<Оптика атмосферы и океана>, **6**, N 7 (1993)

УДК 539.1.12

С.В. Пранц

НЕЙТРИННЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Предлагается алгебраический формализм описания нейтринных осцилляций в неоднородных средах, когда традиционные подходы, основанные на теории возмущений, оказываются малопригодными.

Получены точные решения соответствующих уравнений для моделей изменения плотности среды, реализуемых на Солнце и на Земле.

1. Введение

Новый взгляд на физику когерентных процессов (типа индукции, лавины и эха) взаимодействия излучения с веществом был предложен У.Х. Копвиллемом в середине 60-х годов. Достигнутый к тому времени успех в классификации элементарных частиц (адронов) по схеме $SU(3)$-симметрии привел его к мысли классифицировать различные явления эха на основе лежащих в их природе глубоких свойств симметрии, которые <зашифрованы> в гамильтониане процесса, а именно в порождаемой им динамической алгебре Ли. По существу, предложение заключалось в том, чтобы теоретически описывать и экспериментально искать эффекты эха для различных физических реализаций алгебр Ли [1, 2]. Математическую форму и физическое содержание эта идея приобрела в работах [3–5] и монографии [6].

<Алгебраизация> в современной физике играет фундаментальную роль и используется для изучения различных объектов природы. Под <алгебраизацией> подразумевается скорее принцип изучения, а не метод получения конкретных результатов. В зависимости от поставленных целей методы существенно разнятся, но в основе их всегда лежит использование тех или иных свойств алгебраической структуры. В настоящей статье мы применяем Ли-алгебраический метод [7, 8] для исследования нестационарного процесса нейтринных осцилляций в неоднородных средах.

Имеющиеся экспериментальные и теоретические основания наличия массы у нейтрино (кварк-лептонная симметрия, теории великого объединения и др.) позволяют ввести гипотезу смешивания нейтрино [9], в рамках которой нейтринные состояния с определенными ароматами являются суперпозициями состояний с определенными массами. Это свойство во многом аналогично явлениям смешивания K^0 и K мезонов и смешивания кварков и вызвано некоторым новым взаимодействием, приводящим к осцилляциям аромата нейтрино (т.е. к переходам типа $\nu_e - \nu_\mu$, $\nu_e - \nu_\tau$ и т.п.), а значит, и к явному несохранению лептонного заряда. Столь фундаментальные следствия гипотезы нейтринного смешивания – ненулевая масса и несохранение лептонного заряда – обостряют интерес к поискам $\nu - \nu$-осцилляций в пучках реакторных и солнечных нейтрино.

Здесь мы рассматриваем $\nu - \nu$-осцилляции в формализме динамических симметрий, позволяющем естественным образом учесть влияние среды, плотность которой меняется по пути распространения пучка нейтрино, эффекты поглощения в ней и наличие произвольного числа различных типов нейтрино, а также возможность переходов в магнитном поле с одновременным изменением аромата и спиральности. Если ограничиться случаем осцилляций в системе нейтрино двух типов, а именно $\nu_e - \nu_\mu$, $\nu - \bar{\nu}$, $\nu_{eL} - \nu_{\mu R}$, $\nu_L - \bar{\nu}_R$, то группой динамической симметрии такого процесса является $SU(2)$. При наличии N типов нейтрино общей группой симметрии является $SU(N)$, но во многих практически важных случаях симметрию удается понизить до $SU(2)$, $SO(3)$, $SO(3, 1)$, $SO(4)$ и других групп со сравнительно малым числом параметров.

Развитый автором алгебраический метод исследования нестационарных квантовых процессов [10] позволяет находить точные решения динамических задач в тех случаях, когда другие методы мало эффективны. В частности, это возможно в тех случаях, когда трудно применить теорию возмущений, а также в случае быстрых и нерегулярных изменений параметров поля (амплитуды, частоты и фазы) в физике магнитного и оптического резонансов или плотности среды в явлении нейтринных осцилляций. Данный подход используется в этой работе не только как новый формализм описания нейтринных осцилляций, но и как способ получения новых решений этой задачи для реальных моделей изменения плотности в неоднородных средах.

Нетрудно в явном виде показать, как из гипотезы смешивания следует возможность возникновения нейтринных осцилляций в вакууме. Разложим произвольное нейтринное состояние по собственным состояниям слабых взаимодействий с определенными импульсами p_ν

$$|\nu\rangle = \sum_\xi \Psi_\xi |\nu_\xi\rangle , \tag{1}$$

здесь индекс ξ фиксирует аромат, $\xi = e, \mu, \tau, \ldots$.

