

МЕТОДЫ И СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ.  
ОБРАБОТКА ДАННЫХ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

УДК 535.36

А.А. Попов

О ГРАНИЦАХ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА ФИЗИЧЕСКОЙ ОПТИКИ  
В ЗАДАЧАХ РАССЕЯНИЯ СВЕТА НА КРУПНЫХ КРИСТАЛЛАХ.

Ч. 2. РАССЕЯНИЕ НА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКЕ

В статье с помощью метода физической оптики получены формулы для сечений и факторов эффективности ослабления и рассеяния в случае, когда на основание прямоугольной пластинки с размерами  $2a$  и  $2b$  нормально падает плоская волна. Получена оценка для относительной погрешности метода физической оптики в виде неравенства, правая часть которого является линейной комбинацией двух интегралов, зависящих от двух дифракционных параметров  $p = ka$  и  $q = kb$ . Показано, что для прямоугольной пластинки с минимальным размером основания, превосходящим в 10 раз длину волны, эта погрешность не превышает 3%.

Рассеянное поле в ближней зоне для атмосферного кристалла с заданной ориентацией есть совокупность расходящихся от него пучков параллельных лучей. Размеры сечений пучков в десятки и сотни раз превосходят длину волны видимого и ИК-диапазонов длин волн. Поэтому при определении рассеянного поля в дальней зоне для таких пучков более оптимальным является метод физической оптики. В статье [1] установлены границы применимости метода физической оптики для модели кристалла в виде круглой пластинки. В рамках этой модели при нормальном падении плоской волны на основание пластинки сечения пучков имеют форму круга, т.е. характеризуются одним размером. Для некоторых форм реальных кристаллов, например, для гексагональных столбиков, сечения образующихся пучков необходимо описывать двумя размерами, учитывая, что один из них может существенно преобладать над другим. В настоящей статье сделано обобщение результатов, полученных нами в [1], для случая, когда сечения образующихся пучков задаются двумя размерами.

Пусть прямоугольная пластинка имеет стороны основания  $2a$  и  $2b$  по осям  $Ox$  и  $Oy$  соответственно и толщину  $d$ . Пусть плоская волна  $\mathbf{E} \exp(ikz)$  падает нормально на основание пластинки. Предположим, что мнимая часть комплексного показателя преломления  $\tilde{n} = n + i$  к пластинки равна нулю, т.е.  $\tilde{n} = n$ . В статье [1] показано, что последнее предположение не нарушает общности задачи. Амплитуду электрической составляющей падающего поля  $\mathbf{E}$  зададим в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = x'_0 E_1 + y'_0 E_2 = x_0 E_{p_1} + y_0 E_{p_2}, \quad (1)$$

где

$$E_{p_1} = E_1 \cos \xi - E_2 \sin \xi;$$

$$E_{p_2} = E_1 \sin \xi + E_2 \cos \xi.$$

Иными словами, составляющие  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$ , образующие в общем случае волну с эллиптической поляризацией, развернуты в координатной плоскости  $Oxy$  на некоторый угол  $\xi$  относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ .

В данной постановке задачи получим формулы для факторов эффективности ослабления ( $Q_{\text{ext}}$ ) и рассеяния ( $Q_{\text{sca}}$ ), используя метод физической оптики. Далее установим границы применимости метода, сравнивая между собой локальную ( $Q_{\text{ext}}$ ) и интегральную ( $Q_{\text{sca}}$ ) характеристики рассеянного поля.

