

Г.Н. Глазов, В.М. Дубягин

СТАТИСТИКА ФОТОЭЛЕКТРОНОВ ЛАЗЕРНЫХ СИГНАЛОВ С ЛОГНОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ИНТЕНСИВНОСТИ

Получены выражения для моментов энергии негауссовского поля с логнормальным распределением интенсивности, позволяющие рассчитывать любые моменты чисел фотоэлектронов при любом соотношении времени отбора к радиусу корреляции поля. Выведены аналитические приближения для моментов, уточняющие известную асимптотику и параметрически зависящие не только от дисперсии логарифма интенсивности, но и от относительного времени отбора, определены их области применимости.

Введение. В реальных условиях распространения лазерного излучения в атмосфере случайное поле в месте приема может быть негауссовским вследствие нарушения предпосылок центральной квантовой предельной теоремы [1], например, из-за корреляций: траекторий рассеивателей — при однократном рассеянии в турбулентности [2], актов рассеяния — при многократном рассеянии [3], фаз — при прохождении пучка в турбулентности [4, 5], или из-за малого числа аэрозолей в рассеивающем объеме [2]. В этих случаях результаты по статистике фотоэлектронов (ФЭ) в гауссовских полях [6] несправедливы.

Наиболее широкую область применимости в случаях негауссовского поля имеет логнормальная аппроксимация распределения интенсивности света [4, 5, 7–9]. Отвечающая ей статистика числа n ФЭ в интервале отбора T изучена в [10, 11] для $T \ll \tau_c$ (τ_c — время корреляции поля). В данной статье эта статистика описана на уровне моментов для всех соотношений T и τ_c .

«Точное» численное решение. Пусть $P(t)$ — принимаемая мощность; $U = \int_t^{t+T} P(t') dt'$ — энергия на $[t, t+T]$, m_p, σ_p — параметры логнормального распределения P . «Уровень» $V(t) = \ln P(t)$ — гауссовский случайный процесс со средним и дисперсией

$$m_V = \ln m_p - \frac{1}{2} \ln(1 + \gamma_p^2), \quad \sigma_V = \ln(1 + \gamma_p^2)$$

и коэффициентом автокорреляции $\rho_V(t)$, где $\gamma_p = \sigma_p/m_p$.

В стационарном случае моменты энергии

$$\langle U^k \rangle = \exp(km_V) \int_0^T \dots \int_0^T \exp \left[\frac{\sigma_V^2}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \rho_V(t_i - t_j) \right] dt_1 \dots dt_k. \quad (1)$$

В частности,

$$\begin{aligned} \langle U \rangle &\equiv m_U = T \exp(m_V + \sigma_V^2/2), \\ \langle U^2 \rangle &= 2 \exp(2m_V) \int_0^T (T - \tau) \exp\{\sigma_V^2 [1 + \rho_V(\tau)]\} d\tau. \end{aligned}$$

Используя известную [1] связь между факториальными моментами ФЭ и начальными моментами энергии

$$\langle n^{[k]} \rangle = \eta^k \langle U^k \rangle$$

(η — квантовая эффективность детектора), можно записать выражения для начальных, центральных, факториальных моментов и кумулянтов n любого порядка, в частности,

$$D(n) = (\eta m_p T)^2 \left[\frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \exp\{\sigma_V^2 [1 + \rho_V(\tau)]\} d\tau + (\eta m_p T)^{-1} - 1 \right].$$

Для вычисления относительных моментов $\langle U^k \rangle / \langle U \rangle^k$ энергии разработан эффективный алгоритм [12], использующий симметрии в интегралах типа (1). Численные расчеты моментов ФЭ до 15 порядка проведены для двух ρ_V .

$$\rho_V^{(a)} = \exp(-\tau^2/a^2);$$

$$\rho_V^{(b)} = \exp(-\tau^2/a^2) \cos(\tau/b),$$

для которых

$$\tau_c^{(a)} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \cdot \frac{a}{2}, \quad \tau_c^{(b)} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \exp(-\xi^2/2),$$

где $\xi = a/b$.

На рис. 1 приведены относительная дисперсия k_d и коэффициент асимметрии k_a ФЭ для обоих видов ρ_V . В случае приема лазерного излучения, проходящего через турбулентную атмосферу, параметр σ_V характеризует степень турбулентности атмосферы [4].

