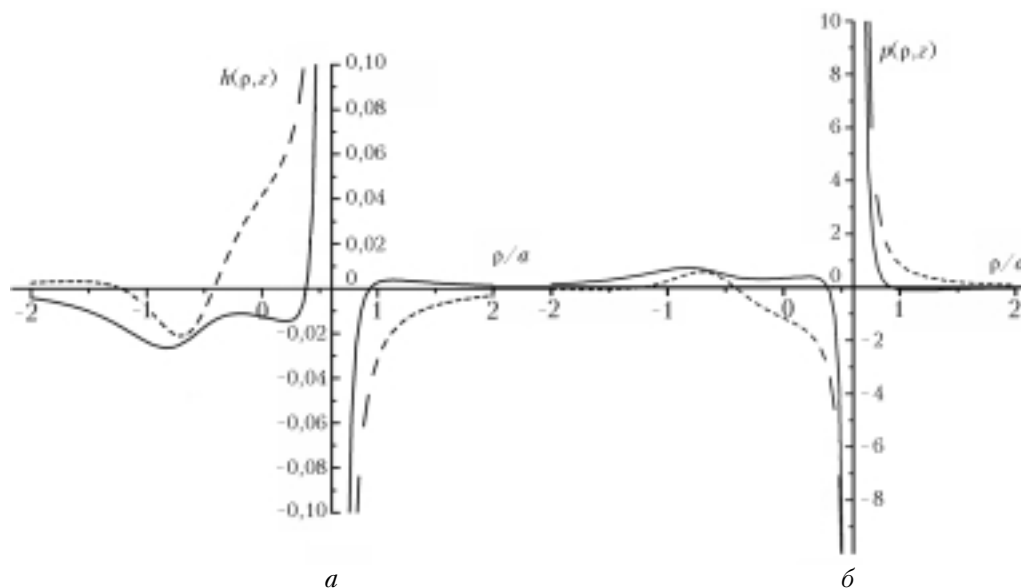


Рис. 5. Распределения средней кривизны (а) и гауссовой кривизны (б) фазового фронта в плоскости  $z_1 = 10^4$  м. Изображены сечения этих функций двумя плоскостями, параллельными координатным плоскостям  $xOz$  (сплошная линия) и  $yOz$  (пунктирная линия), пересекающимися в центре области вихревого последствия

Несмотря на то что наше исследование эффекта вихревого последствия выполнено на примере простейшего поля с оптическими вихрями, очевидно, что этот эффект носит общий характер и его надо учитывать при работе со всеми сингулярными полями, в которых происходит аннигиляция вихрей. Этот эффект необходимо учитывать и при разработке принципов построения однозеркальных и многозеркальных адаптивных оптических систем, работающих по методу фазового сопряжения и предназначенных для работы в условиях сильной турбулентности [16–18]. Это относится, в частности, к впервые высказанной в [6] идее об использовании для фазовой компенсации винтовых дислокаций двух изгибаемых адаптивных зеркал, первое из которых заставляет аннигилировать оптические вихри противоположных знаков, а второе — обратить уже гладкий волновой фронт.

### Заклучение

Итак, на простейшем примере сингулярного волнового поля, содержащего оптические вихри, продемонстрирован и исследован эффект вихревого последствия. Этот эффект заключается в том, что аннигиляция оптических вихрей с противоположными топологическими зарядами, которая является одним из этапов в процессе рождения, развития и исчезновения вихрей в сингулярном оптическом пучке, не приводит, как предполагалось ранее, к превращению сингулярного волнового фронта в гладкий.

Несмотря на то что нули поля и винтовые дислокации волнового фронта исчезают, волновой фронт в области локализации семейства световых лучей, участвовавших в процессе распространения пучка в поступательно-вращательном движении энергии вокруг нуль-линий поля, по-прежнему со-

храняет особенности. Эти особенности заключаются в значительном превышении величины наклонов волнового фронта и полной фазы в таких локальных областях над соответствующими значениями наклонов и фазы в окружающей области. Абсолютные значения средней кривизны и гауссовой кривизны участков волнового фронта в областях вихревого последствия неограниченно возрастают.

След от аннигилировавших оптических вихрей сохраняется, дрейфуя по мере дальнейшего распространения на периферию волнового пучка. Это приводит к необходимости учета эффекта вихревого последствия при разработке адаптивных оптических систем, предназначенных для компенсации искажений волновых пучков в условиях развитых спекл-полей, в том числе и в турбулентной атмосфере.

