

В.П. Будак, А.В. Лубенченко

Точность и границы применимости приближения квазиоднократного рассеяния при расчете сигнала обратного рассеяния

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию 27.02.2007 г.

Рассматривается задача отражения света от мутной среды. Предложен способ разделения однократного рассеяния на рассеяние, приводящее и не приводящее к изменению направления распространения излучения относительно нормали к поверхности. Коэффициенты отражения представляются в виде ряда по кратностям рассеяния с однократной сменой направления. Для каждой кратности найдено точное линейное интегродифференциальное уравнение с однородным граничным условием. Применение метода дискретных ординат приводит к линейным матричным уравнениям. Получено решение этих уравнений без использования малоуглового приближения в виде свертки матричных экспонент. Показана область применимости квазиоднократного приближения в зависимости от оптических параметров зондируемой среды.

В настоящее время для интерпретации результатов оптического дистанционного зондирования с помощью как лидарных, так и спутниковых измерений используется приближение квазиоднократного рассеяния. Настоящая статья посвящена задаче отражения солнечного излучения от атмосферы Земли. В квазиоднократном приближении коэффициент яркости отраженного излучения является первым членом ряда теории возмущений по обратному рассеянию [1]:

$$R_1(\tau, \Omega_0, \Omega) = \int_0^\tau L_0(t, \Omega_0, \Omega') x_t(\gamma) L_0(\tau - t, \Omega', \Omega) dt d\Omega', \quad (1)$$

где τ — оптическая толщина слоя; $\Omega_0 = \{\varphi_0, \theta_0\}$ — единичный вектор направления падения излучения; $\Omega = \{\varphi, \theta\}$ — единичный вектор направления визирования излучения; φ, θ — азимутальный и полярный углы; $L_0(\tau, \Omega_0, \Omega)$ — коэффициент яркости прошедшего излучения в малоугловом приближении [2]. Основной проблемой использования данного приближения является неоднозначность разделения индикатрисы рассеяния $x(\gamma)$ на «острую» малоугловую часть $x_o(\gamma)$, описывающую рассеяние вперед, и на «тупую» часть $x_t(\gamma)$, описывающую обратное отражение:

$$x(\gamma) = (1 - a)x_o(\gamma) + ax_t(\gamma), \quad (2)$$

где a — малый параметр; γ — угол рассеяния.

Решение проблемы определения $x_t(\gamma)$ не может быть формализовано и носит субъективный характер. А при удачном разделении можно добиться хорошей точности в интерпретации отраженного сигнала. Исследования траекторий лучей в мутных

средах, проведенные с помощью программ статистического моделирования, показывают, что малоугловое приближение не описывает потока отраженного излучения от реальной среды даже при сильной вытянутости упругой индикатрисы. Поэтому становится актуальной проблема нахождения границ применимости приближения квазиоднократного рассеяния.

Для отражения излучения от мутной среды необходимо, чтобы произошло хотя бы одно «сильное» рассеяние (рис. 1), приводящее к изменению направления распространения излучения относительно нормали к поверхности. В случае отражения от оптически плотных сред в отраженном сигнале значительно возрастает доля «сильного» многократного рассеяния.

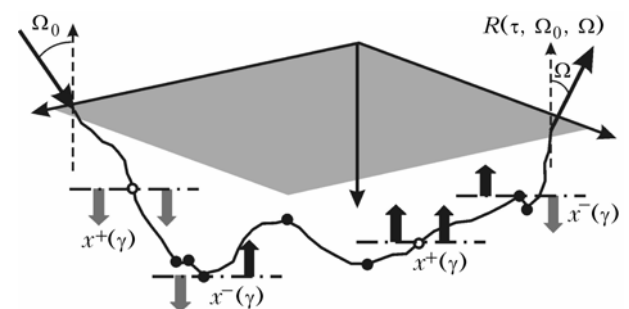


Рис. 1. Траектория луча, отраженного от мутной среды излучения

На рис. 1 показана типичная траектория луча, отраженного от мутной среды, полученная с помощью программы статистического моделирования. При моделировании использовались альbedo однократного рассеяния $\Lambda = 0,98$ и индикатриса