Электрическую составляющую полного электромагнитного поля представим в виде

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E} \exp(ikz) - \mathbf{A} \exp(ikr)/ikr. \quad (2)$$

Амплитуда  $\mathbf{A}$  рассеянного поля в общем случае является суммой двух ортогональных составляющих  $\mathbf{A}_1$  и  $\mathbf{A}_2$ . В рамках метода физической оптики они определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= (\nu_0 \cos \varphi - \varphi_0 \sin \varphi) S(\nu, \varphi) E_{p_1}; \\ \mathbf{A}_2 &= (\nu_0 \sin \varphi + \varphi_0 \cos \varphi) S(\nu, \varphi) E_{p_2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Векторы  $\nu_0$  и  $\varphi_0$  являются ортами сферической системы координат  $(r, \nu, \varphi)$ , в которой угол  $\nu$  отсчитывается от оси  $Oz$ , а угол  $\varphi$  – от оси  $Ox$  в плоскости  $Oxy$ . Иными словами, орты сферической и прямоугольной систем координат связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= (\mathbf{x}_0 \cos \varphi + \mathbf{y}_0 \sin \varphi) \sin \nu + \mathbf{z}_0 \cos \nu, \\ \nu_0 &= (\mathbf{x}_0 \cos \nu + \mathbf{y}_0 \sin \nu) \cos \varphi - \mathbf{z}_0 \sin \varphi, \\ \varphi_0 &= -\mathbf{x}_0 \sin \varphi + \mathbf{y}_0 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

Угловая функция  $S(\nu, \varphi)$  имеет такую же структуру, что и в случае круглой пластинки [1], т.е.

$$S(\nu, \varphi) = \frac{k^2}{2\pi} \left( \frac{1 + \cos \nu}{2} F_1(\nu, \varphi)(1-T) + \frac{1 + \cos(\pi - \nu)}{2} F_2(\nu, \varphi)R \right), \quad (5)$$

но в ней, в силу отсутствия оси симметрии в геометрии задачи, заложена зависимость и от азимутального угла  $\varphi$ . Напомним, что комплексные величины  $T$  и  $R$  определяются как френелевские коэффициенты передачи и отражения для плоской волны, нормально падающей на полупрозрачный слой толщиной  $d$ . Формулы для них приведены, в частности, и в нашей статье [1]. Функции  $F_1(\nu, \varphi)$  и  $F_2(\nu, \varphi)$  являются характеристиками рассеяния в дальней зоне для пучков, вышедших из пластинки в прямом и обратном направлениях. Они определяются как интегралы Фраунгофера для фазовых функций по площадям верхнего и нижнего оснований прямоугольной пластинки. Данное интегрирование проводится здесь в аналитическом виде, что позволяет получить для функций  $F_1(\nu, \varphi)$  и  $F_2(\nu, \varphi)$  следующие выражения:

$$\begin{aligned} F_1(\nu, \varphi) &= 4ab \frac{\sin(p \sin \nu \cos \varphi)}{p \sin \nu \cos \varphi} \times \frac{\sin(q \sin \nu \sin \varphi)}{q \sin \nu \sin \varphi}, \\ F_2(\nu, \varphi) &= 4ab \frac{\sin(p \sin(\pi - \nu) \cos \varphi)}{p \sin(\pi - \nu) \cos \varphi} \times \frac{\sin(q \sin(\pi - \nu) \sin \varphi)}{q \sin(\pi - \nu) \sin \varphi}, \end{aligned}$$

где  $p = ka$ ,  $q = kb$  – дифракционные параметры;  $k$  – волновое число.

Анализируя последние выражения, нетрудно убедиться, что  $F_1(\nu, \varphi) = F_2(\nu, \varphi)$ . Введем для этих функций новое обозначение:  $F(\nu, \varphi)$ . В результате для угловой функции  $S(\nu, \varphi)$  окончательно имеем

$$S(\nu, \varphi) = \frac{k^2}{2\pi} F(\nu, \varphi) \left[ \frac{1 + \cos \nu}{2} (1-T) + \frac{1 - \cos \nu}{2} R \right]. \quad (6)$$

Для определения сечения ослабления ( $\sigma_{\text{ext}}$ ) воспользуемся формулой ослабления [2] для поляризованных полей

$$\sigma_{\text{ext}} = \frac{4\pi}{k^2} \frac{\text{Re}(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{A}|_{\nu=0})}{|\mathbf{E}|^2}. \quad (7)$$