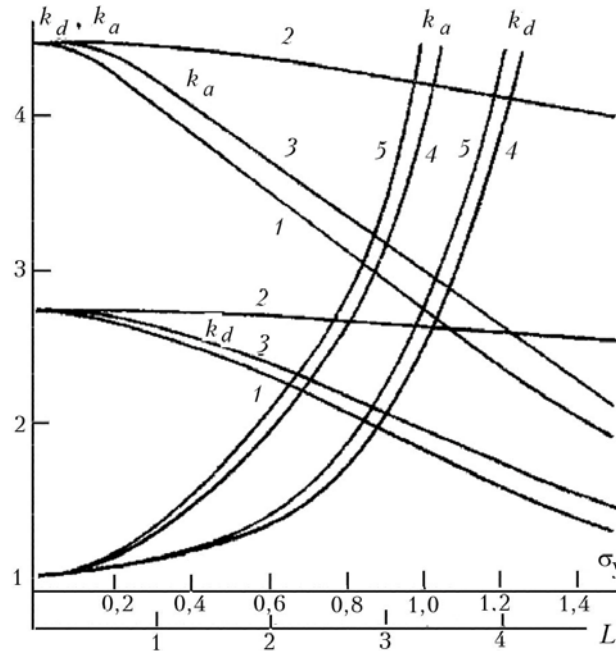


Рис. 1. Зависимость относительной дисперсии k_d и коэффициента асимметрии k_a распределения ФЭ от относительного времени отбора L (кривые 1, 2, 3) при $\sigma_V = 1$ и от степени турбулентности атмосферы σ_V (кривые 4, 5) при $L = 1$. Коэффициенты корреляции: $\rho_V^{(a)}$ (1, 4); $\rho_V^{(b)}$, $\xi = 2$ (2, 5) и $\xi = 1$ (3); $\langle n \rangle = 1$

Из рис. 1 видно, что с уменьшением числа $L = T/\tau_c$ временных фазовых ячеек k_d и k_a стремятся к своим максимальным значениям, полученным в [10, 11], а с ростом L — к значениям, соответствующим распределению Пуассона [6]. Пуассоновская аппроксимация распределения ФЭ применима при умеренно больших L для $\rho_V^{(a)}$ и $\rho_V^{(b)}$ с малыми ξ и при очень больших L для $\rho_V^{(b)}$ с $\xi > 1$. Аппроксимация [10, 11] наоборот, применима при умеренно малых L для $\rho_V^{(b)}$ с $\xi > 1$ и при очень малых L для $\rho_V^{(a)}$ и $\rho_V^{(b)}$ с малыми ξ . С ростом σ_V значения k_d и k_a существенно растут, начиная с $\sigma_V \sim 0,5 \div 0,7$, называемых в [5] «средней» степенью турбулентности. При $\sigma_V = 0$ атмосфера не модулирует амплитудно-стабилизированное излучение лазера и поэтому k_d и k_a соответствуют пуассоновскому распределению. При $\sigma_V \leq 0,3$ распределение ФЭ можно аппроксимировать распределением Пуассона даже для $L \sim 1$. Рис. 1 демонстрирует, что область применимости известных аналитических приближений для распределения и моментов ФЭ [10, 11] ограничена значениями $L \leq 0,2 \div 0,5$ и зависит от вида ρ_V .

Приближенное аналитическое решение. Примем аппроксимацию $\rho_V(t) = 1 - t^2/\tau_c^2$, где $\tau_c^2 = -2/\rho_V(0)$, предполагая, что $\rho_V(t)$ дважды дифференцируема в нуле. Тогда имеем [13]

$$\langle U^k \rangle \simeq \langle U^k \rangle_a = \tau_c^k \exp(\sigma_V^2 k^2/2 + km_V) I_k; \quad (3)$$

где

$$I_k = \int_{-v_*/2}^{v_*/2} \dots \int_{-v_*/2}^{v_*/2} \exp(-\sigma_V^2 \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

$k \geq 2, v_* = T/\tau_* \leq 1/2, \mathbf{x} = \{x_i\}, \mathbf{M} = \{k\delta_{ij} - 1\}, i, j = \overline{1, k}.$

При $k = 2$

$$\langle U^2 \rangle_a = \frac{\tau_*^2}{\sigma_V} \exp(2\sigma_V^2 + 2m_V) \left[v_* \pi^{1/2} \Phi(v_* \sigma_V) - \frac{1}{\sigma_V} (1 - \exp(-v_*^2 \sigma_V^2)) \right],$$

