

К.М. Фирсов, А.Б. Смирнов

## ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПРОПУСКАНИЯ РЯДОМ ЭКСПОНЕНТ

Решена задача представления функций пропускания рядом экспонент на основе ортогональных экспоненциальных функций. Параметры разложения определяются на основе коэффициентов поглощения, рассчитанных прямым методом. Данная модель обеспечивает высокую точность расчета функций пропускания при небольшом количестве членов ряда.

Одна из проблем радиационного переноса в задачах климатологии связана с созданием экономичной параметрической модели функции пропускания в полосах поглощения атмосферных газов. Для этих целей все шире используется аппроксимация пропускания рядом экспонент [1–11]. Привлекательность этого представления обусловлена несколькими причинами [6]. Первая – пропускание становится мультипликативной функцией поглощающей массы, что позволяет построить экономичный алгоритм расчета, вторая – такое представление позволяет существенно облегчить решение задачи переноса радиации в рассеивающей среде [12] и последнее – применение рядов экспонент позволяет достичь более высокой точности, чем использование моделей полос, так как нет необходимости конкретизировать вид зависимости функции пропускания от поглощающей массы.

Наибольший интерес представляют методы разложения функции пропускания в ряд экспонент на основе прямых расчетов *line-by-line* [3, 4, 10, 11], минуя этап модельного представления спектров поглощения. Для этих целей используют так называемую технику *K*-функций, которая широко описана в литературе [1–11]. Строгое описание дано в [11] в отличие от интуитивных расчетных схем, используемых ранее, например в [10]. Суть этого метода [11] состоит в том, что к функции пропускания

$$\tau(U) = \frac{1}{v_2 - v_1} \int_{v_1}^{v_2} \exp\{-k(v)U\} dv, \quad (1)$$

где  $k(v)$  – коэффициент поглощения на частоте  $v$ ;  $U$  – поглощающая масса, применяется двойное преобразование Лапласа и вводится новая нормированная на единицу частота  $g$

$$g(\kappa) = \frac{1}{v_2 - v_1} \int_{v_1}^{v_2} W(v) dv; \quad (2)$$

$$W(v) = \begin{cases} 1, & k(v) < \kappa, \\ 0,5, & k(v) = \kappa, \\ 0, & k(v) > \kappa. \end{cases} \quad (3)$$

В результате (1) приводится к виду

$$\tau(U) = \int_0^1 \exp\{-\kappa(g)U\} dg, \quad (4)$$

где  $\kappa(g)$  – функция, обратная (2). Преобразование (1)–(4) приводит к тому, что быстроосциллирующая функция  $k(v)$  переходит в монотонную  $\kappa(g)$  (см. рис. 1 и 2).

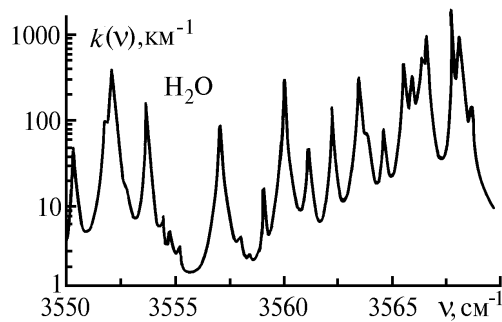


Рис. 1. Спектр поглощения H<sub>2</sub>O, рассчитанный методом *line-by-line* на основе атласа параметров линий HITRAN-91 [16]. Модель – лето средних широт.  $H = 0$  км

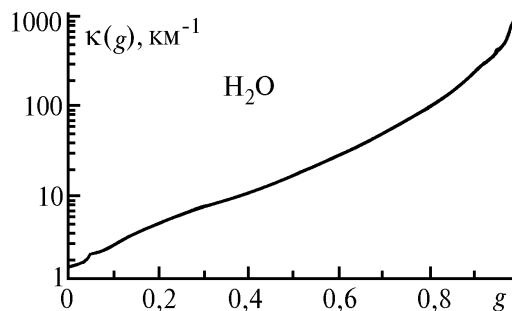


Рис. 2. Зависимость коэффициента поглощения H<sub>2</sub>O от нормализованной частоты.  $\kappa(g)$ , пересчитано из  $k(\nu)$ , приведенного на рис. 1

Дальнейший способ получения ряда экспонент основывается на использовании соответствующих квадратурных формул интегралу в формуле (4), которые непосредственно приводят к ряду экспонент

$$\tau(U) = \int_0^1 \exp\{-\kappa(g)U\} dg = \sum_{i=1}^n a_i \exp\{-\kappa(g_i)U\}, \quad (5)$$

где  $a_i$  – коэффициенты разложения.

