

А.В. Бурнашов, А.Г. Боровой

Рассеяние света горизонтально ориентированными ледяными пластинками. I. Интенсивность рассеянного света

Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск

Поступила в редакцию 22.02.2007 г.

В приближении геометрической оптики численно рассчитаны индикатрисы рассеяния света на горизонтально ориентированных гексагональных ледяных пластинках. Получены основные количественные характеристики гало (ложное Солнце, паргелий 120° и др.) при различных углах падения света и различных значениях отношения: высота/диаметр пластинки. Предложена параметризация индикатрис рассеяния в паргелическом и субпаргелическом кругах по интегральному вкладу от узких угловых пиков (гало), исходя из затабулированных весовых коэффициентов.

Введение

Матрица рассеяния света для ледяных кристаллов в случае их хаотической ориентации интенсивно исследовалась в последние 20–30 лет численными методами, полученные результаты опубликованы, например, в работах [1–4]. Известно, что ледяные кристаллы при падении часто принимают горизонтальную ориентацию за счет аэродинамических сил. Этот факт подтверждается тем, что многие хорошо известные явления гало, наблюдаемые в атмосфере, могут возникать только при преимущественной горизонтальной ориентации ледяных кристаллов. Напомним, что атмосферные гало — это узкие полосы на небе с возможными яркими пятнами на них, которые наблюдаются при прохождении солнечного света через кристаллические облака.

На языке теории рассеяния интенсивность рассеянного света, или ее нормированная величина, называемая индикатрисой рассеяния, для преимущественно ориентированных несферических частиц в отличие от случая хаотической ориентации, становится двумерной функцией, которая задается на сфере направлений рассеяния. Существенно, что форма индикатрисы зависит также от направления падения света на частицу.

Таким образом, наблюдаемые на небе картины гало соответствуют индикатрисам рассеяния для преимущественно ориентированных ледяных кристаллов. Эти индикатрисы оказываются отличными от нуля только вдоль некоторых линий или полос на сфере направлений рассеяния.

Положение и форма полос гало хорошо изучены и объяснены в рамках геометрической оптики [5]. Однако и величина интенсивности, и поляризация света вдоль этих полос, т.е. требуемые радиационные характеристики кристаллических облаков, практически не изучены. В немногочисленных работах [6, 7], рассматривающих данную проблему,

рассчитывались индикатрисы рассеяния для горизонтально ориентированных гексагональных пластинок и столбиков. Но приведенные там данные носят скорее иллюстративный, чем количественный характер.

Действительно, число входных параметров в [6, 7] настолько мало, что эти данные невозможно использовать для более или менее репрезентативных расчетов рассеяния света в кристаллических облаках. Кроме того, заметим, что для индикатрис рассеяния, рассчитываемых в приближении геометрической оптики, характерно наличие узких резких пиков. Эти пики являются интегрируемыми сингулярностями, т.е. индикатриса обращается в бесконечность, но интеграл от нее по направлениям рассеяния остается конечным. Поэтому из приведенных в работах [6, 7] графиков индикатрис рассеяния невозможно восстановить с приемлемой точностью их численные значения, необходимые, например, для расчета задач многократного рассеяния света.

В данной статье вычисляются индикатрисы рассеяния для наиболее простого случая горизонтально ориентированных гексагональных пластинок. Эти индикатрисы зависят как от параметра формы, равного отношению высоты к диаметру пластинки, так и от угла падения света. Основная цель вычислений — создать базу данных, которую можно было бы использовать как для теоретических расчетов переноса света в перистых облаках, так и для количественной интерпретации картин гало, наблюдаемых в атмосфере. Индикатрисы рассеяния рассчитываются в приближении геометрической оптики по разработанному нами алгоритму трассировки граней кристалла [8, 9]. Эти индикатрисы являются гистограммами с обычным для таких расчетов шагом в 1° . Приведенный ниже в табл. 1, 2, 3 интервал изменения углов падения в 10° представляется достаточным для численных расчетов задач, возникающих в атмосферной оптике.

Чтобы избежать трудностей, связанных с существованием резких пиков в индикатрисе рассеяния, все пики выделяются нами в отдельные слагаемые. Очевидно, что каждый пик формируется определенным типом траекторий фотонов в кристалле и отражает, таким образом, какую-либо одну простую физическую закономерность. Отсюда следует важный вывод, что форма этих пиков слабо зависит как от углов падения света, так и параметра формы частиц. В результате оказывается возможным параметризовать индикатрисы рассеяния только интегралами от пиков, названными в данной статье весовыми коэффициентами. Эти весовые коэффициенты, определяющие вклад каждого пика в суммарную индикатрису рассеяния, табулируются нами как функции угла падения света и параметра формы кристалла.

Отметим, что в реальной атмосфере частицы не ориентируются строго горизонтально, а осциллируют относительно горизонтальной плоскости. Поэтому полученные нами данные являются только необходимой исходной базой для дальнейшей разработки оптической модели перистых облаков. Влияние осцилляций ориентации ледяных кристаллов на матрицу рассеяния света уже рассматривалось авторами [10], но полученные ими результаты носят иллюстративный характер и не могут быть использованы другими авторами, например, для численных расчетов многократного рассеяния света в перистых облаках. В работах [11, 12] матрицы рассеяния света на преимущественно ориентированных ледяных кристаллах рассмотрены более подробно. Но авторы ограничиваются только одним выделенным направлением рассеяния — направлением назад, что используется в лидарном зондировании.

1. Зенитное распределение рассеянного света

Гексагональная пластинка является одной из наиболее распространенных форм ледяных кристаллов, встречающихся в кристаллических облаках. Кроме того, такие пластинки представляют собой наиболее простую форму ледяных кристаллов и поэтому являются классическим объектом для теоретических расчетов. В данной статье мы также ограничимся только гексагональными пластинками, хотя некоторые результаты будут применимы и к пластинкам других, более сложных, форм. Гексагональная пластинка определяется двумя величинами: стороной шестиугольных граней a и расстоянием между этими гранями L .