где

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt.$$

При $k \geq 3$ и $\langle U^k \rangle_a$ не выражается в табулированных функциях, поэтому сделаем в I_k приближение. Заменяем переменные интегрирования $\mathbf{y} = \mathbf{u}^T \mathbf{x}$, где \mathbf{u} — ортогональная матрица, диагонализирующая $\mathbf{u}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{u} = \text{diag}(k, k, \dots, k, 0)$ симметричную, неотрицательно-определенную, циркулянтную матрицу \mathbf{M} с собственными числами $\lambda_\mu = k, \mu = \overline{1, k-1}, \lambda_k = 0$. При этом оставим пределы интегрирования без изменений. Тогда

$$I_k \simeq I'_k = \int_{-v_*/2}^{v_*/2} \dots \int_{-v_*/2}^{v_*/2} \exp\left(-k\sigma_V^2 \sum_{\mu=1}^{k-1} y_\mu^2\right) d\mathbf{y} = v_* [(\pi/k)^{1/2} \sigma_V^{-1} \Phi(\mathbf{z})]^{k-1}, \quad (3)$$

где $z = k^{1/2} \sigma_V v_*/2$.

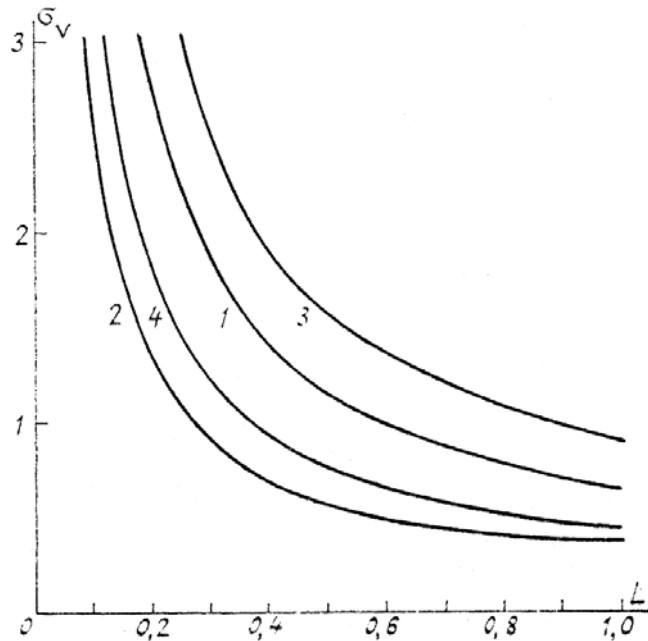


Рис. 2. Линии равных значений погрешности δ аналитического приближения для моментов энергии: $\delta = 5\%, k = 5$ (1), 10 (2); $\delta = 10\%, k = 5$ (3), 10 (4)

С геометрической точки зрения сделанное приближение означает такой поворот k -мерного куба интегрирования, что его ребра становятся параллельными собственным векторам матрицы \mathbf{M} . При $z \ll 1$ этот поворот почти не меняет значение интеграла, то есть I'_k имеет правильную асимптотику $I'_k \simeq v_*^k$. При $z \rightarrow \infty$ эллипсоиды равных значений квадратичной формы в I_k стягиваются к прямой, на которой лежит собственный вектор $\mathbf{b} = \{b_i \equiv \text{const}\}, i = \overline{1, k}$, соответствующий $\lambda_k = 0$, и вклад в интеграл становится пропорциональным длине отрезка этой прямой в объеме интегрирования. Сделанный

поворот уменьшает эту длину в $k^{1/2}$ раз: от длины диагонали $k^{1/2}v_*$ до длины ребра v_* . Поэтому асимптотика $I'_k = v_*[(\pi/k)^{1/2}\sigma_V^{-1}]^{k-1}$ при $z \gg 1$ меньше правильной в $k^{1/2}$ раз. Для уточнения I'_k ее можно скорректировать, например, $I_k \approx I'_k f$, где $f = 1 + (k^{1/2} - 1)\Phi(akz)$, коэффициенты a_k , $k = 2, 3, \dots$, находятся численными методами с помощью [12].

Применимость аналитического приближения. Анализ применимости приближения для $\langle U^k \rangle$, основанного на приближениях (2) и (3), выполнен для $\rho_V^{(a)}, \rho_V^{(b)}$ и значений τ_* , обусловленных выбором параболы в квадратичной аппроксимации ρ_V по второй производной (тейлоровская парабола — т) и по равенству радиусов корреляции (маделевская парабола — м). В случае $\tau_*^{(т)}$ заведомо занижается корреляция, а в случае $\tau_*^{(м)}$ изменяется только форма корреляции при одинаковых радиусах: $\tau_*^{(т,а)} = 2(2/\pi)^{1/2}\tau_c$; $\tau_*^{(т,в)} = 2(2/\pi)^{1/2}(1 + \xi^2/2)^{-1/2} \exp(\xi^2/2)\tau_c$; $\tau_*^{(м,а,в)} = (15,8)\tau_c$; где [6]