Составим из векторов $|\nu_\xi\rangle$ такие линейные комбинации, отмеченные латинскими индексами, которые удовлетворяют следующему уравнению на собственные значения:

$$H|\nu_j\rangle \equiv (H_0 + H_{\text{см}})|\nu_j\rangle = E_j|\nu_j\rangle , \; j = 1, 2, 3, \ldots . \tag{2}$$

К стандартному гамильтониану H_0, диагональному в базисе ароматов,

$$\langle\nu_\xi|H_0|\nu_\xi\rangle = P_\nu , \quad \langle\nu_\xi|H_0|\nu_\eta\rangle = 0 , \tag{3}$$

добавлен член $H_{\text{см}}$, ответственный за смешивание нейтрино разных типов. Векторы с латинскими индексами характеризуют состояния с определенными массами. Переход из базиса ароматов в энергетический базис задается некоторым унитарным преобразованием

$$|\nu_\xi\rangle = \sum_j S_{\xi j}|\nu_j\rangle , \quad S_{\xi j} \equiv \langle\nu_j|\nu_\xi\rangle . \tag{4}$$

С помощью решения временного уравнения Шредингера со стационарным гамильтонианом $H_0 + H_{\text{см}}$ вычисляется вероятность осцилляционного перехода нейтрино типа ξ при $t = 0$ в нейтрино типа η к моменту времени t

$$P(\nu_\eta; t|\nu_\xi; 0) = |\langle\nu_\eta|\exp[-it(H_0 + H_{\text{см}})]|\nu_\xi\rangle|^2 = |\sum_j S_{\xi j}[\exp(-itE_j)]S^+_{j\eta}|^2 =$$

$$= \sum_j |\langle\nu_j|\nu_\xi\rangle|^2 |\langle\nu_\eta|\nu_j\rangle|^2 + 2\mathrm{Re}\sum_{j\neq k}\langle\nu_\eta|\nu_j\rangle\langle\nu_\eta|\nu_k\rangle^*\langle\nu_j|\nu_\xi\rangle\langle\nu_k|\nu_\xi\rangle^* \exp[i(E_k - E_j)t] . \tag{5}$$

Второй член в последнем выражении отвечает за искомые осцилляции нейтрино в вакууме. Они возможны, если в показателе экспоненты $E_k \neq E_j$ хотя бы для одной пары уровней j, k, и если амплитудный коэффициент при экспоненте не обращается в нуль хотя бы для одной пары j, k и ξ, η. Таким образом, для возникновения нейтринных осцилляций в вакууме требуется выполнение двух условий:

1) наличие ненулевой массы у нейтрино хотя бы одного типа, т.е.

$$\langle\nu_\xi|H_{\text{см}}|\nu_\xi\rangle > 0 , \tag{6}$$

2) смешивание хотя бы одной пары нейтрино разных типов, т.е.

$$\langle\nu_\xi|H_{\text{см}}|\nu_\eta\rangle \neq 0 , \; \xi \neq \eta . \tag{7}$$

2. Общие свойства осцилляций нейтрино двух типов в среде

В веществе нейтрино благодаря слабому взаимодействию испытывают упругое рассеяние вперед на электронах и ядрах, причем амплитуда рассеяния неодинакова для нейтрино разных типов. Так, электронное нейтрино имеет дополнительную амплитуду упругого рассеяния на электродах среды вследствие заряженных токов (по сравнению с одинаковой для нейтрино всех типов амплитудой рассеяния на всех мишенях вследствие нейтральных токов). Учет взаимодействия нейтрино с частицами вещества приводит к появлению в гамильтониане нового члена $H_{вз}$, который уже не стационарен при движении в неоднородной среде. Поскольку мы работаем в системе единиц с $\hbar = c = 1$, то $r \simeq t$, и, следовательно, полный гамильтониан становится явной функцией времени

$$\mathcal{H}(t) \equiv H_0 + H_{см} + H_{вз} , \tag{8}$$

причем его зависимость от времени однозначно определяется изменением плотности среды по пути распределения в ней пучка нейтрино. Временное уравнение Шредингера с гамильтонианом (8) даже в простейшем случае нейтрино двух типов не решается точно (в терминах известных специальных функций) при произвольном характере изменения плотности среды $\rho(r)$. В этой статье мы с помощью метода динамических симметрий находим классы точных решений этой проблемы для различных законов, моделирующих изменение $\rho(r)$ в природных средах.

