

УДК 528.067

## Алгоритм распознавания образов по данным гиперспектральной съемки

К.Т. Протасов, К.К. Протасов\*

*Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН  
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1*

Поступила в редакцию 1.04.2014 г.

Получено байесово решающее правило распознавания гиперспектральных аэрокосмических данных. Приводится пример распознавания типов древостоев.

*Ключевые слова:* гиперспектральные аэрокосмические наблюдения, оптимальное байесово решающее правило, распознавание образов; hyperspectral aerospace observation, optimum Bayes decision rule, pattern recognition.

При обработке многомерной экспериментальной информации широко используются линейные модели представления данных в ортогональных базисах. Среди всех таких базисов наиболее предпочтительным является базис Карунена–Лоэва (известный в литературе по метеорологии, гидрологии, океанологии, физике атмосферы и океана как базис эмпирических ортогональных функций), при этом аппроксимирующий ряд имеет наименьшее число компонент, сохраняя высокую точность аппроксимации данных.

Наметившиеся тенденции к увеличению размерности регистрируемой информации (в частности, появление многозональной аэрокосмической съемки) и возникающие при этом проблемы совместной обработки данных делают актуальной задачу синтеза линейных моделей многомерных наблюдений, описываемых случайными векторными полями [1–4]. В связи с этим в настоящей статье рассматривается достаточно общая задача представления векторных полей векторного аргумента, нахождения соответствующего базиса Карунена–Лоэва по экспериментальным данным, предлагается итеративный алгоритм приближенного решения указанной задачи. Будем полагать, что случайное (для простоты и без потери общности – центрированное) векторное поле  $\xi(\mathbf{u}) = (\xi^1(\mathbf{u}), \dots, \xi^s(\mathbf{u}))^T$  векторного аргумента  $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^v)^T$  ( $s, v$  – соответственно размерность функции  $\xi(\cdot)$  и размерность аргумента  $\mathbf{u}$ ;  $T$  – знак транспонирования) представлено в области определения

$$D = \{\mathbf{u} : u_a^i \leq u^i \leq u_b^i, i = 1, \dots, v\}$$

совокупностью  $N$  реализаций  $\xi_1(\mathbf{u}), \dots, \xi_N(\mathbf{u})$ .

Представим векторное поле следующим, не единственным образом:

$$\xi(\mathbf{u}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k X^i \Phi_i(\mathbf{u}), \quad (1)$$

где предел понимается в смысле сходимости по норме в пространстве реализаций случайного вектора поля;  $\{\Phi_i(\mathbf{u})\}_k$  – векторные базисные функции векторного аргумента. Случайные коэффициенты  $\{X^i\}_k$  определяются из условия минимума среднеквадратического с весом отклонения

$$\varepsilon_k^2 = M \left\| \left( \xi(\mathbf{u}) - \sum_{i=1}^k X^i \Phi_i(\mathbf{u}) \right) \right\|^2. \quad (2)$$

Здесь  $M$  – знак оператора математического ожидания;  $\|\cdot\|$  – евклидова норма в пространстве наблюдений.

Если на базисные функции  $\{\Phi_i(\mathbf{u})\}_k$  наложить условия ортонормированности

$$(\Phi_i, \Phi_j)_\phi = \int_D \Phi_i^T(\mathbf{u}) \Phi_j(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \delta_{ij}, \quad (3)$$

где  $\delta_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, k$ ) – символ Кронекера;  $d\mathbf{u} = du^1 \times \dots \times du^v$ , а  $(\cdot, \cdot)_\phi$  – знак скалярного с весом произведения, то коэффициенты представления  $\{X^i\}_k$ , минимизирующие (2), будут иметь вид

$$X^i = (\xi, \Phi_i)_\phi = \int_D \xi^T(\mathbf{u}) \Phi_i(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (4)$$

Существование предела в (1) и полной ортонормированной последовательности базисных функций  $\{\Phi_i(\mathbf{u})\}_\infty$  обеспечивается рассмотрением лишь процессов  $\xi(\mathbf{u})$ , удовлетворяющих следующему условию: для каждого фиксированного набора значений компонент вектора  $\mathbf{u} \in D$   $M[\xi^T(\mathbf{u})\xi(\mathbf{u})] < \infty$ . Базисные функции  $\{\Phi_i(\mathbf{u})\}_k$  можно также найти из

\* Константин Тихонович Протасов (prot@iao.ru); Константин Константинович Протасов (prot@iao.ru).