При  $\nu = 0$  из соотношений (4) нетрудно получить

$$\begin{aligned} \nu_0 \cos \varphi - \varphi_0 \sin \varphi &= \mathbf{x}_0, \\ \nu_0 \sin \varphi + \varphi_0 \cos \varphi &= \mathbf{y}_0. \end{aligned}$$

В результате амплитуда рассеянного поля  $\mathbf{A}$  преобразуется к виду

$$\mathbf{A}|_{\nu=0} = \mathbf{A}_1|_{\nu=0} + \mathbf{A}_2|_{\nu=0} = (E_{p_1} \mathbf{x}_0 + E_{p_2} \mathbf{y}_0) S(0, \varphi) = \mathbf{E} S(0, \varphi) = \mathbf{E} \frac{2}{\pi} p q (1 - T). \quad (8)$$

Используя (8) и учитывая, что

$$|\mathbf{E}|^2 = \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E} = |E_{p_1}|^2 + |E_{p_2}|^2 = |E_1|^2 + |E_2|^2, \quad (9)$$

для сечения ослабления получим следующее выражение:

$$\sigma_{\text{ext}} = 8 p q (1 - \text{Re}(T)) / k^2. \quad (10)$$

В данной постановке задачи площадь геометрической тени равна  $4 a b$ . В результате формула для фактора эффективности ослабления имеет вид

$$Q_{\text{ext}} = \sigma_{\text{ext}} / 4 a b = 2(1 - \text{Re}(T)). \quad (11)$$

Таким образом, факторы эффективности ослабления для прямоугольной и круглой пластинок при нормальном падении плоской волны на их основания определяются одним и тем же соотношением (11).

Для определения сечения рассеяния ( $\sigma_{\text{sca}}$ ) воспользуемся следующей формулой [2]:

$$\sigma_{\text{sca}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\mathbf{A}|^2}{k^2 |\mathbf{E}|^2} \sin \nu d\nu d\varphi. \quad (12)$$

В данной постановке задачи формула (12) допускает упрощение. Учитывая, что

$$|\mathbf{A}|^2 = \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = (|E_{p_1}|^2 + |E_{p_2}|^2) |S(\nu, \varphi)|^2 = (|E_1|^2 + |E_2|^2) |S(\nu, \varphi)|^2,$$

преобразуем (12) к виду

$$\sigma_{\text{sca}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{|S(\nu, \varphi)|^2}{k^2} \sin \nu d\nu d\varphi. \quad (13)$$

Введем в рассмотрение новую функцию

$$f(\nu, \varphi) = \frac{\sin X}{X} \frac{\sin Y}{Y},$$

где  $X = p \sin \nu \cos \varphi$ ,  $Y = q \sin \nu \cos \varphi$ . Учитывая, что  $F(\nu, \varphi) = 4 a b f(\nu, \varphi)$ , определим угловую функцию  $S(\nu, \varphi)$  и квадрат ее модуля  $|S(\nu, \varphi)|^2$  следующими выражениями:

$$\begin{aligned} S(\nu, \varphi) &= \frac{2 p q}{\pi} f(\nu, \varphi) \left( \frac{1 + \cos \nu}{2} (1 - T) + \frac{1 - \cos \nu}{2} R \right), \\ |S(\nu, \varphi)|^2 &= \frac{4 p^2 q^2}{\pi^2} f^2(\nu, \varphi) \left[ \left( \frac{1 + \cos \nu}{2} \right)^2 |1 - T|^2 + \left( \frac{1 - \cos \nu}{2} \right)^2 |R|^2 + 2 \text{Re}[(1 - T) R^*] \left( \frac{1 + \cos \nu}{2} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{1 - \cos \nu}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Формула (13) с учетом (14) преобразуется к виду:

$$\sigma_{\text{sca}} = (4 p^2 q^2) / (\pi^2 k^2) \left( |1 - T|^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f^2(\nu, \varphi) \left( \frac{1 + \cos \nu}{2} \right)^2 \sin \nu d\nu d\varphi + |R|^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f^2(\nu, \varphi) \times \right.$$

$$\times \left( \frac{1 - \cos \nu}{2} \right)^2 \sin \nu d\nu d\varphi + 2 \operatorname{Re} [(1-T)R^*] \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f^2(\nu, \varphi) \frac{1 + \cos \nu}{2} \times \frac{1 - \cos \nu}{2} \sin \nu d\nu d\varphi. \quad (15)$$