В [11] впервые было отмечено, что характер нейтринных осцилляций в однородной среде изменяется по сравнению с вакуумом благодаря взаимодействию нейтрино с заряженными токами. При этом длина осцилляций и угол смешивания в среде варьируются в зависимости от ее плотности. Затем было показано [12, 13], что в среде с переменной плотностью при прохождении нейтринного пучка через резонансные слои возможно усиление эффекта нейтринных осцилляций. Таким образом, неоднородная среда стимулирует осцилляции, выступая в роли, аналогичной той, которую играет внешнее резонансное электромагнитное поле в физике магнитного и оптического резонанса. По имеющимся оценкам значение массы m_{ν_e} лежит далеко за пределами чувствительности лабораторных экспериментов, и поэтому обнаружение резонансных осцилляций нейтрино в неоднородных средах предоставляет уникальную возможность измерения m_{ν_e}.

Временное уравнение Шредингера для нейтрино двух типов с учетом влияния материи рассматривалось в работах [11–13] для различных режимов осцилляций. В базисе ароматов оно имеет вид

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\Psi_e\\ \Psi_\mu\end{pmatrix} = -\,i\begin{pmatrix} h_e(t) & \bar{h} \\ \bar{h} & h_\mu(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_e\\ \Psi_\mu\end{pmatrix} . \tag{9}$$

Если опустить члены, обусловленные нейтральными токами и вносящие одинаковый вклад в волновые функции, то матричные элементы гамильтониана равны [12]

$$h \equiv h_e(t) - h_\mu(t) = \frac{2\pi}{l_\nu}\left(\cos 2\Theta - \frac{l_\nu}{l_0}\right), \;\; \bar{h} = \frac{\pi}{l_\nu}\sin 2\Theta , \tag{10}$$

где Θ – угол смешивания в вакууме; $|l_\nu| \equiv 4\pi\rho/\Delta m^2$ – длина осцилляций в вакууме; $\Delta m^2 \equiv m_1^2 - m_2^2$. Характерная длина для среды имеет вид

$$l_0^{-1} \equiv \frac{\rho}{2\pi m_N p}\sum_k (f_{ek} - f_{\mu k})\, n_k , \tag{11}$$

где $f_{\xi k}$ – амплитуда рассеяния вперед на нулевой угол нейтрино типа ν_ξ на k-й компоненте вещества, $\xi = e, \mu$; $k = e, p, n$; n_k – число частиц k-й компоненты, приходящихся на один нуклон с массой m_N. Обычно ищется решение уравнения для вероятности осцилляционного перехода ν_e при $t = 0$ в ν_e в точке $r \simeq t$, которое выводится из (9) и имеет вид

$$\dddot{p} - \frac{\dot{h}}{h}\ddot{p} + (h^2 + 4\,\bar{h}^2)\dot{p} - 2\frac{\dot{h}}{h}\bar{h}^2\,(2p - 1) = 0 , \tag{12}$$

где $p(0) = 1$, $\dot{p}(0) = 0$, $\ddot{p}(0) = -2\,\bar{h}^2$, т.е. в источнике рождается ν_e.

Для среды с постоянной плотностью ($\dot{h} = 0$) решение (12) имеет простой вид [11]

$$p = 1 - A\sin^2(\pi r / l_m) , \tag{13}$$

где A определяет глубину осцилляций

$$A \equiv \sin^2 2\Theta_m = (\bar{h}\, l_m/\pi)^2 , \tag{14}$$

а l_m – длину осцилляций в среде

$$l_m^2 \equiv 4\pi^2/(h^2 + 4\bar{h}^2) . \tag{15}$$

Угол смешивания в среде Θ_m задается преобразованием (20) и его можно с помощью (10) и (15) представить в виде

$$\sin^2 2\Theta_m = \sin^2 2\Theta\, [(\cos\Theta - l_\nu/l_0)^2 + \sin^2 2\Theta]^{-1} . \tag{16}$$

Отсюда следует, что зависимость параметра смешивания в среде (16) от плотности вещества носит при малых $\sin^2 2\Theta$ резонансный характер: $l_\nu/l_0 \sim \rho p$. При

$$l_\nu/l_0 = \cos 2\Theta \tag{17}$$

(16) достигает максимума, в котором $\Theta_m = 45°$, т.е. смешивание в веществе становится максимальным. Из (17), (11) и (16) нетрудно вычислить резонансную площадь вещества [12]

$$\rho_R = m_N (\Delta m)^2 (\cos 2\Theta)(2\sqrt{2}\, G_F\, p)^{-1} \tag{18}$$

и полуширину резонанса

$$\Delta\rho_R = \rho_R \operatorname{tg} 2\Theta , \tag{19}$$

здесь G_F – константа Ферми. Таким образом, среда может усиливать смешивание и увеличивать вероятность перехода одного типа нейтрино в другой.