Индикатриса рассеяния в приближении геометрической оптики зависит не от абсолютных размеров кристалла, а только от его формы, которая в данном случае определяется отношением высоты пластинки к диаметру шестиугольника $F = L/2a$. Величину F будем называть параметром формы. Если главная ось кристалла, проходящая через центр гексагональных граней, перпендикулярна

горизонту, то такую ориентацию будем называть горизонтальной. При этом фиксированная ориентация пластинки определяется азимутальным углом поворота φ_0 относительно главной оси. В дальнейшем будем считать, что пластинка хаотически ориентирована в горизонтальной плоскости, т.е. распределение угла φ_0 в интервале $[0, 2\pi]$ равномерное. Тогда процедура статистического усреднения сводится к вычислению интеграла

$$\langle \dots \rangle = \int_0^{2\pi} \dots d\varphi_0 / 2\pi.$$

В отличие от стандартной задачи рассеяния света на сфере или несферической, но хаотически ориентированной частице, сечения рассеяния и экстинкции для несферической частицы с преимущественной ориентацией уже зависят от направления падения света. В приближении геометрической оптики сечение экстинкции равно площади проекции частицы относительно направления падения света, затем эта площадь усредняется по углам поворота пластинки φ_0 . В частности, для гексагональной пластинки, хаотически ориентированной в горизонтальной плоскости, сечение экстинкции описывается следующей формулой:

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= S_1 \cos \theta_0 + 3S_2 \sin \theta_0 \langle \cos \varphi_0 \rangle = \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 \cos \theta_0 + \frac{6}{\pi} aL \sin \theta_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где θ_0 — угол между главной осью пластинки и направлением падения света; S_1 и S_2 — площади шестиугольной и прямоугольной граней. В видимом диапазоне длин волн свет практически не поглощается льдом, тогда сечение рассеяния определяется также формулой (1).

Величина $\langle S \rangle$ определяет усредненный поток энергии, падающий на частицу, который затем распространяется по направлениям рассеяния. Плотность распределения этого потока энергии по направлениям рассеяния \mathbf{n} будем называть интенсивностью рассеянного света $I(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0)$, т.е.

$$\int I(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0) d\mathbf{n} = \langle S(\mathbf{n}_0) \rangle,$$

где \mathbf{n}_0 — направление падения. Нормированная интенсивность рассеянного света

$$p(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = I(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0) / \langle S(\mathbf{n}_0) \rangle$$

называется индикатрисой рассеяния, где

$$\int p(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0) d\mathbf{n} = 1.$$

Таким образом, индикатриса рассеяния не зависит от абсолютных размеров частиц, но зависит от параметра формы $F = L/2a$. Кроме того, она зависит от поляризации падающего света, но в данной статье для краткости ограничимся случаем неполяризованного падающего света.

Направление рассеяния \mathbf{n} будем задавать зенитным θ и азимутальным ϕ углами сферической системы координат. За направление $\theta = 0$ удобно принять вертикаль, идущую вниз. В этом направлении, например, следуют лучи Солнца, когда оно в зените. Из-за симметрии пластинок относительно горизонтальной плоскости угол падения θ_0 ограничим зенитными углами $0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$, а зенитный угол рассеяния будет «пробегать» весь интервал значений $0 \leq \theta \leq \pi$. Азимутальный угол рассеяния ϕ будем отсчитывать от азимута направления падения. Отметим, что при прохождении солнечного света через кристаллические облака наблюдатель на Земле видит рассеяние света в переднюю полусферу рассеяния $0 \leq \theta \leq \pi/2$, а с самолета или из космоса можно видеть только заднюю полусферу $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$.

Характерной особенностью поля, рассеянного на горизонтально ориентированных пластинках, является локализация рассеянного света на четырех горизонтальных кругах с зенитными углами $\theta_j(\theta_0)$, где $j = 1, \dots, 4$. В частности, при наблюдении рассеянного солнечного света при высоте Солнца θ_0 зенитный угол первого круга равен углу падения $\theta_1 = \theta_0$.

Поскольку на сфере направлений рассеяния он проходит через Солнце, то называется паргелическим кругом. Второй круг θ_2 также находится в передней полусфере рассеяния и имеет два различных названия. Если относительно наблюдателя на Земле он располагается ниже паргелического круга, то называется окологоризонтным, а если выше — то околозенитным. Третий и четвертый круги $\theta_{3,4}$, наблюдаемые из космоса, образуются симметрично относительно горизонта: $\theta_{3,4} = \pi - \theta_{1,2}$. Они называются соответственно субпаргелическим и субокологоризонтным/субоколозенитным кругами.

Опишем образование этих кругов в рамках геометрической оптики. Для удобства интерпретации будем трактовать свет как совокупность фотонов, где волновая природа излучения игнорируется, а фотон трактуется как корпускула, распространяющаяся прямолинейно в однородном пространстве. Такая трактовка излучения широко используется, например, в задачах, описываемых уравнением переноса излучения [13]. Рассмотрим вначале падение света на вертикальную относительно поверхности Земли плоскую границу раздела сред. Как известно, вертикальная компонента скорости фотона при отражении и преломлении на такой плоскости не изменяется, а горизонтальная компонента сохраняется по модулю и только изменяет направление в зависимости от ориентации плоскости.

В результате отраженные фотоны при вращении плоскости вокруг вертикальной оси будут иметь направления распространения, заключенные в конус, угол раскрытия которого $\theta_1 = \theta_0$ соответствует углу при отражении луча от вертикальной плоскости на рис. 1, *a*. С противоположной стороны вращающейся плоскости преломленные фотоны образуют также конус, но с другим углом раскрытия. Для интересующих нас пластинок, хаотически ориентированных в горизонтальной плоскости, на-

правления распространения фотонов внутри частиц будут сосредоточены в двух конусах, соответствующих вхождению фотонов или через горизонтальную, или вертикальные грани. Затем внутри кристалла произвольное число столкновений с любыми гранями не выводит фотон из своего конуса направлений. В результате задача нахождения зенитных углов рассеяния сводится, независимо от числа столкновений фотонов, к плоской задаче отражения и прохождения света через прямоугольную пластинку (см. рис. 1, *a*).

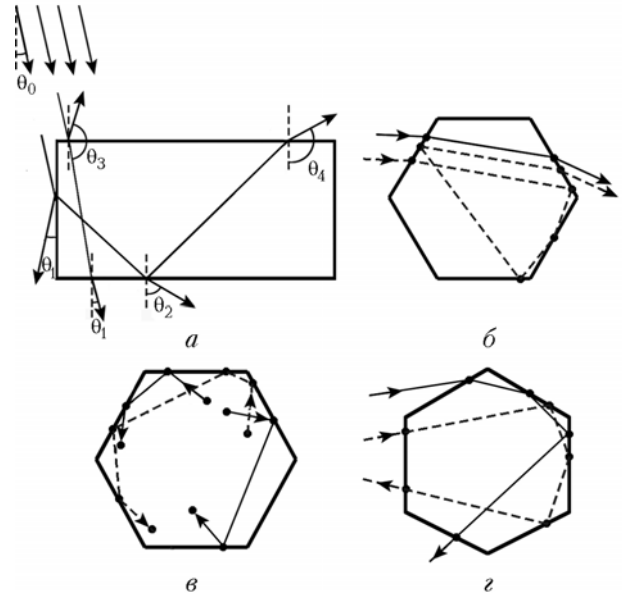


Рис. 1. Траектории фотонов в горизонтально ориентированной гексагональной пластинке: *a* — образование четырех зенитных углов рассеяния; *b* — ложное Солнце; *в* — паргелий 120°; *г* — пик 150°; *b-г* — азимутальное распределение света в паргелическом и субпаргелическом кругах; сплошные линии — основные траектории и штриховые — сопутствующие

Как видно из рис. 1, *a*, фотоны, падающие на верхнюю горизонтальную грань и выходящие после произвольного числа столкновений из любой горизонтальной грани, образуют паргелический ($\theta_1 = \theta_0$) и субпаргелический ($\theta_3 = \pi - \theta_0$) круги. То же самое справедливо и для фотонов, падающих на вертикальную грань и выходящих из вертикальных граней. Если же свет падает на горизонтальную грань, а выходит из вертикальной грани, или наоборот, то за счет прохождения света через прямоугольный клин с показателем преломления n мы получаем круги $\theta_2(\theta_0)$ и $\theta_4(\theta_0)$.