С помощью замены переменной  $\nu$  в одном из интегралов нетрудно доказать, что

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f^2(\nu, \varphi) \left( \frac{1 + \cos \nu}{2} \right)^2 \sin \nu d\nu d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f^2(\nu, \varphi) \left( \frac{1 - \cos \nu}{2} \right)^2 \sin \nu d\nu d\varphi. \quad (16)$$

Переходя от сечения рассеяния к фактору эффективности рассеяния и учитывая равенство (16), окончательно получим

$$Q_{\text{sca}} = \sigma_{\text{sca}}/4ab = (|1-T|^2 + |R|^2)A(p, q) + 2 \operatorname{Re} [(1-T)R^*]B(p, q), \quad (17)$$

где

$$A(p, q) = \frac{pq}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f^2(\nu, \varphi) \left( \frac{1 + \cos \nu}{2} \right)^2 \sin \nu d\nu d\varphi,$$

$$B(p, q) = \frac{pq}{\pi^2} \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f^2(\nu, \varphi) \sin^3 \nu d\nu d\varphi.$$

Формула (17) для фактора эффективности рассеяния имеет ту же структуру, что и для круглой пластинки [1], и отличается только видом функций  $A$  и  $B$ , которые в данном случае зависят от двух дифракционных параметров  $p$  и  $q$ . Напомним, что функции  $A$  и  $B$  несут информацию о степени локализации рассеянной интенсивности около направлений выхода рефракционных пучков и достигают предельных значений, равных 1 и 0 соответственно [1], при неограниченном увеличении поперечных размеров пластинки. Следуя общим представлениям о функциях  $A$  и  $B$ , естественно предположить, что

$$\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ q \rightarrow \infty}} A(p, q) = 1, \quad \lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ q \rightarrow \infty}} B(p, q) = 0. \quad (18)$$

В [1] для непоглощающей пластинки ( $\kappa = 0$ ) установлена справедливость следующего тождества:

$$2(1 - \operatorname{Re}(T)) = |1-T|^2 + |R|^2. \quad (19)$$

Соотношения (18) и (19) позволяют образовать известную формулу

$$Q_{\text{ext}} = Q_{\text{sca}}, \quad (20)$$

связывающую локальные и интегральные значения угловой функции  $S(\nu, \varphi)$  рассеянного поля для непоглощающей частицы.

Для пластинок с большими поперечными размерами функции  $A$  и  $B$  хотя и слабо, но отличаются соответственно от 1 и 0. Поэтому в общем случае соотношение (20) выполняется приближенно. При произвольных дифракционных параметрах  $p$  и  $q$  (по аналогии с [1]) нетрудно доказать следующее неравенство:

$$(A - B)Q_{\text{ext}} \leq Q_{\text{sca}} \leq (A + B)Q_{\text{ext}}. \quad (21)$$

Введем в рассмотрение величину

$$\Delta = (Q_{\text{ext}} - Q_{\text{sca}})/Q_{\text{ext}}, \quad (22)$$

которую примем за относительную погрешность метода физической оптики, в рамках которого получено соотношение для угловой функции  $S(\nu, \varphi)$ . Объединяя (22) и левую часть неравенства (21), для величины  $\Delta$  получим следующее неравенство:

$$\Delta(p, q) \leq 1 - A(p, q) + B(p, q), \quad (23)$$

которое совпадает по форме с аналогичным неравенством, полученным в [1] для круглой пластинки. Интегральные выражения для функций  $A$  и  $B$  допускают упрощения. В результате несложных преобразований можно значительно сузить области интегрирования и записать окончательные формулы для этих функций в виде

$$A(p, q) = \frac{2pq}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} f^2(\nu, \varphi) (1 + \cos^2 \nu) \sin \nu d\nu d\varphi, \quad (24)$$

$$B(p, q) = \frac{2pq}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} f^2(\nu, \varphi) \sin^3 \nu d\nu d\varphi.$$