Альтернативная возможность описания осцилляций нейтрино в неоднородных средах связана с использованием уравнения Шредингера в базисе собственных состояний нейтрино в среде, $|\nu_{im}>$, $i = 1, 2$, который связан с базисом ароматов преобразованием

$$S \equiv \begin{pmatrix} \cos\Theta_m & \sin\Theta_m \\ -\sin\Theta_m & \cos\Theta_m \end{pmatrix}, \tag{20}$$

диагонализующим гамильтониан (9)

$$S^{-1} \mathcal{H} S = \mathcal{H}_{\text{диаг}} . \tag{21}$$

Уравнение Шредингера приобретает вид [13]

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \Psi_{1m} \\ \Psi_{2m} \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} h_1 & -i\dot{\Theta}_m \\ i\dot{\Theta}_m & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{1m} \\ \Psi_{2m} \end{pmatrix}, \tag{22}$$

в котором диагональные элементы находятся с помощью (10), (11)

$$h_{1,2} = \frac{1}{2}\, [h_e + h_\mu \mp (h^2 + 4 h^{-2})^{1/2}] . \tag{23}$$

В неоднородной среде угол Θ_m нестационарен, что приводит к изменению аромата собственных состояний $|\nu_{im}>$. Выражение для Θ_m как функции ρ имеет вид [13]

$$\frac{d}{dt}\Theta_m = \frac{1}{2\rho_R}\frac{\text{tg}2\Theta}{(1-\rho/\rho_R)^2+\text{tg}^2 2\Theta}\frac{d\rho}{dt}\,. \tag{24}$$

Таким образом, возможности получения решений (9) или (22) существенным образом зависят от вида функции изменения плотности среды с расстоянием. В литературе подробно исследован адиабатический режим изменения плотности [13]. Он определяется условием

$$|\dot{\Theta}_m| \ll |h_{1,2}| = 2\pi/l_m\,, \tag{25}$$

при котором недиагональными элементами в матрице (22) можно пренебречь. Целью настоящей работы является получение точных решений уравнений типа (9) и (22) (в том числе и более чем для двух типов нейтрино) для моделей изменения плотности среды, реализуемых на Солнце и на Земле. Точные результаты позволяют находить условия полного превращения нейтрино одного типа в другой, и их область применимости не ограничена критериями адиабатичности или, наоборот, скачкообразного изменения плотности.

3. Алгебраический формализм

В этом разделе излагается алгебраический формализм динамических симметрий [10] применительно к теории нейтринных осцилляций в среде. Уравнение Шредингера для N типов нейтрино запишем в общем виде

$$i\frac{d}{dt}\Psi(t) = \mathcal{H}(t)\Psi(t)\,, \tag{26}$$

где $\Psi(t)$ – N-мерный вектор амплитуд вероятностей переходов, который задан в базисе ароматов или собственных состояний в среде. Алгебраический метод решения (26) основан на разложении гамильтониана

$$\mathcal{H}(t) = \sum_{j=1}^{n} h_j(t)\hat{H}_j\,, \tag{27}$$

по базису $\{H_j, j = 1, ..., n\}$ некоторого представления динамической n-мерной алгебры Ли L_n с коэффициентами $h_j(t)$ и на соответствующей параметризации оператора эволюции

$$U(t, 0) = \Psi(t)\,[\Psi(0)]^{-1}\,, \tag{28}$$

удовлетворяющего уравнению

$$\frac{d}{dt}U = \mathcal{H}(t)\,U\,, \quad U(0, 0) = \mathrm{I}\,. \tag{29}$$

Возможны различные способы параметризации

$$U = F\{\exp\,[g_j(t)\,\hat{H}_j]\}\,, \tag{30}$$

где $F\{...\}$ задает аддитивную, мультипликативную или комбинированную форму от экспоненциалов генераторов L_n [10]. Оператор эволюции находится в явном виде после решения системы n нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка для групповых параметров g

$$h_j(t) = M_{ij}(g_i, g_j)\frac{d}{dt}g_j\,, \quad i, j = 1, ..., n\,. \tag{31}$$

Вид системы (31) зависит от структуры динамической алгебры L_n, коэффициентов разложения $h_j(t)$ и от способа параметризации (30). В статьях [14–16] и диссертации [10] разработаны алгоритмы решения линейного эволюционного уравнения (29) для основных типов динамических симметрий.