Хенни–Гринштейна с параметром $g = 0,95$. Как можно заметить, на фоне многократных рассеяний, не приводящих к изменению направления распространения излучения относительно нормали к поверхности, выделяется «сильное» рассеяние, меняющее направление нисходящего потока излучения на восходящий, и наоборот. Это позволяет разделить индикатрису рассеяния на «положительную» часть $x^+(\gamma)$, описывающую рассеяние, не приводящее к смене направления распространения излучения, и на «отрицательную» часть $x^-(\gamma)$, описывающую «сильное» рассеяние. Такое разделение — однозначное и происходит в каждом акте рассеяния в зависимости от направления падения рассеиваемого излучения.

В этом случае следует ожидать, что коэффициент яркости отраженного излучения раскладывается по кратностям «сильного» рассеяния:

$$R(\tau, \Omega_0, \Omega) = \sum_{k=1}^N R_k(\tau, \Omega_0, \Omega). \quad (3)$$

Если ограничиться только одним «сильным» рассеянием, то получим более точное, чем квазиоднократное, приближение. Анализ решения, учитывающий многократное «сильное» рассеяние, позволит найти условия, при которых вклад многократных «сильных» рассеяний несуществен, и соответственно верхнюю границу применимости приближения квазиоднократного рассеяния.

Коэффициент яркости отраженного излучения характеризует функция отражения, являющаяся решением граничной задачи уравнения переноса. Но само уравнение переноса несет избыточную информацию о поведении потока излучения в глубине среды, поэтому лучше находить функцию отражения из уравнений, содержащих в качестве неизвестных только саму эту функцию. Такие уравнения известны. Это нелинейные интегро-дифференциальные уравнения Амбарцумяна–Чандрасекара [3]. Запишем уравнение Амбарцумяна–Чандрасекара для коэффициента яркости отраженного излучения $R(\tau, \Omega_0, \Omega)$, используя разделение индикатрисы на $x^+(\gamma)$ и $x^-(\gamma)$:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} R(\tau, \Omega_0, \Omega) + \frac{\eta + \xi}{\eta \xi} R(\tau, \Omega_0, \Omega) - \\ & - \frac{\Lambda}{2} \int_{\Omega_+} x^+(\Omega_0 - \Omega') R(\tau, \Omega', \Omega) \frac{d\Omega'}{\eta'} - \\ & - \frac{\Lambda}{2} \int_{\Omega_-} R(\tau, \Omega_0, \Omega') x^+(\Omega' - \Omega) \frac{d\Omega'}{\eta'} = \frac{\Lambda}{4} x^-(\Omega_0 - \Omega) + \\ & + \Lambda \int_{\Omega_+} \int_{\Omega_-} R(\tau, \Omega_0, \Omega') x^-(\Omega' - \Omega'') R(\tau, \Omega'', \Omega) \frac{d\Omega'}{\eta'} \frac{d\Omega''}{\eta''}, \quad (4) \end{aligned}$$

где $\xi = \cos \theta_0$, $\eta = \cos \theta$, Ω_{\pm} — верхняя и нижняя полусферы направления относительно нормали к поверхности. Нетрудно видеть, разделение индикатрисы рассеяния на «положительную» и «отрица-

тельную» части в уравнении Амбарцумяна (4) происходит автоматически по интервалу интегрирования. Тем самым «положительная» и «отрицательная» индикатрисы являются частями реальной индикатрисы, однако верхние символы сохраним для наглядности.

