

А.И. Бородулин, Б.М. Десятков, В.В. Марченко

## КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ПУЛЬСАЦИЙ КОНЦЕНТРАЦИИ АТМОСФЕРНОЙ ПРИМЕСИ

НИИ аэриологии ГНЦ ВВ «Вектор», Новосибирская обл.

Поступила в редакцию 3.03.99 г.

Принята к печати 31.05.99 г.

С использованием полученной ранее теоретически и подтвержденной экспериментально стационарной функции плотности вероятности концентрации распространяющихся в атмосфере аэрозольных и газовых примесей найдена плотность вероятности перехода концентрации из заданного начального в некоторое конечное состояние. На основании этих результатов определена корреляционная функция пульсаций концентрации примеси.

Распространение аэрозольных и газовых примесей в атмосфере является случайным процессом. При его моделировании с помощью полуэмпирических уравнений турбулентной диффузии можно определить математическое ожидание концентрации примеси  $\bar{C}$  и ее дисперсию  $\sigma^2$ . Однако этой информации часто недостаточно для решения ряда практических задач. Более полное статистическое описание процесса распространения примеси в заданной точке пространства становится возможным, если известна функция плотности вероятности концентрации  $f_1(C)$ , где  $C$  – мгновенное значение концентрации. В [1] эта функция получена в предположении, что изменение концентрации примеси является марковским процессом. В стационарном случае она имеет вид

$$f_1(C) = (1 - \gamma) \delta(C) + \frac{1}{\sqrt{\pi}\beta} \times \left\{ \exp \left[ -\frac{(C - \bar{C})^2}{\beta^2} \right] - \exp \left[ -\frac{(C + \bar{C})^2}{\beta^2} \right] \right\}; \quad (1)$$

$$\gamma = \operatorname{erf}(\beta_0); \quad \beta_0 = \bar{C}/\beta,$$

где  $\gamma$  – перемежаемость концентрации;  $\delta(\dots)$  – дельта-функция Дирака;  $\beta$  – второй параметр функции плотности вероятности;  $\operatorname{erf}(\dots)$  – интеграл вероятности. Данная функция получена в [1] в предположении, что период усреднения концентрации  $T$  много больше характерного внутреннего масштаба пульсаций концентрации  $\tau_e$  (эйлерова временного масштаба) в заданной точке пространства. Именно в этом случае усреднение по статистическому ансамблю можно заменить «скользящим» усреднением по времени:

$$\bar{C} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} C(t) dt.$$

Тогда процесс  $C(t)$  можно приближенно считать марковским [2].

Параметр  $\beta$  связан с математическим ожиданием концентрации и ее дисперсией  $\sigma^2$  следующим образом [1]:

$$\frac{\sigma^2}{(\bar{C})^2} = \gamma \left( 1 + \frac{1}{2\beta_0^2} \right) - 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}\beta_0} \exp(-\beta_0^2).$$

Плотность вероятности (1) подтверждена экспериментами, проводившимися на аэродинамической трубе, данными независимых натуральных экспериментов, а также асимптотиками теории турбулентного горения для концентрации примеси на оси турбулентных затопленных струй и на их периферии [1].

Полное статистическое описание марковского стационарного процесса изменения концентрации примеси в заданной точке становится возможным, если наряду с плотностью вероятности (1) известны функция плотности вероятности перехода концентрации примеси из одного состояния в другое за время  $t$  и, как следствие, корреляционная функция пульсаций концентрации. Целью данной работы является получение указанных характеристик.

Согласно определению корреляционная функция стационарного случайного процесса  $C(t)$  равна

$$B(\tau) = \iint_0^\infty C C_0 f_1(C_0) f_2(C, C_0, \tau) dC dC_0 - \left[ \int_0^\infty C f_1(C) dC \right]^2, \quad (2)$$

где  $f_2(C, C_0, \tau)$  – функция плотности вероятности перехода концентрации из состояния  $C_0$  в состояние  $C$  за время  $\tau$ .