Группа $SU(2)$ содержит всю информацию о динамике осцилляций нейтрино двух типов в неоднородных средах, а при определенных условиях – и о динамике N-нейтринных осцилляций. В этом случае гамильтониан разлагается по базису, вообще говоря, N-мерного представления $SU(2)$

$$\mathcal{H}(t) = h_0(t)R_0 + h_-(t)R_- + h_+(t)R_+ \tag{32}$$

с генераторами, удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$[R_+, R_-] = 2R_0, \quad [R_0, R_\pm] = R_\pm . \tag{33}$$

Тогда для мультипликативной параметризации $SU(2)$

$$U = \exp g_0 R_0 \exp g_- R_- \exp g_+ R_+ \tag{34}$$

система уравнений (31) приводится к единственному уравнению для $g = \exp(g_0/2)$ [14]

$$\ddot{g} - \frac{\dot{h}_+}{h_+}\dot{g} + \frac{1}{2}\left[-\dot{h}_0 + h_0\frac{\dot{h}_+}{h_+} - \frac{1}{2}(4h_- h_+ + h_0^2)\right]g = 0 . \tag{35}$$

Групповые параметры $SU(2)$ связаны друг с другом соотношениями [16]

$$g_- = \frac{\dot{g}_0 - h_0}{2h_+}\exp g_0 ; \quad g_+ = \int_0^t h_+ \exp(-g_0)\, dt' , \tag{36}$$

и удовлетворяют начальным условиям

$$g_0(0) = g_\pm(0) = 0 ; \quad \dot{g}_0(0) = h_0(0) , \quad \dot{g}_\pm(0) = h_\pm(0) .$$

Основное уравнение (35) можно упростить, перейдя во вращающуюся систему координат согласно

$$U(t,0) = \exp\left[-iR_0\int_0^t h_0(t')\, dt'\right]\tilde{U}(t,0) . \tag{37}$$

Тогда оператор $\tilde{U}$ удовлетворяет (29) с гамильтонианом

$$\tilde{\mathcal{H}}(t) = h_- R_- \exp\left[-i\int_0^t h_0(t')dt'\right] + h_+ R_+ \exp\left[i\int_0^t h_0(t')\, dt'\right], \tag{38}$$

и в параметризации, аналогичной (34), получим для величины $x = \exp(\tilde{g}_0/2)$ уравнение

$$\ddot{x} - \left(\frac{\dot{h}_+}{h_+} + ih_0\right)\dot{x} - h_- h_+ x = 0 \tag{39}$$

с соответствующими начальными условиями.

Для нахождения возможно более широких классов точных решений эволюционной задачи вводится новая переменная $z(t)$, и (35) и (39) приводятся к виду удобному для сравнения со стандартными линейными дифференциальными уравнениями второго порядка [14–16]. Например, (35) преобразуется к виду

$$g'' + \frac{g'}{\dot{z}}\frac{d}{dt}\ln\left(-\frac{\dot{z}}{2h_+}\right) - \frac{g}{2(\dot{z})^2}\left[h_+\frac{d}{dt}\frac{h_0}{h_+} + \frac{1}{2}(4h_- h_+ + h_0^2)\right] = 0 , \tag{40}$$

где штрих фиксирует дифференцирование по z. Сравнивая (40) или (39) с уравнениями математической физики (Бесселя, Лежандра, Вебера, Уиттекера, гипергеометрическими и другими), находим классы точных решений для параметров эволюции $g_{0,\pm}(t)$ и классы функций $h_0(t)$ и (или) $h_\pm(t)$, для которых эти решения справедливы.

Предложенный выше формализм описания нейтринных осцилляций привлекателен по ряду причин. В его рамках эволюция квантовой системы описывается настолько общо, насколько это позволяют законы квантовой механики. Решение эволюционной задачи не зависит от размерности представления динамической группы Ли и от вида реализации ее генераторов. Не возникает ограничений, связанных со строгой периодичностью или адиабатичностью изменения коэффициентов $h(t)$. Не используются критерии справедливости теории возмущений.