Для интегро-дифференциального уравнения (4) запишем граничное условие в случае отражения от свободного слоя:

$$R(\tau, \Omega_0, \Omega) \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (5)$$

Левая часть уравнения (4) описывает рассеяние излучения без изменения направления движения относительно нормали к поверхности. Правая часть, напротив, содержит члены с «сильным» рассеянием. Если использовать разложение коэффициента яркости отраженного излучения по кратностям «сильного» рассеяния (3), то нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (4) распадется на линейные уравнения для каждой кратности «сильного» рассеяния $k = 2n + 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$ — нечетные члены, соответствующие отраженному излучению:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} R_1(\tau, \Omega_0, \Omega) + \frac{\eta + \xi}{\eta \xi} R_1(\tau, \Omega_0, \Omega) - \\ & - \frac{\Lambda}{2} \int_{\Omega_+} x^+(\Omega_0 - \Omega') R_1(\tau, \Omega', \Omega) \frac{d\Omega'}{\eta'} - \\ & - \frac{\Lambda}{2} \int_{\Omega_-} R_1(\tau, \Omega_0, \Omega') x^+(\Omega' - \Omega) \frac{d\Omega'}{\eta'} = \\ & = \frac{\Lambda}{4} x^-(\Omega_0 - \Omega), \quad k = 1, (n = 0), \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} R_{2n+1}(\tau, \Omega_0, \Omega) + \frac{\eta + \xi}{\eta \xi} R_{2n+1}(\tau, \Omega_0, \Omega) - \\ & - \frac{\Lambda}{2} \int_{\Omega_+} x^+(\Omega_0 - \Omega') R_{2n+1}(\tau, \Omega', \Omega) \frac{d\Omega'}{\eta'} - \\ & - \frac{\Lambda}{2} \int_{\Omega_-} R_{2n+1}(\tau, \Omega_0, \Omega') x^+(\Omega' - \Omega) \frac{d\Omega'}{\eta'} = \\ & = \Lambda \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\Omega_+} \int_{\Omega_-} R_{2i+1}(\tau, \Omega_0, \Omega') x^-(\Omega' - \Omega'') \times \\ & \times R_{2(n-i)-1}(\tau, \Omega'', \Omega) \frac{d\Omega'}{\eta'} \frac{d\Omega''}{\eta''}, \quad k > 1, (n \geq 1). \quad (7) \end{aligned}$$

Решение уравнений (6) и (7) будем искать методом дискретных ординат (ДО) [3, 4]. Для этого разложим $R_k(\tau, \Omega_0, \Omega)$ и индикатрису по азимутальным гармоникам:

$$R_k(\tau, \Omega, \Omega_0) = \sum_{m=0}^{\infty} R_k^m(\tau, \eta, \xi) \cos m(\varphi_0 - \varphi); \quad (8)$$

$$x(\gamma) = x(\Omega_0 - \Omega) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m(\eta, \xi) \cos m(\varphi_0 - \varphi). \quad (9)$$

Заменим интегралы в уравнениях (6) и (7) на квадратурные суммы, введя узлы μ_i и веса a_i квадратурной формулы, а также сетку $\{\eta_i, \xi_j\}$ по переменным η, ξ :

$$\begin{aligned} \eta_i &= \mu_i, \quad 0 < \eta_i \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, N; \\ \xi_j &= \mu_j, \quad 0 < \xi_j \leq 1, \quad j = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (10)$$