условий минимума среднеквадратического критерия качества (2) аппроксимации векторного поля  $\xi(\mathbf{u})$  отрезком ряда (1) из  $k$  членов.

Решение указанной вариационной задачи на условный, в смысле ограничений (3), вводимых в функционал (2) с помощью множителей Лагранжа, экстремум приводит к однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода [4]:

$$\int_D M[\xi(\mathbf{u})\xi^T(\mathbf{v})]\Phi(\mathbf{v})d\mathbf{v} = \lambda\Phi(\mathbf{u}), \quad (5)$$

где  $\lambda$  – множитель Лагранжа, а индекс базисных функций и  $\lambda$  ввиду эквивалентности всех уравнений опущены.

Искомый базис  $\{\Phi_i(\mathbf{u})\}_k$ , соответствующий  $k$  наибольшим собственным значениям  $\{\lambda_i\}_k$ , находится решением уравнения (5), однако в общем случае это не простая задача.

Имея в распоряжении совокупность реализаций  $\xi_1(\mathbf{u}), \dots, \xi_N(\mathbf{u})$  объема  $N$ , «достаточно полно» характеризующих генеральную совокупность всех реализаций, порождаемых случайным полем  $\xi(\mathbf{u})$ , естественно воспользоваться следующей выборочной оценкой корреляционной функции:

$$M[\xi(\mathbf{u})\xi^T(\mathbf{v})] \cong \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j(\mathbf{u})\xi_j^T(\mathbf{v}). \quad (6)$$

В этом случае задача (2) существенно упрощается [случай вырожденного ядра в (5)]. Действительно, подставляя (6) в интегральное уравнение (5), получим

$$\int_D \sum_{j=1}^N \xi_j(\mathbf{u})\xi_j^T(\mathbf{v})\Phi(\mathbf{v})d\mathbf{v} = \Delta\Phi(\mathbf{u}), \quad (7)$$

где  $\Delta = N\hat{\lambda}$ , а  $\hat{\lambda}$ ,  $\Phi(\mathbf{u})$  – оценки соответствующих  $\lambda$ ,  $\Phi(\mathbf{u})$ .

Введем следующие обозначения:

$$\int_D \xi_j^T(\mathbf{v})\Phi(\mathbf{v})d\mathbf{v} = c^j, \quad j = 1, \dots, N,$$

тогда из (7) получим выражение для базисных функций

$$\Phi(\mathbf{u}) = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^N c^j \xi_j(\mathbf{u}), \quad (8)$$

где коэффициенты  $\{c^j\}_N$  пока не определены. Подставив параметризованное выражение (8) базисной функции  $\Phi(\mathbf{u})$  в уравнение (7), получим равенство

$$\frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^N \xi_j(\mathbf{u}) \sum_{i=1}^N c^i \int_D \xi_j^T(\mathbf{v})\xi_i(\mathbf{v})d\mathbf{v} = \sum_{j=1}^N c^j \xi_j(\mathbf{u}). \quad (9)$$

Вычислим в этом выражении скалярное произведение

$$(\xi_j, \xi_i)_\Phi = \left( \iint_D \xi_j^T(\mathbf{u})\xi_i(\mathbf{u})d\mathbf{u} \right)$$

по реализациям случайного поля  $\xi_1(\mathbf{u}), \dots, \xi_N(\mathbf{u})$ , обозначив его  $a_{ji}$ , тогда (9) примет вид

$$\sum_{j=1}^N \xi_j(\mathbf{u}) \left\{ \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^N c^i a_{ji} - c^j \right\} = 0. \quad (10)$$

В силу линейной независимости реализаций случайного поля в вероятностном смысле и в силу свойства линейно независимых элементов пространства со скалярным произведением, равенство (10) имеет место при условии

$$\frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^N c^i a_{ji} - c^j = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (11)$$

С использованием матричной записи (11) будет иметь следующий вид:

$$(a_{ji})\mathbf{c} = \Delta\mathbf{c}, \quad (12)$$

где  $\mathbf{c} = (c^1, \dots, c^N)^T$ ;  $(a_{ji})$  – матрица  $N \times N$  Грама;  $\Delta = (\Delta^i \delta_{ij})$ .