Таким образом, формула (23), в которой значения интегралов  $A$  и  $B$  зависят от двух дифракционных параметров, определяет границы применимости метода физической оптики для тех задач, когда сечения образующихся пучков необходимо задавать двумя линейными размерами.

На рис. 1, *a* и 2, *a* приведены значения интегралов  $A$  и  $B$  для пластинок с квадратными поперечными сечениями. Представленные зависимости  $A$  и  $B$  от дифракционного параметра  $p$  качественно повторяют полученные в [1] аналогичные зависимости для круглой пластинки. Поэтому здесь для относительной погрешности метода физической оптики получены примерно такие же значения, как в [1]. В частности, величина  $\Delta$  не превосходит 0,1 (10%) для дифракционных параметров  $p > 10$ ;  $\Delta < 0,05$  (5%) для  $p > 20$ ;  $\Delta < 0,02$  (2%) для  $p > 50$ ;  $\Delta < 0,01$  (1%) для  $p > 100$ .

На рис. 1, *б* и 2, *б* приведены значения интегралов  $A$  и  $B$  в зависимости от дифракционных параметров  $p$  и  $q$  для прямоугольных пластинок. Кривые имеют тот же вид, что и для квадратных пластинок, но ограничены сверху или снизу разными горизонтальными асимптотами, значения которых зависят от параметра  $q$ . Иными словами, увеличивая только один из дифракционных параметров, всегда можно уменьшить относительную погрешность метода, но до определенного предела. Предельное значение величины  $\Delta$  при  $q = \text{const}$  определяется по формуле

$$\Delta \leq 1 - A(\infty, q) + B(\infty, q),$$

где  $A(\infty, q)$  и  $B(\infty, q)$  – асимптотические значения для кривых  $A = A(p, q)$  и  $B = B(p, q)$ , в том числе и для кривых, приведенных на рис. 1, *б* и 2, *б*.

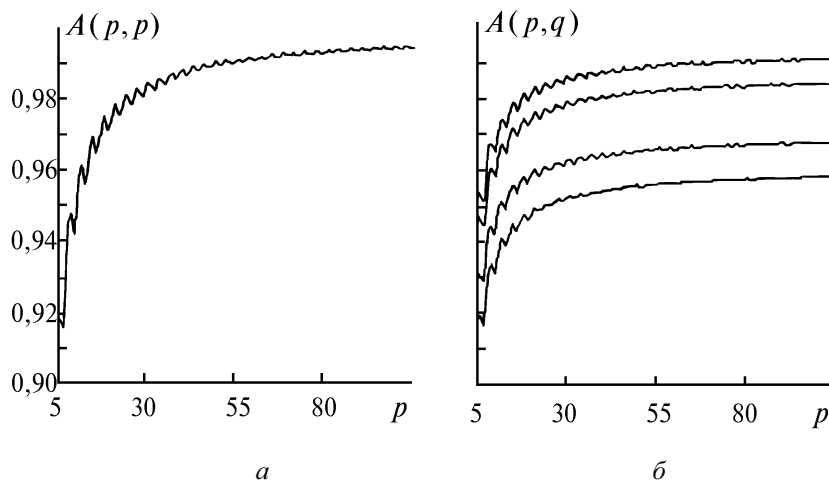


Рис. 1. Зависимости значений интегралов  $A$  для квадратной (*a*) и прямоугольной (*б*) пластинок от дифракционного параметра  $p$ . Дифракционный параметр  $q$  для  $A(p, q)$  принимает значения: 5, 10, 20, 40 (большим  $q$  соответствуют кривые с большими значениями  $A$ )