Считая по-прежнему, что изменение концентрации является марковским процессом, выпишем для плотности вероятности перехода  $f_2$  уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова [2]:

$$\frac{\partial f_2}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial C} a(C) f_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial C^2} b(C) f_2 = 0. \quad (3)$$

Здесь мы уже не можем считать, что  $\tau_e$  много меньше  $T$ , поскольку переход концентрации из одного состояния в другое может произойти за время  $\tau$  меньше  $\tau_e$ . Однако сохраним предположение о марковости процесса  $C(t)$ . Справедливость такого предположения не очевидна, но она подтверждается в конце статьи некоторыми результатами изучения закономерностей диффузии примеси в приземном слое атмосферы. Тем не менее мы не можем приступить к решению (2). Из-за наличия эффекта перемежаемости концентрации процесс  $C(t)$  не является непрерывным. Действительно, в заданной точке пространства концентрация примеси может скачком измениться от некоторого значения до нуля и также скачком перейти из нулевого

значения в некоторое состояние с ненулевой концентрацией. Уравнение (3) не применимо для описания таких непрерывно-разрывных процессов. Вместе с тем обратное уравнение Колмогорова [2], отнесенное к начальному значению концентрации  $C_0$  и начальному моменту времени  $\tau_0$ , остается корректным (функция (1) также найдена с помощью обратного уравнения Колмогорова [1]):

$$\frac{\partial f_2}{\partial \tau_0} + a(C_0) \frac{\partial f_2}{\partial C_0} + \frac{1}{2} b(C_0) \frac{\partial^2 f_2}{\partial C_0^2} = 0. \quad (4)$$

Для определения коэффициентов данного уравнения заметим, что непрерывная часть решения аналогичного уравнения для функции плотности вероятности концентрации (1) формально является разностью двух фундаментальных решений уравнения теплопроводности. Этот факт демонстрирует тесную связь рассматриваемой задачи с классом нормальных марковских диффузионных процессов [2]. Данная аналогия позволяет предположить следующий вид коэффициентов в (3):

$$a(C) = -\frac{C - \bar{C}}{\tau_e}; \quad b(C) = \frac{1}{\tau_e} \beta^2.$$

Структура выражения для функции плотности вероятности перехода, очевидно, будет аналогична приведенной выше плотности вероятности (1). Система начальных и граничных условий должна быть задана следующей:

$$\begin{aligned} f_2(C, \tau_0, C_0, \tau_0) &= \delta(C - C_0), \\ f_2(0, \tau, C_0, \tau_0) &= f_2(\infty, \tau, C_0, \tau_0) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

После решения задачи (4), (5) следует положить  $\tau_0 = 0$ .

Для таких уравнений, как уравнение (4) параболического типа с отрицательным коэффициентом диффузии, решение задачи Коши существует не при любых начальных условиях. В тех случаях, когда существование решения установлено, задача Коши является некорректной по Адамару. Это проявляется в том, что уменьшение длины волны возмущений в начальных условиях приводит к увеличению скорости нарастания их амплитуды. В результате этого решение быстро искажается. Однако для таких уравнений известна теорема о единственности решения задачи Коши при условии, что оно существует [3]. Таким образом, установив точное решение, можно быть уверенным, что оно является единственным.

Точное аналитическое решение задачи для  $\tau_0 = 0$  имеет вид

$$\begin{aligned} f_2(C, C_0, \tau) &= (1 - \gamma_2) \delta(C) + \frac{1}{\sqrt{\pi g(\tau)}} \times \\ &\times \left\{ \exp \left[ -\frac{(C - \bar{C} - (C_0 - \bar{C}) \exp(-\tau/\tau_e))^2}{g(\tau)} \right] - \right. \\ &\left. - \exp \left[ -\frac{(C + \bar{C} + (C_0 - \bar{C}) \exp(-\tau/\tau_e))^2}{g(\tau)} \right] \right\}; \\ g(\tau) &= \beta^2 [(1 - \exp(-2\tau/\tau_e))]; \\ \gamma_2 &= \operatorname{erf} \left[ -\frac{\bar{C} + (C_0 - \bar{C}) \exp(-\tau/\tau_e)}{\sqrt{g(\tau)}} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

В этом можно непосредственно убедиться подстановкой (6) в (4). Для того чтобы в (6) вернуться к зависимости  $f_2$  от  $\tau_0$ , следует сделать замену  $\tau$  на  $\tau - \tau_0$ . Устремляя  $\tau$  к бесконечности, получаем стационарную функцию плотности вероятности (1). Также убеждаемся, что условия (5) выполняются.