Рассмотрим положения круга θ_2 с точки зрения наблюдателя с Земли. Пусть на рис. 1, *a* Солнце из зенита $\theta_0 = 0^\circ$ опускается в направлении против часовой стрелки. Вначале, когда $\theta_0 = 0$, лучи, скользящие вдоль левой вертикальной грани, образуют, преломляясь через левый нижний угол, круг под углом $\theta_2(0^\circ) = \theta^*$, определяемым выражением $\sin \theta^* = \sqrt{n^2 - 1}$, где n — показатель преломления кристалла. В частности, при $n = 1,31$ мы имеем

$\theta^* \approx 58^\circ$. Когда Солнце снижается до высоты $\theta_0 = \pi/2 - \theta^*$, круг θ_2 опускается до горизонта $\theta = \pi/2$ согласно формуле

$$\theta_2(\theta_0) = \arcsin \sqrt{n^2 - \cos^2 \theta_0} \quad (2)$$

и поэтому называется околоразногоризонтным. Заметим, что на горизонте $\theta_2(\pi/2 - \theta^*) = \pi/2$ за счет появления полного внутреннего отражения на нижней горизонтальной грани интенсивность света в этом круге обращается в нуль.

При рассмотренных углах падения правый верхний угол на рис. 1, *a* не образует преломленных лучей из-за полного внутреннего отражения на правой вертикальной грани. В результате в интервале углов падения $\pi/2 - \theta^* < \theta_0 < \theta^*$ второй круг θ_2 не появляется вообще из-за полного внутреннего отражения. Но при зенитном угле Солнца $\theta_0 = \theta^*$ правый верхний угол начинает пропускать преломленный свет и круг θ_2 появляется в зените $\theta = 0$. Затем, по мере опускания Солнца, околоразногоризонтный круг снижается до предельного угла $\theta_2(\pi/2) = \pi/2 - \theta^*$, наблюдаемого на закате. Зависимость угла рассеяния от угла падения при этом описывается функцией, обратной выражению (2). Круг $\theta_4(\theta_0)$ ведет себя таким же образом, но симметрично по отношению к горизонтальной плоскости.

Как видим, возникновение четырех кругов в рассеянном свете обусловлено существованием только горизонтальных и вертикальных граней в кристаллах и не зависит от формы горизонтально ориентированных пластинок. Таким образом, мы показали, что указанные четыре круга свойственны горизонтально ориентированным пластинкам любой формы. Строго говоря, форма пластинок должна быть при этом выпуклой. Если же пластинки имеют форму, например, звездочек, то фотоны, выходящие из одного конца звездочки под углами θ_2 и θ_4 , могут снова войти в кристалл через другой конец звездочки. В таком случае они приведут к появлению уже дополнительных кругов или углов рассеяния. Как показывают наши оценки, такими членами можно пренебречь из-за их незначительной энергии. Кроме того, в интервале углов падения $\theta^* > \theta_0 > \pi/2 - \theta^*$, когда рассеяние происходит только в углы $\theta_1 = \theta_0$ и $\theta_3 = \pi - \theta_0$, дополнительные углы рассеяния вообще не могут возникнуть для пластинок любой формы.

Таким образом, индикатриса рассеяния для горизонтально ориентированных пластинок состоит из четырех функций, локализованных на кругах θ_j :

$$p(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0) = \sum_{j=1}^4 \delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}_j) P_j(\varphi), \quad (3)$$

где δ -функция означает локализацию функций на круге, а функции азимутального угла рассеяния $P_j(\varphi)$ имеют смысл индикатрисы рассеяния вдоль данного круга. Условие нормировки общей индикатрисы рассеяния на единицу приводит к нормировке функций $P_j(\varphi)$ на следующие коэффициенты:

$$Q_j(\theta_0, F) = \int_0^{2\pi} P_j(\varphi) d\varphi, \quad (4)$$

где

$$\sum_{j=1}^4 Q_j = 1.$$

Коэффициенты Q_j имеют физический смысл весовых коэффициентов при распределении энергии рассеянного поля по этим четырем кругам.

В табл. 1 представлены рассчитанные нами коэффициенты Q_i для трех значений параметров формы $F = 0,1; 0,2$ и $0,4$ при различных углах падения. Показатель преломления льда в данной статье принят равным 1,31.

Таблица 1

Распределение рассеянного света по четырем зенитным кругам при различных углах падения света для параметров формы пластинки $F = 0,1; 0,2$ и $0,4$ соответственно. Суммарная энергия меньше 100%, потому что не учитывались траектории с числом внутренних столкновений фотонов больше 6

Весовой коэффициент, %	Угол падения θ_0 , град							
	10	20	30	40	50	60	70	80
$F = 0,1$								
Q_1	95,2	92,8	90,4	86,5	86,7	80,2	64,1	35,5
Q_2	1,4	3,7	5,8	0	0	1,2	3,9	3,5
Q_3	3,4	3,4	3,7	4,7	10,3	16,1	29,7	58,6
Q_4	<0,1	<0,1	<0,1	0	0	<0,1	<0,1	<0,1
<i>Всего</i>	100	99,9	99,9	91,2	97	97,5	97,7	97,6
$F = 0,2$								
Q_1	93,8	89,6	86,5	82	84,5	77,7	47,5	44,5
Q_2	2,6	7,1	8,6	0	0	2	5,9	5,5
Q_3	3,5	3,2	4,7	12,6	12,3	17,5	43,7	47,9
Q_4	<0,1	<0,1	<0,1	0	0	<0,1	<0,1	<0,1
<i>Всего</i>	99,9	99,9	99,8	94,6	96,9	97,2	97,1	97,9
$F = 0,4$								
Q_1	91,8	84,4	75,4	82,2	67,4	54,2	53	64,3
Q_2	4,9	12,8	16	0	0	3,1	8,1	6
Q_3	3,1	2,7	5,2	13	28,6	40,4	37	27,4
Q_4	<0,1	<0,1	<0,1	0	0	<0,1	<0,1	<0,1
<i>Всего</i>	99,8	99,9	99,6	95,2	96	97,7	98,1	97,7

Как видим, основная часть рассеянной энергии (70–90%) сосредоточена в первом θ_1 (паргелическом) круге. Круг θ_4 содержит не более 0,1% рассеянной энергии и потому не представляет практического интереса. Остальные два круга θ_2 и θ_3 перераспределяют между собой не более 30% энергии, и здесь перераспределение энергии связано с возникновением или исчезновением полного внутреннего отражения при прохождении прямого угла (см. рис. 1, *a*).