4. *SU*(2) эволюция нейтрино в неоднородных средах

Даже если ограничиться двумя типами нейтрино, скажем, электронным и мюонным, то из системы уравнений Шредингера (9) следует уравнение второго порядка для амплитуды вероятности

$$i\ddot{\Psi}_e - (h_e + h_\mu)\dot{\Psi}_e - \left[\dot{h}_e - i h_e^2 - i\bar{h}^2 + i(h_e + h_\mu)h_e\right]\Psi_e = 0\,,$$

которое по форме гораздо сложнее уравнения (40) для параметра эволюции в алгебраическом формализме.

Для $N = 2$ мы имеем дело с двумерным представлением $SU(2)$ с генераторами в сферическом базисе

$$R_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad R_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad R_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{41}$$

и матрицей гамильтониана (9)

$$\mathcal{H} = -i(h_e - h_\mu)R_0 - i\bar{h}R_- - i\bar{h}R_+ - i(h_e + h_\mu)\,\mathrm{I}_2\,. \tag{42}$$

Единичная матрица I_2, коммутирующая со всеми базисными, дает вклад в оператор эволюции в виде экспоненциального множителя $\exp\,[i\,(h_e + h_\mu)\,t]$. В результате получаем гамильтониан в виде (32) с коэффициентами

$$h_0(t) \equiv -ih(t)\,,\quad h_+ = h_- \equiv -i\bar{h} = \mathrm{const}\,. \tag{43}$$

Используя преобразование (37), получим простое уравнение для параметра эволюции

$$\ddot{x} - h(t)\dot{x} + \bar{h}^2 x = 0\,, \tag{44}$$

решение которого определяет динамику осцилляций нейтрино двух типов согласно (34), (36), (37). Из уравнений (10) и (11) следует, что коэффициент h пропорционален плотности среды $\rho(r)$. Вид уравнения (44) удобен для поиска таких законов изменения плотности среды по пути распространения нейтринного пучка, при которых задача допускает точные решения в терминах элементарных или специальных функций.

1). Линейный закон изменения плотности среды ($t = r$, $c = 1$)

$$h(t) = at + b\,, \tag{45}$$

где a, b – произвольные числа. В данном случае с помощью простой замены $at + b = \tau$ уравнение (44) с переменным коэффициентом (45) сводится к уравнению

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - \frac{\tau}{a}\frac{dx}{d\tau} + \left(\frac{\bar{h}}{a}\right)^2 x = 0 \tag{46}$$

с решением в терминах функции Уиттекера ([17], уравнения (2. 273. 10)).

2). Экспоненциальный закон изменения плотности среды

$$h(t) = a \exp b\,t + c\ , \tag{47}$$

a, b, c – произвольные числа. Подстановка

$$x = y \exp\left[\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} (a\,e^{bt'} + c)\,dt'\right]$$

приводит уравнение (44) с функцией (47) к уравнению

$$\ddot{y} = \left[\frac{a^2}{4}e^{2bt} - \frac{a}{2}(b - c)\,e^{bt} + \frac{c^2}{4} - \overline{h}^2\right] y\ , \tag{48}$$

которое благодаря калибровочному преобразованию $bt = \tau$ переходит в модифицированное уравнение Уиттекера ([17], уравнения (2. 273. 14)).

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = \left[\left(\frac{a}{2\,b}\right)^2 e^{2\tau} + \frac{a(c - b)}{2\,b^2}e^{\tau} + \left(\frac{c}{2\,b}\right)^2 - \left(\frac{\overline{h}}{b}\right)^2\right] y\ . \tag{49}$$

Для расширения класса функций $h(t)$, допускающих точные решения уравнения (44), введем общее преобразование независимой переменной

$$z = \int f(t)\,dt \tag{50}$$

с произвольной дифференцируемой и интегрируемой функцией времени $f(t)$. Тогда уравнение (44) преобразуется к виду

$$f^2x'' + \left(\dot{f} - hf\right) x' + \overline{h}^2 x = 0\ , \tag{51}$$

где штрихование означает дифференцирование по z. Выбирая теперь конкретный вид подстановок (50), находим такие законы изменения плотности среды $\sim h(t)$, при которых уравнение (51) преобразуется к стандартным уравнениям второго порядка с известными точными решениями. Ограничимся функциями $h(t) \sim \rho(t)$, моделирующими изменения плотности на Солнце и в Земле.

