«Оптика атмосферы и океана», **21**, № 8 (2008)

УДК 539.194; 531.19

Циклотронное излучение заряженных частиц, подвергающихся перманентному стохастическому возмущению

И.В. Иванов, В.Н. Иванов*

Омский государственный технический университет
644050, г. Омск, пр. Мира, 11

Поступила в редакцию 27.03.2008 г.

Теоретически исследовано влияние перманентного стохастического возмущения на заряженные частицы, находящиеся в стационарном магнитном поле. Для этого решается нелинейное уравнение Шредингера. Выявлено, что в слабых магнитных полях возбуждается большое число гармоник циклотронного излучения. При увеличении напряженности поля число гармоник уменьшается и при некоторой величине напряженности излучение вообще может исчезнуть. Построены кривые зависимости от температуры вероятности заселенности квантовых уровней индуцированных полем осцилляторов.

Ключевые слова: осциллятор, нелинейность, магнитное поле.

Рассмотрим влияние стохастического возмущения на характер движения безспиновых заряженных частиц в стационарном магнитном поле.

Для анализа поведения частиц в магнитном поле при воздействии на них перманентного стохастического возмущения используется нелинейное уравнение Шредингера, построенное методом интегралов по траекториям для систем, испытывающих перманентное стохастическое возмущение [1, 2]. Если в этом уравнении положить скалярный потенциал и скорость дрейфа подсистемы в термостате равной нулю, то получим

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{1+i\alpha}\left[\frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{P}}-\frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2+\chi\right]\psi + \frac{i\alpha}{1+\alpha^2}\langle\psi|\times$$
$$\times\left[\frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{P}}-\frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2+\chi\right]|\psi\rangle\psi, \qquad (1)$$

где $\hat{\mathbf{P}}$ — оператор импульса; $\mathbf{A}$ — векторный потенциал внешнего поля; q — заряд частицы; m — ее масса; c — скорость света; α — малый положительный параметр, величина которого зависит от плотности окружающей подсистему среды; $\chi = kT^*/2$ (k — постоянная Больцмана; T^* — эффективная температура окружающей среды).

Решение этого уравнения будем искать в два этапа. На первом этапе найдем решение стационарного редуцированного уравнения, в котором отсутствует нелинейное слагаемое. На втором — выясним влияние нелинейности полученного уравнения на устойчивость этих состояний. Введем декартову систему координат и будем считать, что магнитное поле ориентировано вдоль оси Z. В этом случае векторный потенциал будет иметь следующие компоненты:

$$A_x = -Hy;\ \ A_y = A_z = 0. \qquad (2)$$

Здесь H — напряженность магнитного поля.

Редуцированное линейное уравнение, вытекающее из (1), имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{1+i\alpha}\left[\frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{P}}-\frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2+\chi\right]\psi. \qquad (3)$$

Если представить возможное решение уравнения (3) в виде

$$\psi = \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)\psi(\mathbf{r}),$$

(E — константа распределения), то для координатной функции $\psi(\mathbf{r})$ следует стационарное уравнение

$$\tilde{E}\psi = \frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}}-\frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2\psi, \qquad (4)$$

где

$$\tilde{E} = (1+i\alpha)E-\chi.$$

Решение уравнения (4) хорошо известно [3, 4]. Представление волновой функции в виде произведения

$$\psi(\mathbf{r}) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_z z)\right)\varphi(y)$$

позволяет при учете (2) записать уравнение

* Игорь Вячеславович Иванов; Вячеслав Николаевич Иванов (ivanovvn@phys.omsu.omskreg.ru).

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{2m}{\hbar}\left(\tilde{E}-\frac{p_z^2}{2m}-\frac{m}{2}\left(\frac{qH}{mc}\right)^2(y-y_0)^2\right)\varphi=0, \quad (5)$$

где

$$y_0=-cp_x/(qH).$$

Уравнение (5) формально совпадает с уравнением для гармонического осциллятора, колеблющегося около точки y_0 с циклической частотой

$$\omega=\left|qH/(mc)\right|.$$

Следовательно, волновые функции частицы, находящейся в стационарном магнитном поле и испытывающей перманентное стохастическое возмущение, выражаются через полиномы Эрмита:

$$\psi_n(\mathbf{r})=\exp\left(\frac{i}{\hbar}(p_xx+p_zz)\right)\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)H_n(\xi),$$

где

$$\xi=\sqrt{m\omega/\hbar}(y-y_0).$$

Для константы разделения $\tilde{E}$ справедливо:

$$\tilde{E}_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\left|\frac{qH}{mc}\right|+\frac{p_z^2}{2m},$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$, тогда исходная константа разделения в редуцированном уравнении Шредингера

$$E_n=\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\left|\frac{qH}{mc}\right|+\frac{p_z^2}{2m}+\chi}{1+i\alpha}.$$

Несмотря на близость полученных выражений к соответствующим соотношениям, описывающим состояния перманентно возмущаемого осциллятора [2], при анализе устойчивости квантовых состояний частицы в магнитном поле выявляются некоторые особенности. Рассмотрим их подробнее.