2. Азимутальное распределение рассеянного света

Рассеянное поле выходит из граней кристалла в виде плоскопараллельных пучков с поперечным сечением в форме многоугольников. Эти пучки распространяются в различные углы рассеяния и имеют различную поляризацию. Каждый пучок

характеризуется своей траекторией фотонов, т.е. последовательностью столкновений фотонов с определенными гранями кристалла. Разработанная нами программа [8, 9] позволяет вычислять за время не больше 1 мин все параметры выходящих пучков при фиксированной ориентации кристалла. Для горизонтально ориентированных пластинок все пучки на сфере направлений рассеяния соответствуют точкам на четырех указанных выше кругах, где каждая точка описывается аналитически δ -функцией Дирака. Интенсивность рассеянного света вдоль круга при фиксированной ориентации пластинки описывается выражением

$$I(\varphi) = \sum_k s_k(\varphi_0) N_k(\varphi_0) \delta[\varphi - \varphi_k(\varphi_0)], \quad (5)$$

где индекс j , указывающий номер круга, опущен для краткости; индекс k соответствует определенной траектории фотонов, так что суммирование проводится по всем траекториям, т.е. пучкам; функция $\varphi_k(\varphi_0)$ описывает азимутальное направление распространения k -го пучка при азимутальном угле ориентации пластинки φ_0 ; N_k — интенсивность луча в k -м пучке, которая вычисляется с учетом поляризации при заданных углах отражения и преломления фотонов гранями кристалла по коэффициентам Френеля; s_k — поперечная площадь k -го пучка. Средняя по ориентациям пластинки интенсивность рассеянного излучения легко вычисляется аналитически из-за наличия δ -функции в выражении (5)

$$\langle I(\varphi) \rangle = \sum_k s_k(\varphi) N_k(\varphi) \left(\frac{d\varphi_0}{d\varphi_k} \right). \quad (6)$$

Последний член в выражении (6) равен производной от функции $\varphi_0(\varphi_k)$, обратной к функции $\varphi_k(\varphi_0)$. Формула (6) удобна для аналитического рассмотрения, а при численных расчетах мы непосредственно вычисляем гистограммы интенсивности вдоль кругов при усреднении по углу φ_0 и получаем индикатрисы рассеяния для j -го круга по формуле

$$P_j(\varphi) = \langle I_j(\varphi) \rangle / \langle S \rangle. \quad (7)$$

Индикатрисы рассеяния P_j в дальнейшем будем разбивать на суммы небольшого числа слагаемых

$$P_j(\varphi) = \sum_m P_{jm}(\varphi),$$

где

$$\int_0^{2\pi} P_{jm}(\varphi) d\varphi = Q_j c_{jm}; \quad \sum_m c_{jm} = 1. \quad (8)$$

Здесь коэффициенты c_{jm} имеют физический смысл весовых коэффициентов, определяющих долю энергии внутри данного j -го круга, приходящуюся на m -й член. Функции $P_{jm}(\varphi)$ будем также называть индикатрисами рассеяния для данного слагаемого.

3. Первый (паргелический) круг

Основная часть энергии рассеянного света сосредоточена в паргелическом круге. На рис. 2 представлены рассчитанные нами индикатрисы рассеяния в паргелическом круге $P_1(\varphi)$ для пластинки с параметром формы $F = 0,2$ при различных углах падения. Здесь при небольшом угле падения $\theta_0 = 15^\circ$ (рис. 2,а) преобладает свет, падающий на верхнюю гексагональную грань.

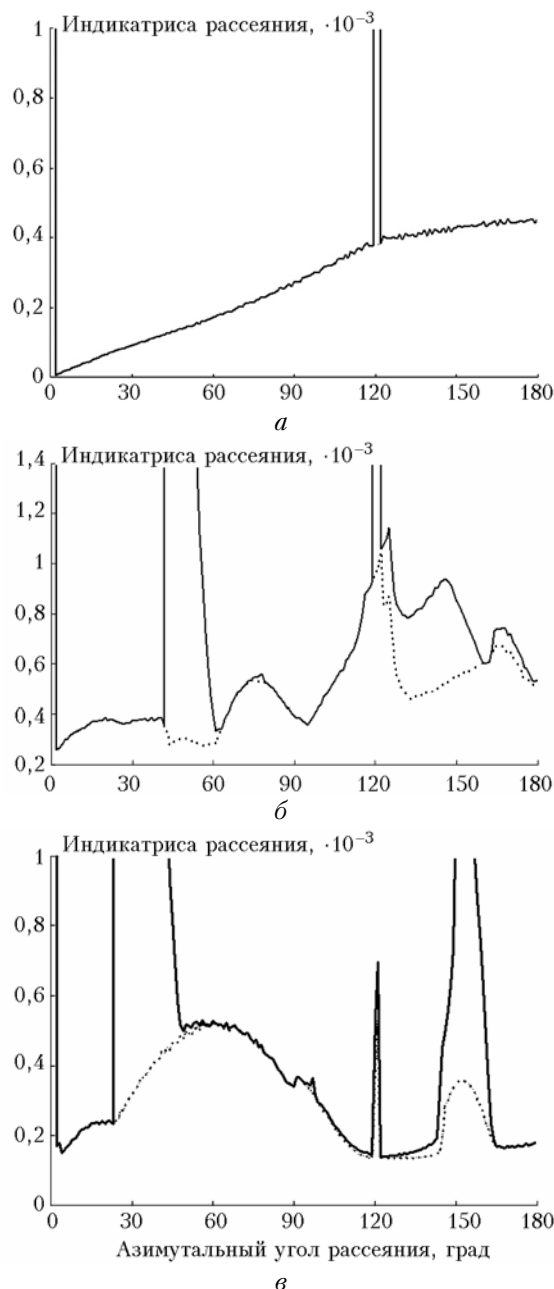


Рис. 2. Азимутальные индикатрисы рассеяния в паргелическом круге для пластинки с параметром формы $F = 0,2$ при углах падения света $\theta_0 = 15^\circ$ (а), 45° (б) и 75° (в)

При угле падения $\theta_0 = 75^\circ$ (рис. 2,в), напротив, преобладает свет, падающий на вертикальные грани. На рис. 2,б представлен промежуточный

случай, когда $\theta_0 = 45^\circ$. Численные результаты на рис. 2 — это гистограммы, рассчитанные со стандартным шагом 1° . Число столкновений фотонов было ограничено до 7, поскольку на высшие порядки столкновений приходится не более 2% рассеянной энергии.