Таким образом, определив структуру базисных функций в виде линейной комбинации реализаций случайного процесса, коэффициенты этих линейных комбинаций получим в результате решения полной проблемы собственных значений для положительно определенной матрицы Грама  $(a_{ji})$  – порядка  $N$ , а это уже практически реализуемая задача с помощью численных методов алгебры.

Нетрудно проверить, подставив выражение (8) в (3), что для нормировки функций  $\{\Phi(\mathbf{u})\}_k$  с учетом полученных значений  $\{c^i\}_N$  в формуле для базисных функций (8) нужно произвести замену  $\Delta$  на  $\sqrt{\Delta}$ .

## Этапы построения байесова решающего правила распознавания гиперспектральных изображений

1) Получим обучающие выборки всех  $C$  классов:

$$\xi_1^1(t), \dots, \xi_{N_1}^1(t), \quad 1, \quad \mu_1(t)$$

.....

$$\xi_1^C(t), \dots, \xi_{N_C}^C(t), \quad C, \quad \mu_C(t).$$

2) Оценим математическое ожидание. Центрируем обучающие выборки  $C$  классов:

$$\mu(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j(t); \quad \xi_j^0(t) = \xi_j(t) - \mu(t)$$

опустим для дальнейшего знак центрирования.

3) Построим матрицу Грама  $M \times M$ :

$$(a_{k,l}) = \left( \sum_{i=1}^m (\xi_k(i)\xi_l(i)) \right).$$

4) Обратимся к процедуре svd [5].

Получаем матрицу ортогональных преобразований  $U = c(j, i)$ ,  $N \times N$  и матрицу собственных значений  $S = (\lambda_i)$ .



$$\xi(\mathbf{u}) \cong \sum_{j=1}^k X^j \varphi_j(\mathbf{u}), \quad (15)$$

где  $\{X^j\}_k$  – набор случайных чисел, определяемых по формуле

$$X^j = (\xi, \varphi_j), \quad j = 1, \dots, k. \quad (16)$$

Точность аппроксимации в выражении (15) определяется (практически используются оценки  $M[\cdot]$  по той же выборке) следующим образом:

$$\varepsilon_k^2 = M[\xi, \xi] - \sum_{j=1}^k \lambda_j, \quad (17)$$

где  $\lambda_j$  упорядочены по убыванию ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$ ) в силу построения и максимально, насколько это позволяет набор  $\{\xi_j(\mathbf{u})\}_N$ , «исчерпывают» среднеквадратическую ошибку  $\varepsilon_k^2$  аппроксимации ансамбля  $\{\xi(\mathbf{u})\}$  линейным многообразием из  $G_k$ . Как известно, оптимальный в среднеквадратическом смысле базис  $\{\Phi_j(\mathbf{u})\}_k$  с соответствующим спектром собственных значений  $\{\lambda_j\}_k$  разложения Карунена–Лоэва находится оптимизацией критерия (17) по  $\{\varphi_j(\mathbf{u})\}$  с учетом ортонормированности последних. К тому же базису  $\{\Phi_j(\mathbf{u})\}_k$  приводит задача последовательной максимизации положительно определенной квадратичной формы (14) на сфере единичного радиуса в подпространствах, ортогональных функциям  $\{\varphi_j(\mathbf{u})\}_k$ , получаемым процедурой (13),  $j = 1, \dots, k$ ,  $\Phi_0 \equiv 0$ . Последнее обстоятельство указывает на то, что ПСК – базис  $\{\varphi_j(\mathbf{u})\}_k$ , получаемый алгоритмом (13), (14), асимптотически с ростом  $N$  становится базисом Карунена–Лоэва при некоторых предположениях относительно ансамбля  $\{\xi(\mathbf{u})\}$ .

Действительно, фактически рассматриваемый алгоритм основан на стохастических принципах поиска экстремума лишь с той особенностью, что «пробными» функциями в данном случае являются элементы обучающей выборки. Поэтому для сходимости процедуры поиска необходимо, чтобы функция распределения выборочных значений была положительной в «направлении» искомых решений. Если этот факт априорно не установлен, то о качестве полученного решения можно судить по величине оценки ошибки аппроксимации (17):

$$\tilde{\varepsilon}_k^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left[ (\xi_j, \xi_j) - \sum_{i=1}^k (\xi_j, \varphi_i)^2 \right].$$