В [8, 9] использовались гауссовские квадратуры. В этом случае узлы  $g_i$  являются корнями ортогональных полиномов Лежандра, что обеспечивает малую погрешность аппроксимации (5), так как эта формула является точной [13] для подынтегральной функции, являющейся полиномом степени  $2n-1$ . Тем не менее такой метод получения ряда экспонент не всегда эффективен, так как приходится иногда учитывать более двадцати членов [8] в разложении (5). Причина этого очевидна и состоит в том, что коэффициенты  $a_i$  и узлы  $g_i$  в выражении (5) не зависят от вида подынтегральной функции. Можно также отметить работы [8, 10], в которых описан иной способ интегрирования (4). Однако рекомендации по выбору узлов носят эмпирический характер, что снижает ценность этого способа, и, кроме того, методы численного интегрирования на сегодняшний день достаточно хорошо разработаны.

Целью данной работы является представление функции пропускания в виде ряда экспонент с параметрами, определяемыми на основе один раз рассчитанных коэффициентов поглощения  $k(\nu)$  методом минимизации абсолютной среднеквадратической ошибки

$$\delta_n^2 = \int_0^\infty \left[ \tau(U) - \sum_{k=1}^n a_k \exp\{-a_k U\} \right]^2 dU. \quad (6)$$

В данной работе эта задача решается пока лишь для однородной трассы. Обобщение на неоднородную трасс можно сделать так же, как предложено в [3, 4].

Практика показывает, что аппроксимация реальной функции некоторыми другими функциями из более узкого класса, построенными по методу среднеквадратического приближения, значительно лучше представляет реальную функцию, чем интерполяционные многочлены [13]. Наиболее просто это можно разрешить при использовании ортогональных функций [13]. Таким образом, для решения задачи о представлении функции пропускания в виде ряда экспонент следует использовать класс ортогональных экспоненциальных функций. Такие функции описаны в [1, 14] и имеют вид

$$D_m(U, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = \sum_{k=1}^m C_{km} \exp\{-\alpha_k U\}, \quad (7)$$

где  $D_m(U, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  –  $m$ -я ортогональная функция;  $U$  – аргумент;  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  – параметры. Коэффициенты  $C_{km}$  определяются из условия ортогональности и нормировки функций  $D_m$ :

$$C_{km} = \frac{\sqrt{2\alpha_m} \prod_{i=1}^{m-1} (\alpha_k + \alpha_i)}{\prod_{i=1}^{k-1} (\alpha_k - \alpha_i) \prod_{j=k+1}^m (\alpha_k - \alpha_j)}. \quad (8)$$

Эта система функций полная и позволяет в силу равномерной сходимости ряда [14] аппроксимировать  $\tau(U)$  в виде

$$\tau(U) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k D_k(U, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k); \quad (9)$$

$$b_k = \int_0^{\infty} \tau(U) D_k(U, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) dU. \quad (10)$$

Собирая коэффициенты при одинаковых экспонентах, нетрудно получить ряд (5) с коэффициентами  $a_i$ , определяемыми формулой

$$a_i = \sum_{k=1}^n b_k C_{ik}. \quad (11)$$

Ошибка разложения в конечный ряд, содержащий  $n$  членов, выражается формулой

$$\delta_n^2 = \int_0^{\infty} \tau^2(U) dU - \sum_{k=1}^n b_k^2. \quad (12)$$

Таким образом, задача построения ряда (5) решается путем минимизации (12) относительно неизвестных коэффициентов  $\alpha_k$ .