Для введенной сетки определяем матрицы азимутальных гармоник отражения $\overline{R}_k(\tau)$ (индекс m будем опускать), «положительной» \overline{x}^+ и «отрицательной» \overline{x}^- частей индикатрисы следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{R}_k(\tau) &= R_k^m(\tau, \eta_i, \xi_j), \quad \overline{x}^+ = x^m(\eta_i, \xi_j), \\ \overline{x}^- &= x^m(-\eta_i, \xi_j). \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда интегро-дифференциальные уравнения (6) и (7) сводятся к матричным дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d}{d\tau} \overline{R}_1(\tau) - \left(\frac{\Lambda}{2} \overline{x}^+ \overline{S} - \overline{E} \right) \overline{\Psi} \overline{R}_1(\tau) - \overline{R}_1(\tau) \overline{\Psi} \left(\frac{\Lambda}{2} \overline{S} \overline{x}^- - \overline{E} \right) = \frac{\Lambda}{4} \overline{x}^-, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \overline{R}_{2n+1}(\tau) - \left(\frac{\Lambda}{2} \overline{x}^+ \overline{S} - \overline{E} \right) \overline{\Psi} \overline{R}_{2n+1}(\tau) - \\ - \overline{R}_{2n+1}(\tau) \overline{\Psi} \left(\frac{\Lambda}{2} \overline{S} \overline{x}^- - \overline{E} \right) = \overline{F}_n(\tau), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\overline{F}_n(\tau) = \Lambda \sum_{i=0}^{n-1} \overline{R}_{2i+1}(\tau) \overline{\Psi} \overline{S} \overline{x}_m^- \overline{S} \overline{\Psi} \overline{R}_{2(n-i)-1}(\tau),$$

где \overline{E} — единичная диагональная матрица; $\overline{S} = \text{diag}(a_i)$; $\overline{\Psi} = \text{diag}(1/\mu_i)$.

Рассмотрим отражение от полубесконечной среды. В этом случае пропадает зависимость коэффициента яркости отраженного излучения от оптической толщи, а в уравнениях (12) и (13) дифференциальный член:

$$\overline{A} \overline{R}_{2n+1} + \overline{R}_{2n+1} \overline{A}' = \overline{F}_n, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \left(\overline{E} - \frac{\Lambda}{2} \overline{x}^+ \overline{S} \right) \overline{\Psi}; \quad \overline{F}_0 = \frac{\Lambda}{4} \overline{x}^-, \\ \overline{F}_n &= \Lambda \sum_{i=0}^{n-1} \overline{R}_{2i+1} \overline{\Psi} \overline{S} \overline{x}_m^- \overline{S} \overline{\Psi} \overline{R}_{2(n-i)-1}, \quad n \geq 1; \end{aligned}$$

штрих обозначает транспонированную матрицу.

Решение линейного матричного уравнения (14) подробно исследовано в теории матриц [5], и его можно записать в виде свертки

$$\overline{R}_1 = \int_0^\infty \exp(-\overline{A}t) \frac{\Lambda}{4} \overline{x}^- \exp(-\overline{A}'t) dt, \quad (15)$$

$$\overline{R}_{2n+1} = \int_0^\infty \exp(-\overline{A}t) \overline{F}_n \exp(-\overline{A}'t) dt, \quad (16)$$

где $\exp(\cdot)$ — матричная экспонента. Тогда коэффициент яркости отраженного излучения будем рассчитывать, используя (3) и (8):

$$\overline{R} = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \overline{R}_{2n+1} \cos m(\varphi_0 - \varphi). \quad (17)$$

Матричная структура решения позволила реализовать вычисления по формулам (15)–(17) в математическом пакете MatLab. Расчет при современном уровне развития вычислительной техники занимает с очень высокой точностью несколько секунд для любой степени вытянутости индикатрисы.

Вернемся к отражению излучения от слоя. Решение матричного дифференциального уравнения (12) с граничным условием (5) будем искать с помощью преобразования Лапласа. Особенности применения преобразования Лапласа к матричным дифференциальным уравнениям приведены в монографии [5]. После соответствующих преобразований получим решение (12) и (13) в виде свертки матричных экспонент:

$$\begin{aligned} \overline{R}_1(\tau) &= \int_0^\tau \exp \left[\left(\frac{\Lambda}{2} \overline{x}_m^+ \overline{S} - \overline{E} \right) \overline{\Psi} t \right] \times \\ &\times \frac{\Lambda}{4} \overline{x}_m^- \exp \left(\overline{\Psi} \left(\frac{\Lambda}{2} \overline{S} \overline{x}_m^- - \overline{E} \right) t \right) dt, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \overline{R}_{2n+1}(\tau) &= \int_0^\tau \exp \left[\left(\frac{\Lambda}{2} \overline{x}_m^+ \overline{S} - \overline{E} \right) \overline{\Psi} t \right] \times \\ &\times \int_0^t \overline{F}_n(t') \exp \left(\overline{\Psi} \left(\frac{\Lambda}{2} \overline{S} \overline{x}_m^- - \overline{E} \right) (t - t') \right) dt' dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Формулы (15) и (18) описывают отражение с одним «сильным» рассеянием. Вид решения для коэффициента яркости отраженного излучения (18) в приближении «сильного» однократного рассеяния похож на решение (1), полученное с помощью приближения квазиоднократного рассеяния. Но в отличие от (1) при выводе (15) и (18) не применялось малоугловое приближение.

На рис. 2 представлены результаты расчетов коэффициентов яркости отраженного излучения: от мутной полубесконечной среды и от слоя $\tau = 5$. Расчеты проводились по формуле (15), модифицированному методу сферических гармоник [6] и методу Монте-Карло (программа SPIM-L). В программе SPIM-L реализована возможность следить за кратностью смен направления движения относительно нормали к поверхности. Сравнение расчетов и результатов моделирования проводилось для сумм по кратностям «сильного» рассеяния до кратности k включительно. При расчете и моделировании

использовались $\Lambda = 0,98$ и индикатриса Хеньи–Гринштейна с параметром $g = 0,95$. Сравнение с результатами расчетов по [6] показывает, что при этих параметрах вклад кратностей $k > 19$ несуществен.

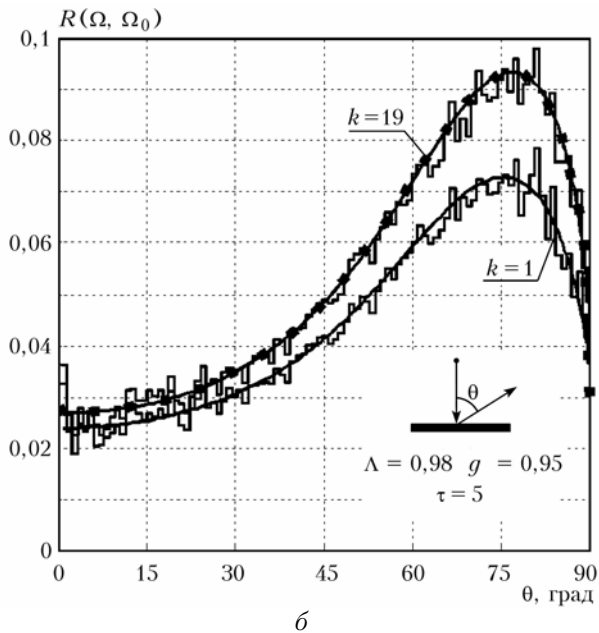
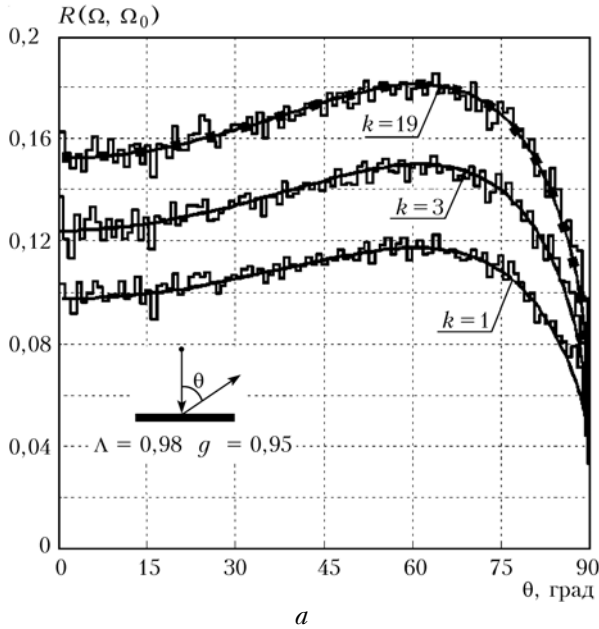