Следует заметить, что алгоритмы, полученные для непрерывных полей, справедливы для полей, заданных отдельными отсчетами в дискретной регулярной или стохастической (но фиксированной) сети наблюдений, однако в этих случаях интегри-

рование заменяется соответствующим суммированием по множеству точек, в которых регистрируют реализации поля. Несложно выполнить и другие модификации алгоритмов, связанные с представлением полей в области  $D$  с переменными границами, скользящими границами или выделить в линейной модели (1) временную переменную в виде

$$\xi(\mathbf{u}, t) = \sum_{i=1}^k X^i(t) \Phi_i(\mathbf{u}).$$

Для иллюстрации предложенного алгоритма из литературных источников были взяты спектральные характеристики древостоев (рис. 1, цв. вклейка). Этими характеристиками были раскрашены древостой участка массива леса, который подвергся распознаванию. Результат распознавания представлен на рис. 2 (цв. вклейка).

## Оценка качества

Для оценки качества распознавания было проведено сравнение результатов работы описанного алгоритма и нейросетевых алгоритмов с использованием двух программ – «SNN» и «NeuroPro». Результаты работы алгоритмов выглядят следующим образом.

Качество распознавания (средняя ошибка):

- разработанный алгоритм: 95% правильно соотнесенных данных,
  - NeuroPro: 87% правильно решенных примеров,
  - SNN: 79% правильно решенных примеров.
- Время распознавания:
- разработанный алгоритм: 4 мин 57 с,
  - NeuroPro: 7 мин 32 с,
  - SNN: 35 мин 14 с.

1. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. 1. Теория обнаружения, оценок и линейной модуляции / Пер. с англ. М.: Сов радио, 1972. 744 с.
2. Протасов К.К. Алгоритм распознавания образов по данным гиперспектральной съемки // Тезисы докл. II Междунар. конф. «Геоинформатика: технологии, научные проекты»: Барнаул: Изд-во ОАО «А.Р.Т.», 2010. С. 80.
3. Протасов К.К. Непараметрический алгоритм распознавания объектов по наблюдениям из космоса // Инноватика-2011: Сб. материалов VII Всерос. научно-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых с элементами научной школы / Под ред. А.Н. Солдатова, С.Л. Минькова. Томск: Томское университетское изд-во, 2011. Т. 2. С. 92–97.
4. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу / Пер. с фр. М.: Мир, 1979. 580 с.
5. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений / Пер. с англ. Х.Д. Икрамова. М.: Мир, 1980. 280 с.

*K.T. Protasov, K.K. Protasov. Algorithm of pattern recognition from the data of hyperspectral imaging.*

The Bayes decision rule for recognition of hyperspectral aerospace data is obtained. An example of recognition of forest stand types is given.