$$\tau_c = \int_0^\infty \rho_V^2(\tau) d\tau.$$

На рис. 2 показаны области применимости $\langle U^k \rangle_a$ с I'_k вместо I_k для $\rho_V^{(а)}$ и $\tau_*^{(м)}$. Данные области лежат ниже приведенных кривых и обеспечивают погрешность $\delta = (\langle U^k \rangle_a - \langle U^k \rangle) / \langle U^k \rangle$ не хуже заданной, для всех моментов, не выше приведенных. Как и следовало ожидать, точность полученного аналитического приближения ухудшается с ростом k , L , σ_V . Для $k \leq 5$ с $\delta \leq 5\% \langle U^k \rangle_a$ применимо в области слабых $0 < \sigma_V < 0,5$, средних $0,5 \leq \sigma_V \leq 0,9$ и сильных $0,9 < \sigma_V < 1,5$ флуктуаций интенсивности при $L > 1,3$; $0,66 \leq L \leq 1,3$ и $0,37 < L < 0,666$ соответственно. Для $k = 2$ $\delta \leq 5\%$ при $0 < L \leq 1$, $0 < \sigma_V \leq 4$.

Заключение. Полученные статистические характеристики чисел ФЭ на уровне моментов справедливы для негауссовских полей с логнормальным распределением интенсивности на точечной апертуре при любом соотношении L времени отбора и радиуса корреляции поля. Эти характеристики параметрически зависят от L и σ_V , что позволяет проводить анализ статистики ФЭ от условий приема лазерных сигналов и решать обратные задачи статистики ФЭ. Предложенные аналитические приближения для моментов ФЭ имеют более широкую область применимости по сравнению с известными [10, 11], просты в использовании.

1. Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики. М.: Мир, 1970. 428 с
2. Кросиньяни Б., Ди Порто О., Бертолотти М. Статистические свойства рассеянного света. М.: Наука, 1980. 206 с.
3. Лазерное зондирование тропосферы и подстилающей поверхности /Самохвалов И.В., Копытны Ю.Д., Ипполитов И.И. и др. Новосибирск: Наука, 1987. 262 с.
4. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере /Гурвич А.С., Кон А.Н., Миронов В.Л., Хмелевцов С.С. М.: Наука, 1976. 277 с.
5. Распространение лазерного пучка в атмосфере /Под ред. Д. Стробена. М.: Мир, 1981. 414 с.
6. Глазов Г.Н. Статистические вопросы лидарного зондирования атмосферы. Новосибирск: Наука, 1987. 312 с.
7. Перина Я. Квантовая статистика линейных и нелинейных оптических явлений. М.: Мир, 1987. 368 с.
8. Кохама и др. Характеристики распространения лазерного излучения в атмосфере. Распределение кумулятивной вероятности //Дэнси цусин гаккай ромбун си (В). 1973. Т. 56. В. № 4. С. 133.
9. Расулов И. К. Статистика фотоотчетов и оптимальный прием лазерных сигналов через турбулентную атмосферу: Дис. ... канд. техн. наук. Ташкент, 1987.
10. Diamant P., Teich M.C. //J. Opt. Soc. Airier. 1970. V. 60. № 11. P. 1489–1494.
11. Rosenberg S., Teich M.C. //J. Appl. Phys. 1972. V. 43. № 3. P. 1256–1262.
12. Глазов Г.Н., Дубягин В.М. Вычисление многократного интеграла от абсолютно симметричной функции по многомерному кубу //ГосФАП. 1985. № 4 (67). Пер. № 4.053. № 50850000040.
13. Глазов Г.Н., Дубягин В.М. //II Совещание по атмосфер. оптике (Тезисы докл.). Томск: Изд. ТФ СО АН СССР, 1980. Ч. 2. С. 104–107.

Институт оптики атмосферы СО АН СССР,
Томск

Поступила в редакцию
9 апреля 1991 г.

G. N. Glazov, V. M. Dubyagin. **Statistics of Photoelectrons Produced by Laser Signals with Log-normal Intensity Distribution.**

Expressions for the energy moments of a nongaussian field with the lognormal intensity distribution are obtained. The expressions enable one to calculate any moments of the photoelectrons numbers at an arbitrary relationship between the sampling interval and the field radius of correlation. Analytical approaches to description of the moments are derived that make the known asymptotics more correct. The approaches depend not only on the variance of the intensity logarithm, but on the relative value of the sampling time. The applicability limits of the approaches are determined.