Рис. 2. Коэффициенты яркости отраженного излучения: *a* – отражение от мутной полубесконечной среды, *б* – отражение от слоя оптической толщиной $\tau = 5$. Угол падения – нормальный. Цифрами обозначена кратность «сильного» рассеяния k . Сплошной линией показаны результаты расчета по формуле (15), точками – расчет по модифицированному методу сферических гармоник [6], гистограммой – результаты статистического моделирования по программе SPIM-L

Из анализа формул (15) и (16) можно получить условие, когда отражение с одним «сильным» рассеянием будет определять весь отраженный по-

ток излучения. Для этого необходимо, чтобы $F_0 \gg F_1$ или

$$\frac{\Lambda}{4} \bar{x}^- \gg \Lambda \bar{R}_1^- \bar{\psi} \bar{S} \bar{x}_m^- \bar{S} \bar{R}_1^- \bar{S}. \quad (20)$$

Проинтегрируем неравенство (20) по всем косинусам углов падения и углов визирования, что соответствует умножению слева и справа на матрицу \bar{S} :

$$\frac{\Lambda}{4} \bar{S} \bar{x}^- \bar{S} \gg \Lambda \bar{S} \bar{R}_1^- \bar{\psi} \bar{S} \bar{x}_m^- \bar{S} \bar{R}_1^- \bar{S} > \Lambda \left(\frac{1}{2} \bar{S} \bar{R}_1^- \bar{S} \right)^2 \bar{S} \bar{x}_m^- \bar{S}. \quad (21)$$

Если использовать оценки

$$\bar{S} \bar{x}^- \bar{S} \leq b,$$

$$\begin{aligned} \bar{S} \bar{R}_1^- \bar{S} < \bar{S} \int_0^\infty \exp[-(1-\Lambda)\bar{\psi}t] \frac{\Lambda}{4} \bar{x}^- \times \\ \times \exp[-(1-\Lambda)\bar{\psi}'t] dt \bar{S} \leq \frac{\Lambda}{1-\Lambda} b, \end{aligned} \quad (22)$$

то из неравенств (21) и (22) получим

$$\Lambda < \Lambda_g \approx \frac{1}{1+b/\varepsilon}. \quad (23)$$

Здесь $b = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 x(\eta) d\eta$ определяет вероятность испытания «сильного» рассеяния; ε – величина много меньше единицы. При уменьшении степени вытянутости индикатрисы увеличивается вклад «сильных» рассеяний высших кратностей. Напротив, при уменьшении значения альbedo однократного «сильного» рассеяния увеличивается вклад однократного «сильного» рассеяния. При достижении некоторого критического значения Λ_g отражение будет формироваться, в основном, однократным «сильным» рассеянием. Параметр Λ_g зависит от индикатрисы. Для индикатрисы Хеньи–Гринштейна можно предложить оценку значения Λ_g :

$$\Lambda_g \approx \frac{1}{1+[3(1-g)]^{3/2}}. \quad (24)$$

Если параметры среды удовлетворяют условию $\Lambda < \Lambda_g$, то возможно применение приближения квазиоднократного рассеяния для расчета коэффициентов яркости отраженного мутной полубесконечной средой излучения.