Анализируя зависимости, представленные на рис. 1–2, можно сделать вывод, что наибольшие приращения значений функций  $A$  и  $B$  приходятся на область изменения аргумента  $p$

от 5 до 30. Аналогичный вывод следует и относительно аргумента  $q$ , т.к. функции  $A$  и  $B$  являются симметричными по отношению к своим аргументам. В результате относительная погрешность метода, достигнутая при  $p = 30$ , далее с ростом  $p$  слабо убывает. Для квадратной пластинки при  $p = 30$  эта погрешность составляет примерно 3%. Причем для прямоугольной пластинки, у которой минимальный из дифракционных параметров равен 30 ( $2b \approx 9,6\lambda$ , где  $\lambda$  – длина волны), она становится еще меньше.

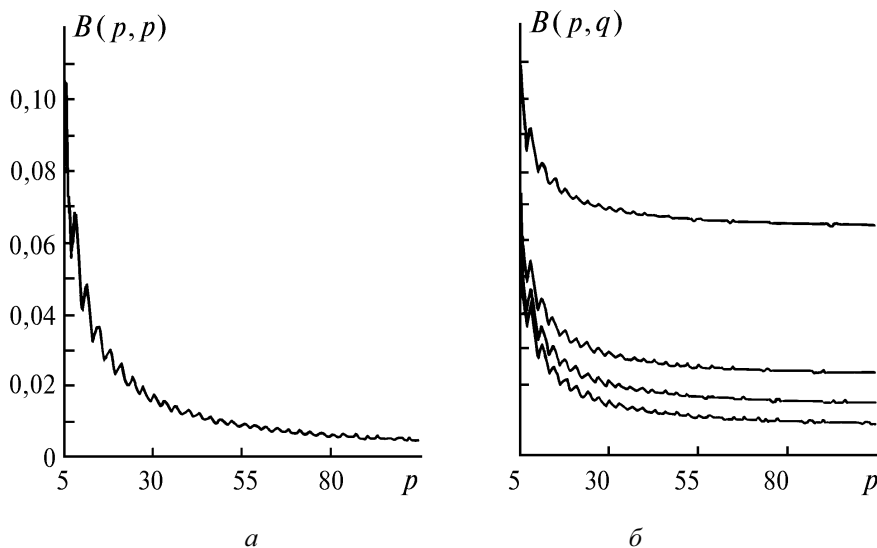


Рис. 2. Зависимости значений интегралов  $B$  для квадратной ( $a$ ) и прямоугольной ( $b$ ) пластинок от дифракционного параметра  $p$ . Дифракционный параметр  $q$  для  $B(p, q)$  принимает значения: 5, 10, 20, 40 (большим  $q$  соответствуют кривые с меньшими значениями  $B$ )

Таким образом, для прямоугольных пластинок с минимальным размером поперечного сечения, превосходящим длину волны в 10 раз, погрешность метода физической оптики не превышает 3%.

1. Попов А. А., Шефер О. В. // Оптика атмосферы и океана. 1993. Т. 6. N 8. С. 899–904.
2. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 660 с.

Марийский политехнический институт,  
г. Йошкар-Ола

Поступила в редакцию  
2 февраля 1995 г.

**A. A. Popov. About Limits of Applicability of Physical Optics Method to Problems of Light Scattering by Large Crystals. P. 2. Scattering by a Rectangular Plate.**

By means of physical optics method the formulas are obtained for cross-sections and effective factors of attenuation and scattering for the case of a plane wave normal incidence onto the base of rectangular plate of  $2a \times 2b$  measures. An estimation of the method's error is obtained in the form of inequality, the right side of which is a linear combination of two integrals being functions of two diffraction parameters  $p = ka$  and  $q = kb$ . The error is shown to be less than 3% for the rectangular plate of minimum size exceeding tenfold the wavelength.