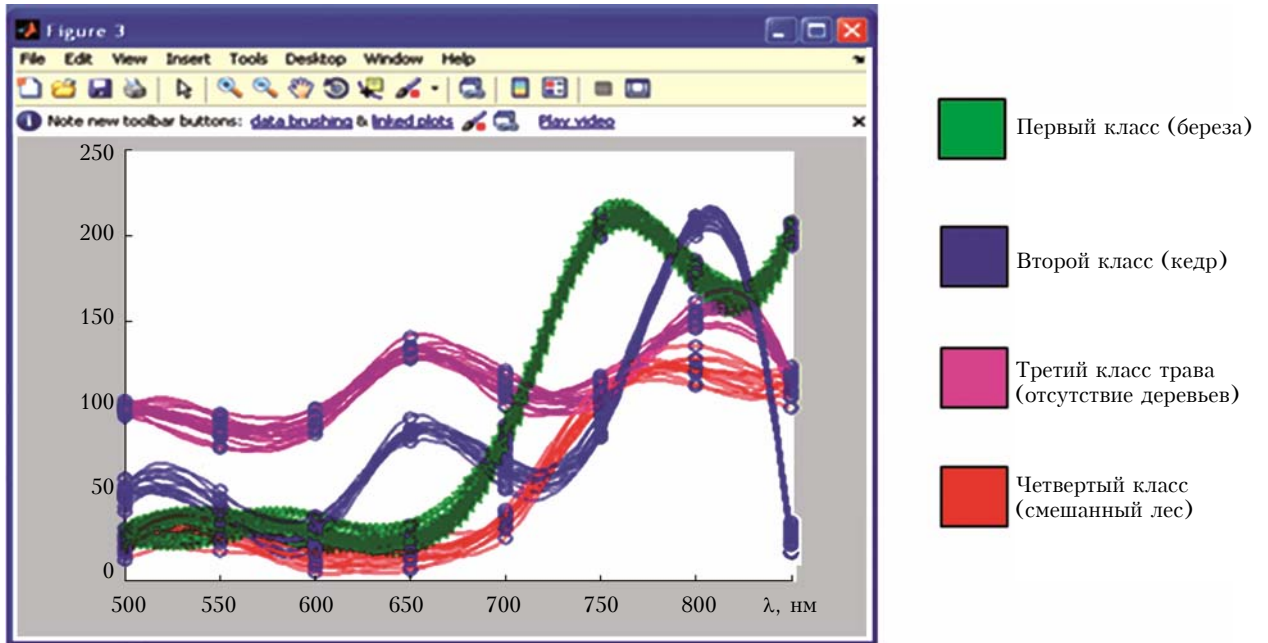


Рис. 1. Спектральные портреты древостоев: первый класс – береза, второй класс – кедр, третьим классом является трава (отсутствие деревьев), четвертый класс – «смешанный лес»

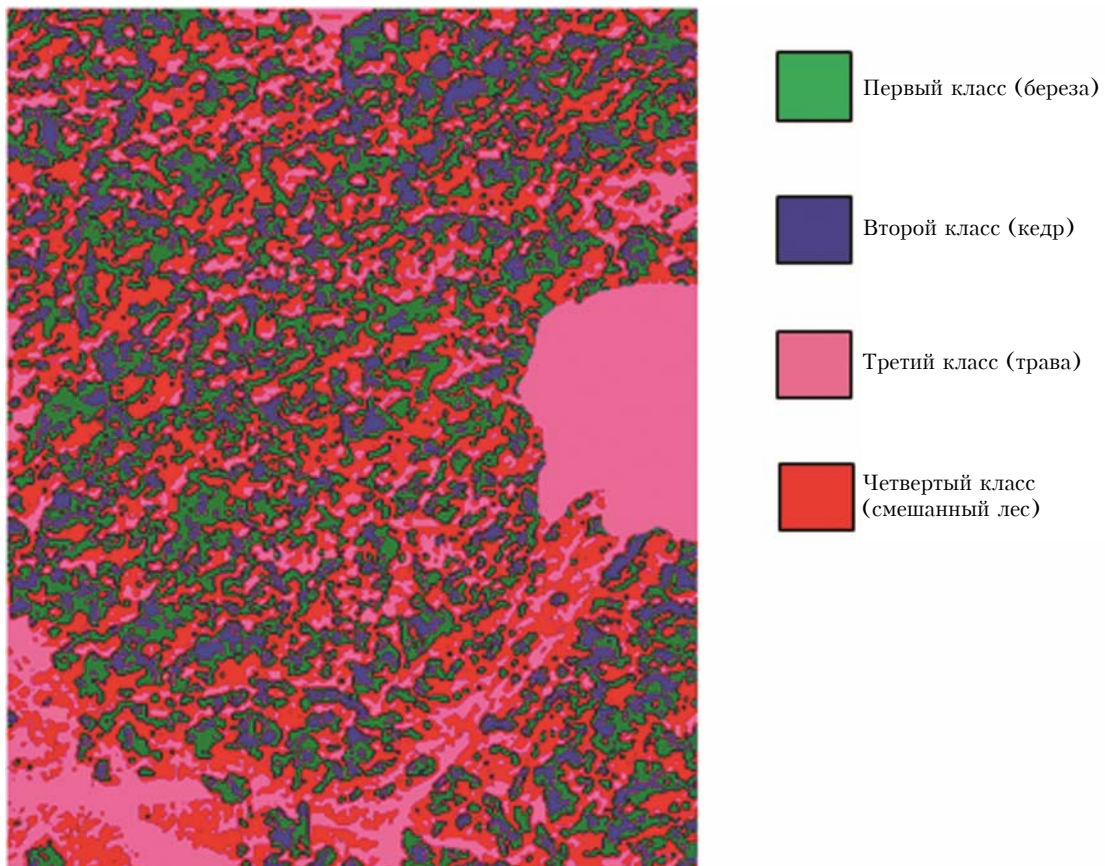


Рис. 2. Результат распознавания классов древостоев