Представим решение уравнения (1) в виде

$$\psi(\mathbf{r},t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(t)\psi_n(\mathbf{r}).$$

Коэффициенты $C_n(t)$ удовлетворяют системе нелинейных уравнений:

$$i\hbar\frac{\partial C_n}{\partial t}=\frac{1}{1+i\alpha}\left(\tilde{E}_n+\chi\right)C_n+$$
$$+\frac{i\alpha}{1+\alpha^2}C_n\sum_k\left(\tilde{E}_k+\chi\right)\left|C_k\right|^2. \quad (6)$$

Анализ, аналогичный проведенному в [2], показывает, что незаполненные состояния при отличных от нуля значениях параметра α являются устойчивыми.

Переход к числам заполнения $P_n(t) = |C_n(t)|^2$ позволяет, исходя из (6), записать:

$$\frac{\partial P_n}{\partial t}=\frac{2\alpha}{\hbar\left(1+\alpha^2\right)}P_n\left(-\left(\tilde{E}_n+\chi\right)+\sum_k\left(\tilde{E}_k+\chi\right)P_k\right). \quad (7)$$

Система уравнений (7) показывает, что в равновесном состоянии частица, находящаяся в магнитном поле, имеет отличным от нуля только одно из чисел заполнения. То есть, несмотря на то что формально $\tilde{E}_n$ может иметь непрерывный ряд значений, заряженная частица, находящаяся в стационарном магнитном поле, имеет энергию, соответствующую фиксированному квантовому числу n.

Рассмотрим, какова динамика изменения заселенности различных квантовых состояний $\psi_n(\mathbf{r},t)$. При этом учтем, что изменение незаполненного состояния возможно только при

$$\alpha\le\alpha_n=\hbar\delta/(\tilde{E}_n+\chi),$$

где δ — некоторое малое положительное число [1, 2].

Воспользуемся двухуровневым приближением и перепишем систему (7) в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_n}{\partial t}&=\frac{2\alpha}{\hbar(1+\alpha^2)}P_n\left[-(\tilde{E}_n+\chi)+(\tilde{E}_n+\chi)P_n+(\tilde{E}_l+\chi)P_l\right]=\\&=F(P_n,P_l),\\ \frac{\partial P_l}{\partial t}&=\frac{2\alpha}{\hbar(1+\alpha^2)}P_l\left[-(\tilde{E}_l+\chi)+(\tilde{E}_l+\chi)P_l+(\tilde{E}_n+\chi)P_n\right]=\\&=\Phi(P_n,P_l).\end{aligned} \quad (8)$$

Положим для определенности, что первоначально $P_{n0} = 1$; $P_{l0} = 0$.

Якобиан системы уравнений (8) отличен от нуля:

$$\Delta=\frac{4\alpha^2}{\hbar}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\left|\frac{qH}{mc}\right|+\frac{p_z^2}{2m}+\frac{kT^*}{2}\right]\left|\frac{qH}{mc}\right|(n-l).$$

Это показывает, что около выделенных точек нет рядом других положений равновесия [5].

Параметр

$$\sigma=F'_{P_n}(P_n,P_l)+\Phi'_{P_l}(P_n,P_l).$$

От его знака зависит устойчивость траекторий, по которым индуцированный осциллятор может выйти из положения равновесия [5], с точностью до малых более высокого порядка имеет следующее значение:

$$\sigma=2\alpha\left|\frac{qH}{mc}\right|\left(2n-l+\frac{1}{2}+\frac{cp_z^2}{2\hbar|qH|}+\frac{kT^*mc}{2\hbar|qH|}\right).$$

При больших напряженностях магнитного поля

$$|H|\gg\frac{c}{\hbar|q|}\left(p_z^2+mkT^*\right).$$

Параметр σ для состояния с $n = 0$ становится отрицательным. В этом случае траектория является устойчивой и осциллятор возвращается в исходное состояние. Другими словами, для индуцированных осцилляторов должна наблюдаться Бозе-конденсация состояний, т.е. движущиеся в магнитном поле заряженные частицы не будут излучать электромагнитные волны. Этот эффект возможного исчезновения циклотронного излучения обусловлен тем, что суммарная механическая энергия недостаточна для возбуждения индуцированных магнитным полем осцилляторов.