Теперь, согласно (2), находим корреляционную функцию пульсаций концентрации

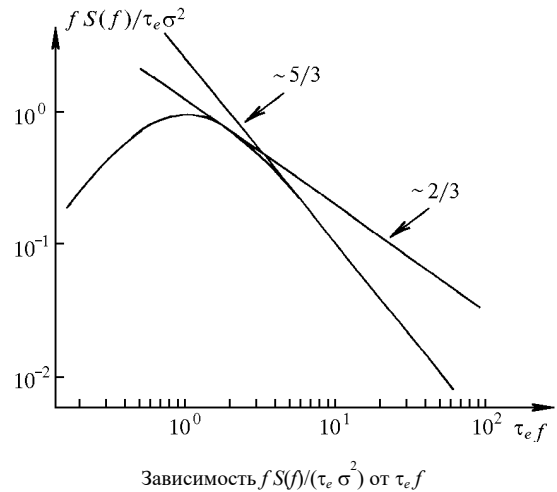
$$B(\tau) = \sigma^2 \exp(-|\tau|/\tau_e). \quad (7)$$

Вследствие этого плотность спектральной мощности пульсаций концентрации  $S(f)$  имеет вид [2]:

$$S(f) = 2 \int_0^{\infty} B(\tau) \cos(f\tau) d\tau = \frac{2\sigma^2 \tau_e}{1 + (f\tau_e)^2}, \quad (8)$$

где  $f$  – частота пульсаций концентрации.

Справедливость сделанного выше предположения о приближенной марковости процесса  $C(t)$  продемонстрируем на основании данных работы [4]. Там было показано, что в приземном слое атмосферы можно наблюдать два режима флуктуаций концентрации примеси: «переходной» и «равновесный». Переходной режим характерен тем, что наряду с участком плотности спектральной мощности пульсаций концентрации, который соответствует равновесному закону  $f \sim -5/3$ , наблюдается закон  $f \sim -2/3$ . Последний расположен при значениях безразмерной частоты  $-\tau_e f$  порядка двух, а закон «пять третей» при безразмерной частоте больше семи. На рисунке дана зависимость безразмерной плотности спектральной мощности (8) от безразмерной частоты. Там же проведены прямые, соответствующие обсуждавшимся выше законам «пять третей» и «две трети». Мы видим, что полученная теоретически, в предположении марковости процесса  $C(t)$ , плотность спектральной мощности удовлетворительно соответствует наблюдавшейся экспериментально в приземном слое атмосферы зависимости  $S(f)$  от частоты.



Таким образом, для марковского стационарного процесса изменения концентрации атмосферной примеси в заданной точке пространства достигнуто его полное статистическое описание. Применение полученных результатов требует знания всех трех величин: математического ожидания концентрации, ее дисперсии и эйлерова временного масштаба пульсаций концентрации.

1. *Бородулин А.И., Майстренко Г.М., Чалдин Б.М.* Статистическое описание распространения аэрозолей в атмосфере. Метод и приложения. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1992. 124 с.
2. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977. 488 с.
3. *Фридман А.И.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968. 346 с.
4. *Возженников О.И., Жуков Г.П.* Статистический режим флуктуаций концентрации примеси от локального источника в приземном слое атмосферы // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1981. Т. 17. N 6. С. 580–586.

*A.I. Borodulin, B.M. Desyatkov, V.V. Marchenko.* **Correlation Function for Pulsations of Atmospheric Pollutant Concentration.**

The theoretically obtained and experimentally supported stationary function of probability density for the aerosol and gas pollutant concentration dispersing in the atmosphere is used in this work. On the basis of this function, the probability density of concentration transfer from the given initial state to any terminal one have been found. The correlation function for the pollutant concentration pulsation is derived from these results.