3). Изменение плотности среды по закону

$$h(t) = a\,\mathrm{th}(t - c)\ , \tag{52}$$

где a и c – произвольные числа. В качестве *анзаца* используем уравнение

$$(z^2 + 1)\,x'' + (1 - a)\,zx' + \overline{h}^2 x = 0\ , \tag{53}$$

которое эквивалентно уравнению (51) при следующих условиях:

$$f = \sqrt{z^2 + 1}\ ; \tag{54}$$

$$y\,\dot{f} - hf = (1 - a)\,z\ . \tag{55}$$

Связь переменных z и t находится из выражений (54) и (55)

$$z = \mathrm{sh}\,(t - c)\ , \tag{56}$$

здесь c выступает в роли постоянной интегрирования (50). Нетрудно убедиться, что из условия (55) с помощью (56) действительно получается закон (52). Уравнение (53), в свою очередь, с помощью подстановки $z^2 + 1 = y$ приводится к гипергеометрическому уравнению Гаусса

$$y(y - 1)\frac{d^2x}{dy^2} + [(\alpha + \beta + 1)\,y - \gamma]\frac{dx}{dy} + \alpha\beta\,x = 0 \tag{57}$$

при следующих отождествлениях:

$$2\gamma = 1 - a\,, \quad 2(\alpha + \beta) = -a\,, \quad 4\alpha\beta = \bar{h}^2\,. \tag{58}$$

Таким образом, решение исходного уравнения (44) для изменения плотности среды с расстоянием (временем) по закону (52) выражается в терминах гипергеометрической функции.

Заметим, что три рассмотренных функции $h(t)$ исчерпывают спектр нетривиальных <потенциалов>, для которых известны точные решения для амплитуд вероятности переходов в частном случае нейтрино двух ароматов при условии $h_e = -h_\mu$ (см. [13]). Развитый здесь формализм описания нейтринных осцилляций, во-первых, не ограничен случаем $N = 2$ (полученные решения без труда обобщаются и на случай $SU(2)$ динамики с произвольным числом типов нейтрино) и условием $h_e = -h_\mu$, а во-вторых, он позволяет находить точные решения и для других практически важных законов изменения плотности. Покажем это на двух примерах.

4). Изменение плотности среды по закону

$$h(t) = a\,\mathrm{cth}\,(t - c)\,. \tag{59}$$

Следующий анзац

$$(z^2 - 1)\,x'' + (1 - a)\,z\,x' + \bar{h}^2 x = 0\,, \tag{60}$$

$$f = \sqrt{z^2 - 1}\,, \quad z = \mathrm{ch}(t - c)\,, \quad 1 - z^2 = y \tag{61}$$

приводит к гипергеометрическому уравнению (57) с теми же переобозначениями (58).

5). Изменение плотности среды по закону

$$h(t) = a\,\mathrm{sech}\,(t - c)\,. \tag{62}$$

Анзац

$$(z^2 + 1)\,x'' + (z - a)\,x' + \bar{h}^2 x = 0\,, \; f = \sqrt{z^2 + 1}\,, \; z = \mathrm{sh}\,(t - c) \tag{63}$$

и подстановка $2y = 1 - iz$ приводят к гипергеометрическому уравнению ([17], уравнения (2. 249))

$$y(y - 1)\,x'' + \left[y - \frac{1}{2}(1 - ia)\right]x' + \bar{h}^2 x = 0\,, \tag{64}$$

которое приобретает стандартный вид (57) при условиях

$$i\alpha = \bar{h}\,, \quad \alpha = -\beta\,, \quad 2\gamma = 1 - ia\,. \tag{65}$$

Представленные здесь законы изменения плотности среды, для которых параметры $SU(2)$-эволюции находятся в точном виде, служат хорошими моделями изменения плотности электронов на Солнце: функции (47) и (59) для внешних слоев и функция (52) для внутренних. Моделирование изменения плотности Земли осуществляется с помощью комбинации законов (45) и (52): первый из них моделирует линейные участки функции $\rho(r)$ в Земле, а второй– ее скачкообразные изменения.

Комбинируя различные варианты <анзацного> уравнения и подстановки (50), можно получить множество законов изменения плотности среды с расстоянием, для которых решения искомого уравнения (44) для параметра $SU(2)$-эволюции могут быть найдены в точном виде. Вычислив таким образом параметр $g_0 \equiv 2\ln x$, а затем g_+, g_- по формулам (36), оператор эволюции можно представить в факторизованном виде (34) в явной форме. Все величины, необходимые для описания нейтринных осцилляций в неоднородных средах, находятся далее по стандартной схеме квантовой механики. Например, вероятность перехода мюонного нейтрино при $t = 0$ в электронное в произвольный момент времени вычисляется по формуле

$$p(\nu_e; t \,|\, \nu_\mu; 0) = |\langle\nu_e|\,\exp\,[g_0(t, 0)\,R_0]\,\exp\,[g_-(t)\,R_-]\,\exp\,[g_+(t)\,R_+]\,|\nu_\mu\rangle|^2\,. \tag{66}$$