Оценка относительной интенсивности гармоник циклотронного излучения в данной статье проведена по алгоритму, описанному в [2]. При этом учитывалось, что переходы с нижнего уровня с номером «n» вверх возможны на уровни с номерами, удовлетворяющими неравенству

$$l \le 2n + \frac{1}{2} + \frac{p_z^2}{2\hbar\omega m} + \frac{kT^*}{2\hbar\omega}.$$

На рис. 1—3 представлены вероятности заселенности колебательных уровней для различных значений отношений $y = \omega\hbar/(kT) = 0{,}5$ при разных значениях параметра $z = p_z^2/(mkT)$. Для сравнения приведены показанные сплошной линией распределения Больцмана.

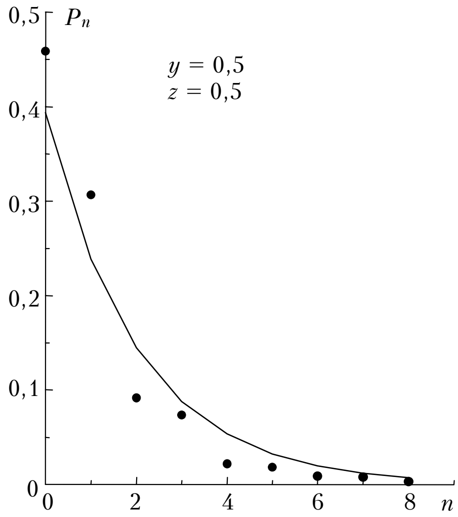

Рис. 1

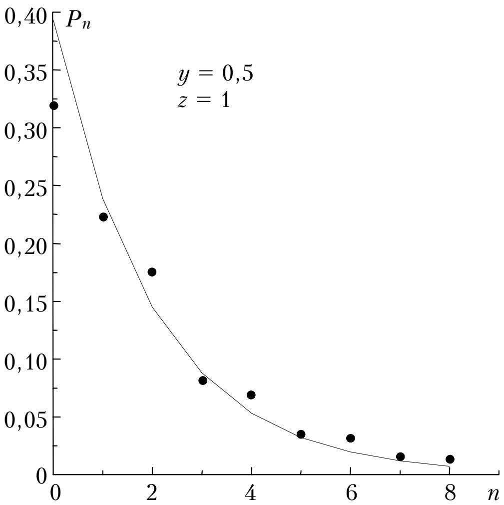

Рис. 2

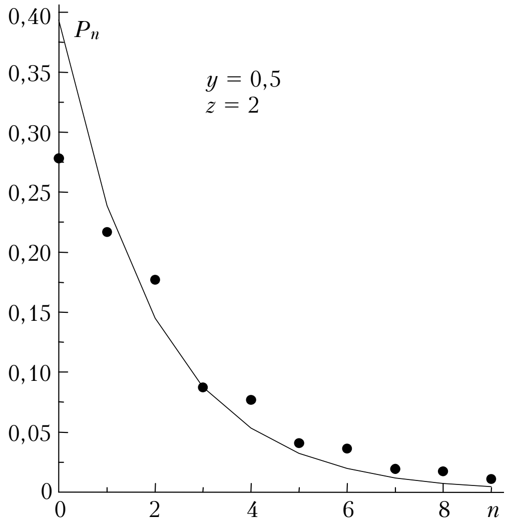

Рис. 3

Из рис. 1—3 видно, что указанные зависимости довольно близки друг к другу.

На рис. 4—6 приведены рассчитанные распределения интенсивности излучения индуцированных