Как видно из рис. 2, в азимутальных индикатрисах рассеяния $P_1(\varphi)$ существенны 4 пика, которые мы выделим в отдельные слагаемые разложения (8): это пик в направлении вперед ($m = 1$), ложное Солнце ($m = 2$), паргелий 120° ($m = 3$) и пик 150° ($m = 4$). Остальные траектории фотонов образуют более или менее плавную зависимость от угла φ и объединены в остаточный член ($m = 5$).

Перейдем к количественному описанию этих слагаемых. Из результатов численного расчета следует, что каждый пик формируется небольшим числом траекторий только определенного типа. В результате угловая зависимость для каждого слагаемого разложения (8) отражает некоторую простую физическую закономерность и слабо зависит от параметров формы кристалла и угла падения света на кристалл. Основная зависимость азимутальных индикатрис рассеяния от углов падения и параметров формы проявляется только в значениях весовых коэффициентов c_{jm} . Этот важный вывод позволяет параметризовать индикатрисы значениями весовых коэффициентов c_{jm} , которые будут представляться в табл. 2, 3.

В частности, любые две параллельные грани кристалла эквивалентны плоскопараллельной пластинке. Поэтому фотон, прошедший эти грани при двух столкновениях, покидает кристалл в направлении рассеяния строго вперед. Угловое распределение таких фотонов описывается δ -функцией Дирака. То же самое справедливо и для фотонов, многократно переотраженных этими гранями. В резуль-

тате получаем пик в направлении вперед $P_{11}(\varphi) = Q_{11}c_{11}\delta(\varphi)$, угловое распределение в котором описывается δ -функцией Дирака, а рассчитанные нами весовые коэффициенты c_{11} приведены в табл. 2 в графе «пик вперед».

Следующий пик ($m = 2$) называется паргелием, или ложным Солнцем (в англоязычной литературе — *sundog*). Ложное Солнце образуется за счет прохождения фотонов через клин с раскрывом $\gamma = 60^\circ$, образуемый прямоугольными гранями пластинки (см. рис. 1, б). В общем случае, как известно [14], прохождение фотонов через клин с произвольным раскрывом γ при их произвольном направлении падения описывается сравнительно простыми аналитическими выражениями. Согласно этим выражениям продольная, относительно ребра клина, компонента направления распространения фотона не изменяется после прохождения через клин. А перпендикулярная компонента находится из плоской задачи прохождения фотонов через клин, но при этом показатель преломления внутри клина n заменяется эффективным показателем преломления Браве $n' = (n^2 - \cos^2\beta)^{1/2} / \sin\beta$, где β — угол между направлением падения фотона и ребром клина. Если вращать клин вокруг своего ребра, то максимальное отклонение направления вышедших фотонов наблюдается при их касательном падении на грань клина. Это максимальное отклонение азимутального угла описывается следующей формулой:

$$\begin{aligned} \Phi_{\max} &= \gamma + \arcsin\left(\cos\gamma - \sqrt{n^2 - 1} \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right) - 90^\circ = \\ &= -30^\circ + \arcsin\left(\frac{1}{2} - \sqrt{n^2 - 1} \frac{\sqrt{3}}{2\sin\beta}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Таблица 2

Весовые коэффициенты c_{1m} пиков в паргелическом круге для пластинок с параметрами формы $F = 0,1; 0,2$ и $0,4$

Весовой коэффициент, %	Угол падения θ_0 , град								
	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$F = 0,1$									
c_{11} (пик вперед)	96,8	94,8	92,8	90,1	83,6	83,4	83,5	74,8	35,6
c_{12} (ложн. Солн.)	0	0	0	0,7	2,7	4,6	5,4	13,2	49,7
c_{13} (паргелий 120°)	<0,1	<0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3	<0,1
c_{14} (пик 150°)	0	0	0	0	0	<0,1	0,1	0,3	2,7
c_{15} (остаток)	3,1	5,1	7	9	13,5	11,7	10,6	11,3	11,9
$F = 0,2$									
c_{11} (пик вперед)	94	89,8	86,1	80,7	72,9	70,7	71,4	46,3	35,6
c_{12} (ложн. Солн.)	0	0	<0,1	2,3	7,8	10,2	5,2	34,5	49,7
c_{13} (паргелий 120°)	<0,1	0,1	0,2	0,4	0,5	0,7	1,2	0,7	<0,1
c_{14} (пик 150°)	0	0	0	0	<0,1	<0,1	0,6	1,4	2,7
c_{15} (остаток)	5,9	10	13,6	16,5	18,7	18,3	21,5	17	11,9
$F = 0,4$									
c_{11} (пик вперед)	88,4	79,6	72,3	69,1	48,2	33,4	28	28,8	35,6
c_{12} (ложн. Солн.)	0	0	0,1	1,3	3,8	14,9	32,4	48,4	49,7
c_{13} (паргелий 120°)	<0,1	0,3	0,9	1,2	2,4	3,5	3,3	1	<0,1
c_{14} (пик 150°)	0,0	0	0	0,2	1,1	1,8	3,7	3,5	2,7
c_{15} (остаток)	11,5	20	26,6	28,1	44,5	46,2	32,1	17,3	11,9

По мере вращения клина отклонение фотонов вначале уменьшается, достигая минимального значения азимутального угла, описываемого формулой:

$$\varphi_{\min} = \gamma + 2\arcsin\left(-n' \sin \frac{\gamma}{2}\right) = 60^\circ + 2\arcsin(-n'/2). \quad (10)$$

Заметим, что при $\varphi = \varphi_{\min}$ траектория фотона отсекает равные отрезки от обеих граней клина. Затем отклонение фотона опять увеличивается. Таким образом, формулы (9) и (10) определяют интервал азимутальных углов, куда дает вклад траектория, изображенная на рис. 1,б. В обозначениях формулы (6) при минимальном угле отклонения мы имеем: $d\varphi_k/d\varphi_0 = 0$. Поскольку при этом $d\varphi_0/d\varphi_k = \infty$, усредненная интенсивность рассеянного света при минимальном угле отклонения обращается в бесконечность, т.е. является интегрируемой сингулярностью. Это яркое пятно при прохождении солнечного света через кристаллические облака и воспринимается наблюдателем как ложное Солнце.

Подчеркнем, что вопреки ряду высказываний, которые можно найти в литературе, интегрируемые сингулярности в индикатрисах рассеяния не нарушают никаких физических принципов, так как экспериментально регистрируемыми величинами являются не сами индикатрисы рассеяния, а интегралы от них в некоторых конечных угловых пределах, соответствующих углу поля зрения приемной аппаратуры. На рис. 3 приведены рассчитанные нами индикатрисы рассеяния от таких траекторий при различных углах падения.