1. *Berry M.* Singularities in waves and rays // *Physics of Defects* / Ed. by R. Balian, M. Kleman, J.-P. Poirier. Amsterdam, North-Holland, 1981. P. 453–543.
2. *Optical Vortices* // *Horizons in World Physics* / Ed. by M. Vasnetsov, K. Staliunas. N.Y.: Nova Science, 1999. V. 228. 218 p.
3. *Soskin M.S., Vasnetsov M.V.* Singular Optics // *Progress in Optics* / Ed. by E. Wolf. Amstrdam, North-Holland. 2001. V. 42. P. 219–276.
4. *Primmerman A., Pries R., Humphreys R.A., Zollars B.G., Barclay H.T., Herrmann J.* Atmospheric-compensation experiments in strong-scintillation conditions // *Appl. Opt.* 1995. V. 34. P. 2081–2088.
5. *Allen L., Paggett M.J., Babiker M.* The orbital angular momentum of light // *Progress in Optics* / Ed. by E. Wolf. Amstrdam, North-Holland. 1999. V. 39. P. 291–372.
6. *Баранова Н.Б., Зельдович Б.Я.* Дислокации волнового фронта и нули амплитуды // *Ж. эксперим. и теор. физ.* 1989. Т. 80. № 5. С. 1789–1797.
7. *Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.

8. Беспалов В.И., Литвак А.Г., Таланов В.И. Самодействие электромагнитных волн в кубической изотропной среде // *Нелинейная оптика: Труды Второго всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике*. Новосибирск: Наука, 1968. С. 428–463.
9. Колосов В.В. Лучевой метод решения уравнения уравнения для функции когерентности // *Оптика атмосф. и океана*. 1992. Т. 5. № 4. С. 397–403.
10. Аксенов В.П., Измайлов И.В., Поизнер Б.Н., Тихомирова О.В. Волновая и лучевая пространственная динамика светового поля при рождении, эволюции и аннигиляции фазовых дислокаций // *Оптика и спектроскопия*. 2002. Т. 92. № 3. С. 465–474.
11. Марчук А.Г. Восстановление полного поля по его амплитуде // *Некорректные математические задачи и проблемы геофизики* / Под ред. М.М. Лаврентьева и А.С. Алексеева. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1976. С. 130–134.
12. Fried D.L. Branch point problem in adaptive optics // *J. Opt. Soc. Amer. A*. 1998. N 15. P. 2759–2768.
13. Aksenov V.P., Tikhomirova O.V. Theory of singular-phase reconstruction for an optical speckle field in the turbulent atmosphere // *J. Opt. Soc. Amer. A*. 2002. V. 19. P. 345–355.
14. Сухоруков А.П. Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. М.: Наука, 1988. 232 с.
15. Малахов А.Н., Саичев А.И. Кинетическое уравнение для световой волны. Флуктуации интенсивности // *Ж. эксперим. и теор. физ.* 1974. Т. 67. Вып. 6(12). С. 2080–2086.
16. Baranova N.B., Mamaev A.V., Pilipeskii N., Skunov V.V. and Zel'dovich B.Ya. Wave-front dislocations: topological limitations for adaptive systems with phase conjugations // *J. Opt. Soc. Amer.* 1983. V. 73. N 5. P. 525–528.
17. Высотина Н.В., Розанов Н.Н., Семенов В.Е., Смирнов В.А. Амплитудно-фазовая адаптация на протяженных трассах с помощью гибких зеркал // *Изв. вузов. Физ.* 1985. № 11. С. 42–51.
18. Канев Ф.Ю., Лукин В.П., Макенова Н.А. Принципиальные ограничения алгоритма фазового сопряжения и реализация амплитудно-фазового управления в двухзеркальной адаптивной системе // *Оптика атмосф. и океана*. 2002. Т. 15. № 12. С. 1073–1077.

*V.P. Aksenov, A.V. Ustinov. Vortex backwash during spatial evolution of a «vortex» laser beam.*

The special feature of a singular wave field, vortex backwash, has been revealed on the wave-front surface in the shape of the vortex trail and investigated theoretically using an elementary Gauss-Laguerre model of an optical field propagating in a homogeneous medium. The wave field memory about the optical vortices appeared before has been demonstrated. The characteristic marks remain after vortex annihilation in the transversal phase distribution. The phase in the finite vicinities of these marks exceeds essentially the phase value in an adjacent area. The mean and Gaussian wave front curvatures increase rapidly as the point of observation approaches the center of the vortex trail. Issues on the applicability limits of the parabolic equation for the singular wave fields are discussed.