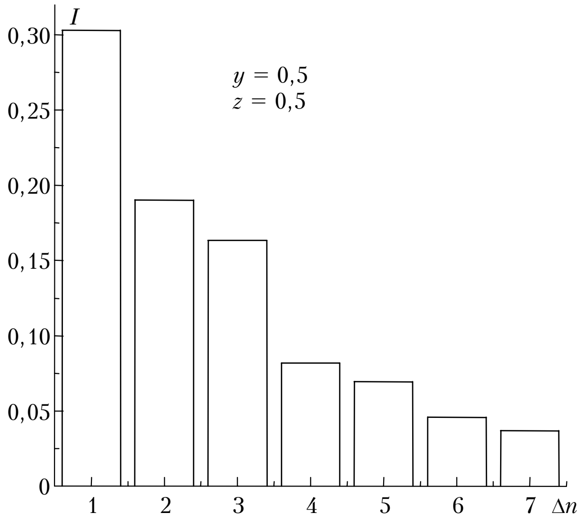

Рис. 4

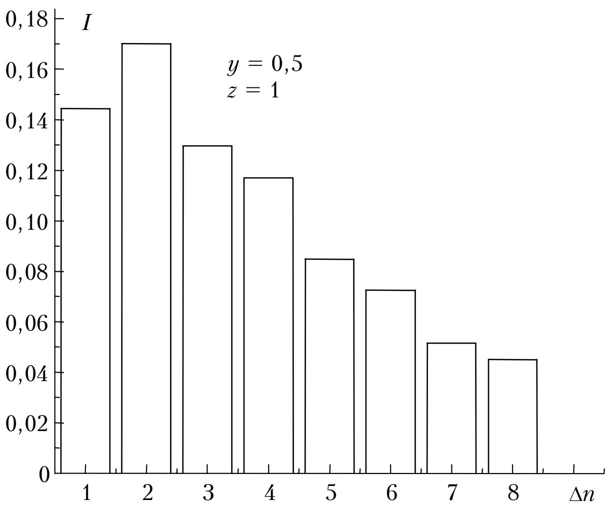

Рис. 5

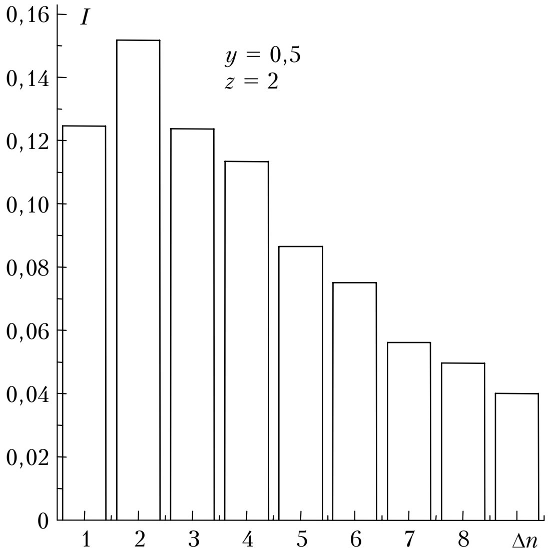

Рис. 6

магнитным полем осцилляторов при тех же значениях параметров y и z, что и на рис. 1–3.

Интенсивности излучения несколько отличаются друг от друга. Это связано с различной величиной вероятности перехода с одного уровня энергии на другой. Для других параметров y и z соответствующие распределения имеют такую же структуру.

Найденные теоретически зависимости показывают, что при малых напряженностях магнитных полей спектр излучения содержит большое число интенсивных гармоник циклотронной частоты. При увеличении напряженности магнитного поля относительная интенсивность гармоник уменьшается. Эти результаты на качественном уровне согласуются с экспериментом. Большое число циклотронных гармоник наблюдается в «полярном» сиянии (излучение, в том числе и циклотронное, заряженных частиц в магнитном поле Земли), а в сильных полях – малое число гармоник циклотронной частоты [6].

1. *Иванов В.Н.* Эвристический способ описания релаксации квантовых систем // Изв. вузов. Физ. 1996. Т. 39. № 2. С. 7–13.
2. *Иванов В.Н., Иванов И.В.* Тепловое излучение системы слабосвязанных осцилляторов, испытывающих перманентное стохастическое возмущение // Оптика атмосф. и океана. 2007. Т. 20. № 1. С. 31–39.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963. 702 с.
4. *Блохинцев Д.И.* Основы квантовой механики. М.: Наука, 1976. 664 с.
5. *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967. 487 с.
6. *Физический* энциклопедический словарь. М.: Сов. энциклопедия, 1983. 928 с.

I.V. Ivanov, V.N. Ivanov. **Cyclotron radiation of charged particles exposed to permanent stochastic perturbation.**

Influence of permanent stochastic perturbation on charged particles which are taking place in a stationary magnetic field theoretically is explored. For this purpose the nonlinear equation Schrödinger is solved. It is obtained, that in feeble magnetic fields the major number of harmonics cyclotron radiation is raised. At magnification of a field gradient the number of harmonics decreases and at some quantity of intensity the radiation generally can disappear. The curves of a temperature dependence of population probability of quantum levels by an induced field of oscillators are defined.