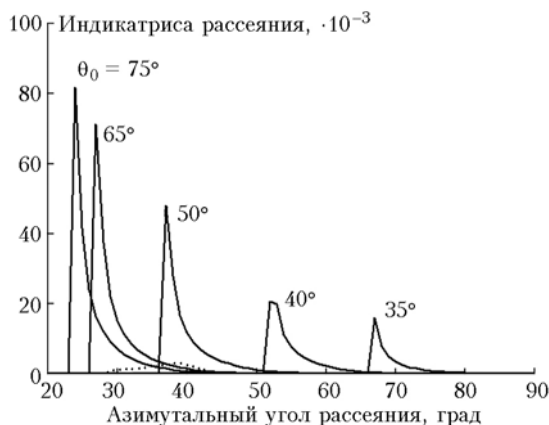


Рис. 3. Индикатрисы рассеяния ложного Солнца $P_{12}(\varphi)$ при различных углах падения. Сплошные линии соответствуют основной траектории, а пунктирная показывает индикатрису рассеяния для сопутствующей траектории (умноженную на 100) при зенитном угле падения 75°

Напомним, что рассчитываемые индикатрисы — это гистограммы с шагом 1° , что приводит к конечному значению интенсивности на левой границе интервала. Как видим, яркость ложного Солнца максимальна на восходе или закате.

Для краткости ложным Солнцем (*sundog*) мы будем называть не только сингулярность интенсивности на левом краю, а всю индикатрису, представленную на рис. 3. Именно эта функция и образует

пик ложного Солнца в суммарной индикатрисе рассеяния на рис. 2.

Заметим, что число столкновений в траекториях фотонов, образующих пик ложного Солнца, может быть произвольным, так как дополнительные столкновения фотонов с шестигранными гранями кристалла не изменяют проекцию траектории на горизонтальную плоскость, представленную на рис. 1,б.

Как показали численные расчеты, в правый край пика ложного Солнца также заметный вклад дает сопутствующая траектория фотонов, показанная на рис. 1,б пунктирной линией. В качестве иллюстрации на рис. 3 пунктиром показана индикатриса от сопутствующей траектории для одного угла падения. Под термином «ложное Солнце» мы объединили оба типа траекторий. Весовые коэффициенты c_{12} для определенного таким образом ложного Солнца приведены в табл. 2.

Третий пик $m = 3$ в азимутальной индикатрисе рассеяния описывается аналитически, как и первый пик, δ -функцией Дирака: $P_{13}(\varphi) = Q_1 c_{13} \delta(\varphi - 120^\circ)$, и называется паргелием 120° . Появление этого пика легко объясняется, если рассмотреть вспомогательную плоскую задачу отражения фотона внутри произвольного многоугольника. Пусть фотон с произвольным направлением падения отражается от двух граней с углом γ между ними, как показано на рис. 1,в. Нетрудно показать, что отклонение фотона в этом случае не зависит от поворота многоугольника и равно $\varphi = 2(180^\circ - \gamma)$.

Для рассматриваемого нами случая гексагональной пластинки такая траектория реализуется, когда фотон входит в кристалл через верхнюю гексагональную грань и покидает кристалл через нижнюю гексагональную грань после двух столкновений с вертикальными гранями. Тогда траектории, показанные на рис. 1,в, соответствуют горизонтальной компоненте направления распространения фотона. В результате такие траектории образуют неподвижную светящуюся точку под углом 120° (и под симметричным углом 240°) при вращении пластинки в горизонтальной плоскости.

Кроме основных траекторий (см. рис. 1,в, сплошная линия), вклад в паргелий 120° дают также два типа сопутствующих траекторий. Один из них соответствует основной траектории, но число столкновений здесь увеличивается (см. рис. 1,в, штриховая линия). Во втором типе сопутствующих траекторий свет входит и выходит уже через вертикальные грани. Поскольку вклад от второго типа траекторий оказался значительно меньше, чем от траекторий первого типа, то второй тип траекторий не представлен на рис. 1. Весовой коэффициент c_{13} в табл. 2 объединяет все эти траектории под термином «паргелий 120° ».

Четвертый пик $m = 4$ не был описан ранее в литературе. Он появляется при больших зенитных углах падения вблизи азимутального угла рассеяния 150° . Этот пик образуется основной и сопутствующей траекториями, показанными на рис. 1,г. Индикатрисы этих траекторий представлены на рис. 4.