5. Заключение

Полученные в предыдущем разделе результаты допускают обобщение на случай $N\times N$ представления группы $SU(2)$, т.е. на такие варианты смешивания и осцилляций нейтрино N типов в неоднородных средах, которые обладают этой динамической симметрией. Амплитуды нейтринных переходов, являющиеся матричными элементами $N = 2s + 1$ - мерного неприводимого представления $SU(2)$, выражаются тогда через полиномы Якоби $P^{s}_{mn}(\cos\delta)$ в параметризации углами Эйлера φ, δ и σ, которые связаны с g-параметрами следующим образом:

$$\exp(g_0/2) = \cos(\delta/2)\exp[i(\varphi+\delta)/2] ;$$

$$g_- = (i/2)\sin\delta\cdot\exp i\sigma ;$$

$$g_+ = i\,\mathrm{tg}(\delta/2)\cdot\exp(-i\sigma) ; \quad \cos\delta = 2g_-g_+ + 1 . \tag{67}$$

Другие возможности обобщения результатов раздела 4 связаны с расширением группы динамической симметрии. Например, для $N = 3$ с полной группой симметрии $SU(3)$ следует использовать регулярную процедуру нахождения поправок к $SU(2)$-оператору эволюции по степеням малого коэффициента взаимодействия [18]. Для $N = 4$ при определенных ограничениях, наложенных на коэффициенты h матрицы гамильтониана, группами симметрии являются $SO(4)$ и $SO(3,1)$. Как показано в [16], вычисление точных операторов эволюции этих групп сводится к решению двух независимых $SU(2)$-уравнений эволюции (29).

1. Копвиллем У.Х. // Изв. АН СССР. Сер. Физ. 1971. Т. 35. С. 964–966.
2. Копвиллем У.Х. Роль открытия Е.К. Завойским ЭПР в развитии физики // Парамагнитный резонанс 1944–1969. М.: Наука, 1971. С. 218–223.
3. Kopvillem U.Kh., Prants S.V. // Phys. Status Solidi. 1977. V. 83b. P. 109–114.
4. Пранц С.В. Динамика Пуанкаре и ее физические реализации. Владивосток. 1980. 31 с. (Препринт ТОИ ДВНЦ АН СССР).
5. Копвиллем У.Х., Пранц С.В. // УФЖ. 1981. Т. 26. С. 1534–1540.
6. Копвиллем У.Х., Пранц С.В. Поляризационное эхо. М.: Наука, 1985. 192с.
7. Prants S.V. // J. Phys. A. 1986. V. 19. P. 3457–3462.
8. Prants S.V. Dynamical symmetries in the theory of field-atom interactions // Quantum Mechanics and Quantum Optics.Pt. 1. N.Y. Nova Sc. 1991. P. 163–174.
9. Понтекорво Б. // ЖЭТФ. 1967. Т. 53. С. 1717–1725.
10. Пранц С.В. Динамические симметрии нестационарных квантовых процессов; Дис. д-ра физ.-мат. наук. Минск, 1992. 225 с.
11. Wolfenstain L. // Phys. Rev. D. 1978. V. 17. P. 2369–2374.
12. Михеев С.П., Смирнов А.Ю. // ЖЭТФ. 1986. Т. 91. С. 7–13.
13. Михеев С.П., Смирнов А.Ю. // УФН. 1987. Т. 153. N 1. С. 3–58.
14. Prants S.V. // Phys. Lett. A. 1990. V. 144. P. 225–228.
15. Prants S.V. // Opt. Commun. 1990. V. 78. P. 271–273.
16. Prants S.V. // J. Sov. Laser Res. 1991. V. 12. P. 165–195.
17. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
18. Пранц С.В., Якупова Л.С. // ЖЭТФ. 1990. Т. 96. С. 1140–1150.

Тихоокеанский океанологический институт
Дальневосточного отделения РАН

Поступила в редакцию
19 марта 1993 г.

S.V. Prants. **Neutrino Oscillations in the Heterogeneous Media.**

An algebraic formalism to describe the neutrino oscillations in heterogeneous media is proposed for the cases when traditional approaches based on the perturbation theory are inefficient. Exact solutions of corresponding equations for models of the medium variations occurring at the Sun and the Earth are obtained.