Вследствие того, что подынтегральное выражение в (1) и (4) имеет экспоненциальный вид, коэффициенты  $b_k$  можно выразить в виде

$$b_k = \sum_{i=1}^k C_{ik} J(\alpha_i); \quad (13)$$

$$J(\alpha_i) = \frac{1}{v_2 - v_1} \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{k(v) + \alpha_i} = \int_0^1 \frac{dg}{\kappa(g) + \alpha_i}; \quad (14)$$

интеграл в (12) также вычисляется через коэффициенты поглощения

$$\int_0^{\infty} \tau^2(U) dU = \frac{1}{(v_2 - v_1)^2} \int_{v_1}^{v_2} dv \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv'}{k(v) + k(v')} = \int_0^1 dg \int_0^1 \frac{dg'}{k(g) + k(g')}. \quad (15)$$

Таким образом, задача получения ряда экспонент сводится к минимизации выражения (12) путем вариации коэффициентов  $\alpha_i$ . В принципе, как следует из (14) и (15), эта задача может быть решена без использования  $k$ -представления при вычислении интегралов через коэффициенты поглощения, полученные прямым методом *line-by-line*. Однако при численной реализации алгоритма более выгодно воспользоваться  $k(g)$ , которая является гладкой функцией. Для вычисления (14) и (15) использовались квадратурные формулы Гаусса для 25 точек, что обеспечивало погрешность расчета не хуже 1% для диапазона изменения пропускания от 0,001–1.

Для минимизации (12) была разработана итерационная процедура, которая оказалась достаточно быстрой и эффективной. Нулевое приближение для первых двух коэффициентов определяется согласно рекомендациям, предложенным в [14], а затем итерационным методом производится минимизация для двух членов ряда. Далее в подгонку включается следующий член ряда и т.д.

Для отработки методики было проведено моделирование для водяного пара в области 2,7 мкм и для углекислого газа в области 15 мкм. Расчеты коэффициента поглощения проводились на основе быстрого метода *line-by-line* [15] с использованием атласа параметров линий [16].

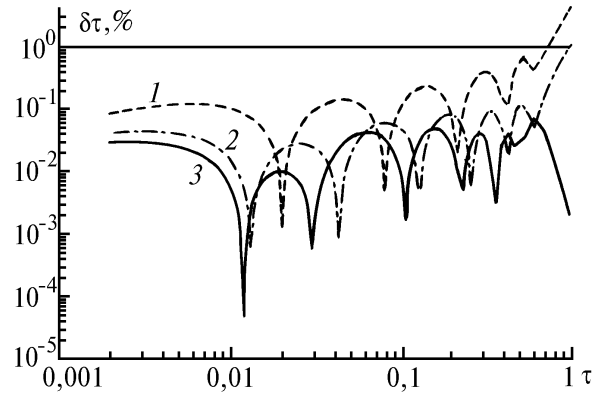


Рис. 3. Абсолютная погрешность разложения функции пропускания в ряд экспонент в сравнении с методом *line-by-line*.  $\text{H}_2\text{O}$ , спектральный диапазон 3550–3570  $\text{cm}^{-1}$ . Модель – лето средних широт. Трасса горизонтальная,  $H = 0$  км. Число членов ряда  $n = 3, 4, 5$ . (Кривые 1, 2, 3 соответственно)

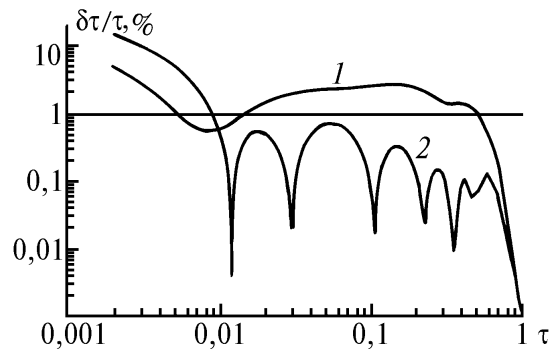


Рис. 4. Относительная ошибка расчета функции пропускания с использованием гауссовских квадратур (число узлов  $n = 5$ , кривая 1) и с использованием метода, описанного в этой работе (число членов ряда  $n = 5$ , кривая 2). Условия те же, что и на рис. 3

Для углекислого газа были получены результаты, аналогичные  $\text{H}_2\text{O}$ , поэтому на рис. 3 и 4 показано только, как ведет себя абсолютная и относительная погрешность разложения функции пропускания  $\text{H}_2\text{O}$  для трех, четырех и пяти членов ряда в сравнении с прямым методом счета. Из анализа этих рисунков можно сделать ряд выводов.