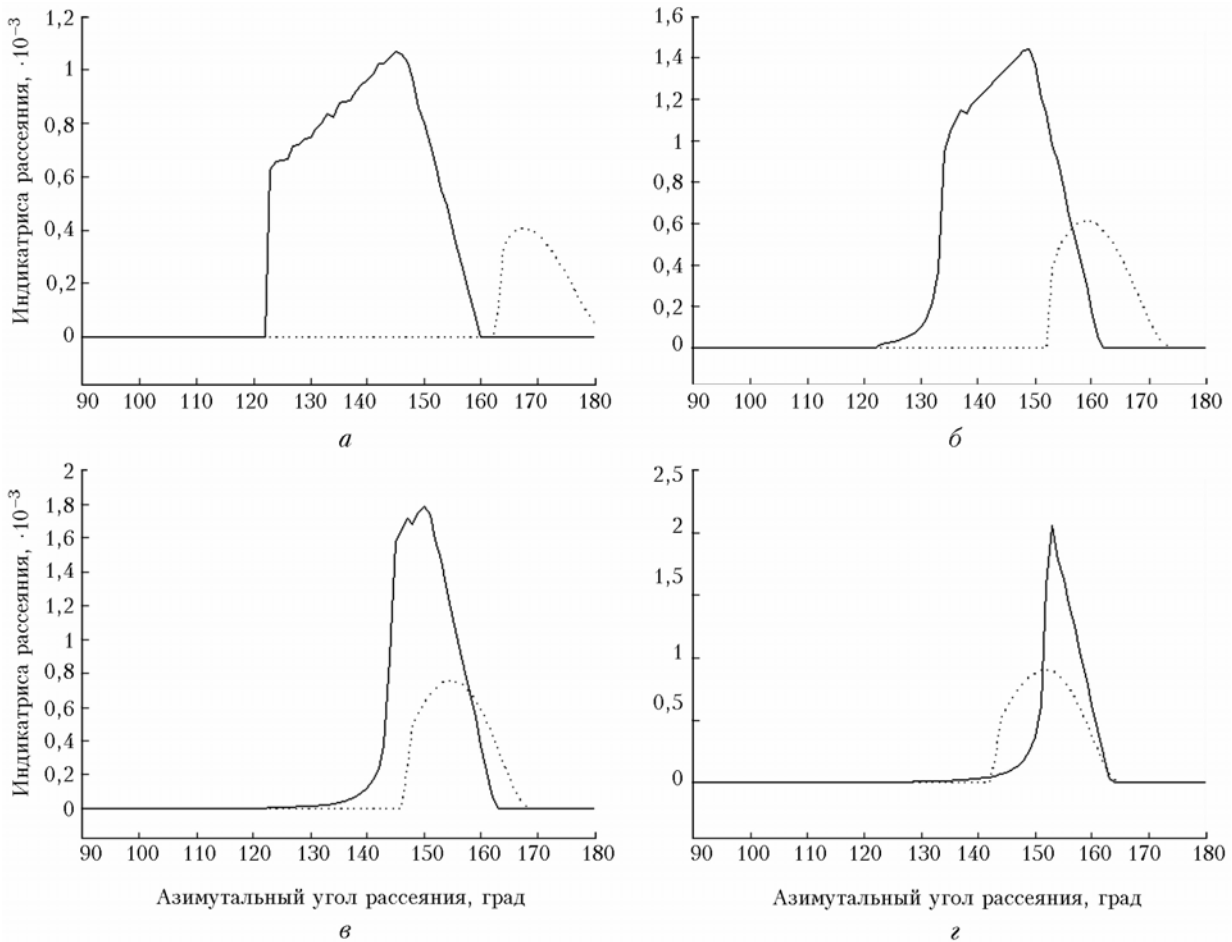


Рис. 4. Индикатрисы рассеяния $P_{14}(\varphi)$ основной (сплошная линия) и сопутствующей (пунктир) траекторий, образующих пик 150° при различных зенитных углах падения $\theta_0 = 45^\circ$ (а), 55° (б), 65° (в) и 80° (г)

Появление пика 150° объясняется специфическим проявлением полного внутреннего отражения в траекториях с большим числом столкновений фотонов. Действительно, пусть для данной траектории все столкновения фотона с гранями проходят без полного внутреннего отражения. Если при вращении кристалла в этой траектории на одной из граней возникает полное внутреннее отражение, то это проявится как резкая граница, разделяющая область с большой и малой интенсивностями рассеянного света. Кроме того, для каждой траектории существуют границы углов рассеяния, обусловленные геометрией частиц, как мы это видели на примере ложного Солнца. При столкновениях фотона с большим числом граней объединение этих границ приводит к узкому интервалу углов, эффективно пропускающих излучение. Рис. 4 демонстрирует эту закономерность. Суммарный весовой коэффициент c_{14} для пика 150° приведен в табл. 2.

Итак, мы выделили все траектории, дающие заметные пики в суммарной индикатрисе рассеяния P_1 , остаточный член $m = 5$ является более или менее плавной функцией угла φ , что показано на рис. 2 пунктирной линией. Весовой коэффициент для остаточного члена c_{15} представлен в табл. 2.

4. Второй (околозенитный/окологоризонтный) круг

Второй круг, расположенный в передней полусфере направлений рассеяния, формируется, главным образом, траекториями с двумя столкновениями, когда фотоны проходят через клин с углом 90° . Здесь при повороте гексагональной пластинки ребро клина вращается в горизонтальной плоскости. Поэтому максимальное пропускание света таким клином происходит, когда ребро клина перпендикулярно направлению падения. В этом случае азимутальное отклонение фотона равно нулю и индикатриса рассеяния при $\varphi = 0$ максимальна. Эта закономерность демонстрируется на рис. 5.

Для окологоризонтного круга такая траектория начинается с вертикальной грани, поэтому максимальное азимутальное отклонение таких фотонов наступает при скользящем падении на вертикальную грань. Таким образом, индикатриса рассеяния для такой траектории отлична от нуля в интервале $[0^\circ, \varphi_{\max}]$, где для правой границы интервала можно получить следующее аналитическое выражение:

$$\varphi_{\max} = \arctg(\sqrt{n^2 - 1} / \sin \theta_0). \quad (11)$$

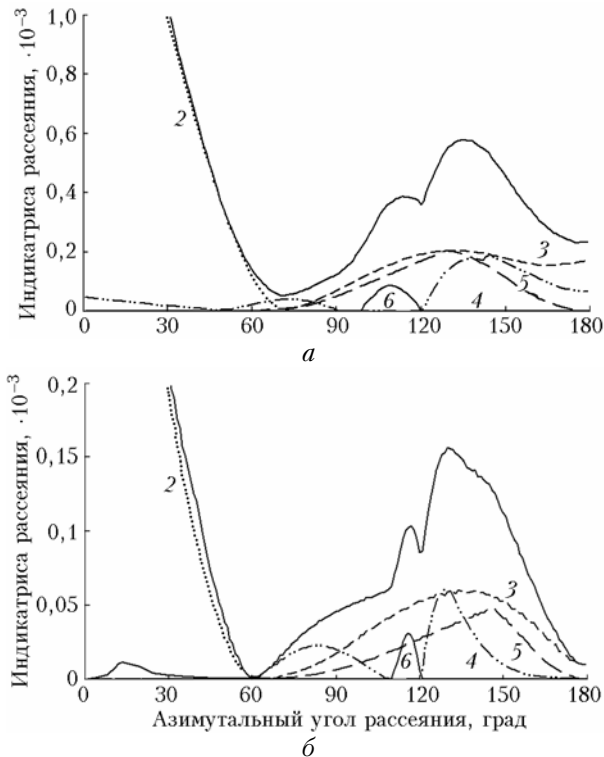


Рис. 5. Индикатрисы рассеяния $P_2(\varphi)$ для окологоризонтного (а) и околозенитного (б) кругов для углов падения 15 и 75° соответственно. Верхняя линия соответствует суммарной индикатрисе рассеяния, а цифры у кривых указывают индикатрисы рассеяния для данной кратности столкновений фотонов

Для околозенитного круга аналогичная траектория начинается на верхней гексагональной грани.

Правая граница интервала углов $[0^\circ, \varphi_{\max}]$ возникает за счет появления полного внутреннего отражения на вертикальной грани. В этом случае легко получить следующее выражение:

$$\varphi_{\max} = \arcsin(\sqrt{n^2 - 1} / \sin \theta_0). \quad (12)$$

На траектории с большим числом столкновений во втором круге приходится, как показали наши расчеты, не более 5% энергии, приходящейся на вышерассмотренную траекторию. Поэтому вклад от этих траекторий не представляет практического интереса с точки зрения интегральных параметров. Как следует из приведенных на рис. 5 индикатрис рассеяния второго круга $P_2(\varphi)$, траектории с большим числом столкновений заполняют, в основном, оставшийся интервал азимутальных углов $\varphi > \varphi_{\max}$. По сравнению с первым кругом, второй круг не имеет столь резких пиков в индикатрисах рассеяния. Пики появляются только в малых по величине слагаемых, которые соответствуют большим кратностям столкновений фотонов. Эти пики аналогично пику 150° в паргелическом круге объясняются обрезанием пропускания за счет полного внутреннего отражения и геометрии траекторий.