1. С увеличением числа членов ряда погрешность убывает.  
2. В пределе слабого поглощения ( $U \rightarrow 0$ ) при использовании трех и четырех членов ряда можно получить заметную погрешность, тогда как добавление пятого члена ряда значительно улучшает результат.

3. В диапазоне изменения функции пропускания 0,01–1 при пяти членах ряда относительная погрешность не превышает 1%, что позволит применять данную аппроксимацию для задач зондирования атмосферы.

4. Возрастание относительной погрешности при  $\tau < 0,01$  связано с выбором ортогональных функций и соответственно видом функционала (12). Для того чтобы добиться хорошего согласия при малых значениях  $\tau$ , следует либо увеличить число членов ряда, либо использовать другие функции, ортогональные с весом, отличным от единицы. Однако для многих приложений достаточно иметь функцию пропускания, которая меняется в диапазоне 0,01–1.

5. Традиционный способ получения ряда экспонент [8, 9] при использовании гауссовских квадратур приводит к существенно большей погрешности, чем предложенный в данной работе.

В заключение хочется выразить признательность А.А. Мицелю и С.Д. Творогову за многочисленные полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01328-В).

1. Дмитриев А.А., Абакумова Г.М. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1970. Т. 4. N 1. С. 102–103.
2. Краснокутская Л.Д., Сушкевич Т.А. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1977. Т. 13. N 5. С. 505–515.
3. Chou M.D., Arking A. // J. of the atmosph. scienc. 1980. V. 37. N 4. P. 855–867.
4. Chou M.D., Arking A. // J. of the atmosph. scienc. 1981. V. 38. N 4. P. 798–807.
5. Stephens G.L. // Monthly weather review. 1984. V. 112. P. 826–857.
6. Fouquart Y. Radiative transfer in climate models. Physically-based Modelling and Simulation of Climate and Climatic Change, Shlesinger M.E. Ed., Kluwer Academic Publishers, Part 1. 1988. P. 223–283.
7. Wang W.S., Shi G.Yu. // Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 1988. V. 39. N 5. P. 387–397.
8. Goody R., West R., Chen L., Crisp D. // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 1989. V. 42. N 6. P. 539–550.
9. Riviere Ph., Soufani A., Taine J. // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 1992. V. 48. N 2. P. 187–203.
10. Lacis A.A., Oinas V.A. // J. Geoph. Res. 1991. V. 96. N D5. P. 9027–9063.
11. Творогов С.Д. // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. N 3. С. 315–326.
12. Фейгельсон Е.М. Лучистый теплообмен и облака. Л.: Гидрометеоздат, 1970. 157 с.
13. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 1. М.: Наука, 1959. 421 с.
14. Дмитриев А.А. Ортогональные экспоненциальные функции в гидрометеорологии. Л.: Гидрометеоздат, 1973. 120 с.
15. Мицель А.А., Фирсов К.М. // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. N 10. С. 1437–1440.
16. Rothman L.S., Gamache R.R., Tipping R.H. et al. // JQSRT. 1992. V. 48. P. 469–507.

Институт оптики атмосферы СО РАН,  
Томск

Поступила в редакцию  
29 декабря 1994 г.

K. M. Firsov, A. B. Smirnov. **Representation of Transmission Coefficients by Exponential Series.**

The problem of transmission coefficients representation by exponential series is solved based on orthogonal exponential functions. The expansion parameters are determined based on absorption coefficients computed by direct method. The model presented provides for high accuracy of transmission functions computation at small quantity of numbers of a series.