5. Третий (субпаргелический) круг

Этот круг появляется в задней полусфере направлений рассеяния под зенитным углом $\theta_3 = \pi - \theta_0$. Он образуется такими же траекториями фотонов, как и в паргелическом круге, но при дополнительном отражении от горизонтально ориентированных шестиугольных граней. Поэтому в третьем круге наблюдаются те же пики, что и в паргелическом круге. Рассчитанные нами весовые коэффициенты для третьего круга представлены в табл. 3

Таблица 3

Весовые коэффициенты c_{3m} пиков в субпаргелическом круге для пластинок с параметрами формы $F = 0,1; 0,2$ и $0,4$

Весовой коэффициент, %	Угол падения θ_0 , град							
	10	20	30	40	50	60	70	80
$F = 0,1$								
c_{31} (пик вперед)	98,2	95,9	94,8	77,8	65,7	62,3	58,9	63,4
c_{32} (ложн. Солн.)	0	0	<0,1	16,4	27,2	31,3	40,4	32,7
c_{33} (паргелий 120°)	<0,1	<0,1	<0,1	<0,1	<0,1	<0,1	0,2	0,2
c_{34} (пик 150°)	0	0	0	0	<0,1	<0,1	0,2	0,2
c_{35} (остаток)	1,8	4,1	5,2	5,8	7,1	6,4	0,3	3,5
$F = 0,2$								
c_{31} (пик вперед)	96,4	93,2	91,4	76,9	70,7	42,4	50,1	58,8
c_{32} (ложн. Солн.)	0	0	<0,1	19,1	22,1	40,2	42	31,8
c_{33} (паргелий 120°)	<0,1	<0,1	<0,1	<0,1	0,2	0,4	0,7	0,5
c_{34} (пик 150°)	0	0	<0,1	<0,1	<0,1	2,0	0,1	2,1
c_{35} (остаток)	3,6	6,8	8,6	4	7	15	7,1	6,8
$F = 0,4$								
c_{31} (пик вперед)	93,3	81,3	74,5	66,8	48,9	48,2	47,7	53,2
c_{32} (ложн. Солн.)	0	0	10,5	17,9	44,7	40,4	38,7	31,3
c_{33} (паргелий 120°)	<0,1	<0,1	<0,1	0,5	0,4	0,7	1,7	1,8
c_{34} (пик 150°)	0	<0,1	<0,1	0,4	0,7	3,7	3,2	5,1
c_{35} (остаток)	6,7	18,7	14,6	14,4	5,3	7	8,7	8,6

Примечание. При угле падения 90° паргелический и субпаргелический круги сливаются, поэтому весовые коэффициенты пиков см. в табл. 2.

Как говорилось выше, четвертый круг несет в себе не более 0,1% рассеянной энергии и потому не представляет практического интереса.

Заключение

При рассмотрении индикатрисы рассеяния для горизонтально ориентированных гексагональных ледяных пластинок основное внимание в паргелическом и субпаргелическом кругах уделено тем слабым в разложении индикатрисы рассеяния (8), которые имеют форму узких пиков (гало). Поскольку угловая зависимость рассеянного излучения внутри этих пиков слабо зависит от параметра формы пластинок и угла падения света, то индикатрисы рассеяния можно характеризовать только интегральными характеристиками этих пиков. Такой подход оправдан, например, при оценке вертикальных потоков радиации или при расчетах многократного рассеяния света, где детальное угловое распределение рассеянного света не является принципиально важным. В иных ситуациях, когда измерения рассеянного света проводятся только под некоторыми фиксированными углами рассеяния, данный подход может оказаться грубым и тогда потребуется проводить отдельные достаточно трудоемкие вычисления.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 05-05-39014 и 06-05-65141) и ИНТАС (грант № 05-1000008-8024).

1. Волковицкий О.А., Павлова Л.Н., Петрушин А.Г. Оптические свойства кристаллических облаков. Л.: Гидрометеиздат, 1984. 200 с.
2. Liou K.N., Takano Y., Yang P. Light scattering and radiative transfer in ice crystal clouds: Applications to climate research // M.I. Mishchenko, J.W. Hovenier, L.D. Travis, editors. Light scattering by nonspherical particles: Theory, measurements, and applications. San Diego: Acad. Press, 2000. P. 417–449.

3. Yang P., Liou K.N. Light scattering and absorption by nonspherical ice crystals // Kokhanovsky A.A., editor. Light scattering reviews. Chichester: Springer-Praxis, 2006. P. 31–71.
4. Ромашов Д.Н. Рассеяние света гексагональными ледяными кристаллами // Оптика атмосф. и океана. 2001. Т. 14. № 2. С. 116–124.
5. Tape W. Atmospheric halos. Washington: American Geophysical Union, Antarctic Res. Series. 1994. V. 64. 139 p.
6. Takano Y., Liou K.N. Solar radiative transfer in cirrus clouds. Part 1: Single scattering and optical properties of hexagonal ice crystals // J. Atmos. Sci. 1989. V. 46. N 1. P. 3–19.
7. Takano Y., Liou K.N. Transfer of polarized infrared radiation in optically anisotropic media: application to horizontally oriented ice crystals // J. Opt. Soc. Amer. A. 1993. V. 10. N 6. P. 1243–1256.
8. Borovoi A.G., Grishin I.A. Scattering matrices for large ice crystal particles // J. Opt. Soc. Amer. A. 2003. V. 20. N 11. P. 2071–2080.
9. Borovoi A.G., Kustova N.V., Oppel U.G. Light backscattering by hexagonal ice crystal particles in the geometrical optics approximation // Opt. Eng. 2005. V. 44. N 7. P. 171–208.
10. Noel V., Ledanois G., Chepfer H., Flamant P.H. Computation of a single-scattering matrix for nonspherical particles randomly or horizontally oriented in space // Appl. Opt. 2001. V. 40. N 24. P. 4365–4375.
11. Ромашов Д.Н., Кауль Б.В., Самохвалов И.В. Банк данных для интерпретации результатов поляризационного зондирования кристаллических облаков // Оптика атмосф. и океана. 2000. Т. 13. № 9. С. 854–861.
12. Kaul B.V., Samokhvalov I.V., Volkov S.N. Investigating particle orientation in cirrus clouds by measuring backscattering phase matrix with lidar // Appl. Opt. 2004. V. 43. N 36. P. 6620–6628.
13. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1953. 430 с.
14. Tape W. Analytic foundation of halo theory // J. Opt. Soc. Amer. 1980. V. 70. N 10. P. 1175–1192.

A. V. Burnashov, A. G. Borovoy. Light scattering by horizontally oriented ice plates. I. Scattered light intensity.

Phase functions for light scattering by horizontally oriented hexagonal ice plates are numerically calculated within the framework of geometric optics. The main quantitative properties of the halos (sundog, parhelicon 120°, and others) are obtained for a number of both incident light directions and aspect ratios of the plates. A parameterization of the phase functions in the parhelic and subparhelic circles is proposed based on the integral contributions of the narrow angular peaks (halos) that are tabulated as the weight coefficients.