В случае отражения излучения от реальной среды толщиной τ для оценки границы применимости приближения квазиоднократного рассеяния будем использовать отношение $\rho_1(\tau, \theta_0)/\rho_\Sigma(\tau, \theta_0)$. Здесь

$$\rho_1(\tau, \theta_0) = \int R_1(\tau, \Omega, \Omega_0) d\Omega$$

– полный коэффициент яркости отраженного излучения с однократным «сильным» рассеянием;

$$\rho_{\Sigma}(\tau, \theta_0) = \int R(\tau, \Omega, \Omega_0) d\Omega$$

— полный коэффициент яркости отраженного излучения.

На рис. 3 представлена зависимость отношения $\rho_1(\tau, \theta_0)/\rho_{\Sigma}(\tau, \theta_0)$ от оптической толщи. Угол падения нормальный.

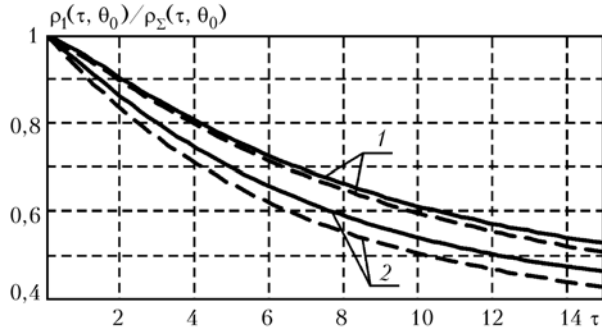


Рис. 3. Зависимость отношения $\rho_1(\tau, \theta_0)/\rho_{\Sigma}(\tau, \theta_0)$ от оптической толщи: для облачного покрова С1 кривые (1); для дымки L (2). Угол падения нормальный. Сплошной линией представлены результаты расчета для длины волны 300 нм, штриховой — для длины волны 700 нм

Расчет $\rho_1(\tau, \theta_0)$ проводился по формуле (18), $\rho_{\Sigma}(\tau, \theta_0)$ — по формулам работы [6] и (19). При расчете индикатрисы использовались параметры Дейрменджана [7]. Диапазон оптических толщ взят с запасом для определения границ применимости квазиоднократного приближения. Влияние поглощения озоном при расчетах не учитывалось, поскольку озон является переменным газовым компонентом атмосферы, зависящим от времени года и суток, географического места. Поэтому для учета этого фактора необходима дополнительная информация, не влияющая на саму методику. Однако появление поглощения приводит к уменьшению однократного альbedo рассеяния и при условии $\Lambda < \Lambda_g$ погрешность квазиоднократного приближения уменьшается.

В таблице дана зависимость $\rho_1(\tau, \theta_0)/\rho_{\Sigma}(\tau, \theta_0)$ от толщи и типа мутной среды. Из анализа таблицы можно сделать вывод, что при отражении от оптической толщи $\tau > 2$ вклад многократных «сильных» рассеяний в коэффициент яркости будет более 10% для всех типов облаков и дымок. Соответственно величина $\rho_1(\tau, \theta_0)/\rho_{\Sigma}(\tau, \theta_0)$ будет определять минимальную ошибку при использовании приближения квазиоднократного рассеяния.

Зависимость $\rho_1(\tau, \theta_0)/\rho_{\Sigma}(\tau, \theta_0)$ от толщи и типа мутной среды

τ	Облако С1		Облако С3		Дымка М		Дымка L		Дымка Н	
	300 нм	700 нм	300 нм	700 нм	300 нм	700 нм	300 нм	700 нм	300 нм	700 нм
0,5	0,9814	0,9797	0,9798	0,9715	0,9591	0,9464	0,9662	0,9559	0,9490	0,9339
1,0	0,9578	0,9549	0,9552	0,9406	0,9176	0,8954	0,9302	0,9119	0,9009	0,8705
1,5	0,9325	0,9286	0,9290	0,9096	0,8786	0,8501	0,8950	0,8712	0,8581	0,8161
2,0	0,9069	0,9022	0,9026	0,8793	0,8422	0,8096	0,8614	0,8337	0,8196	0,7687
2,5	0,8817	0,8763	0,8768	0,8501	0,8083	0,7731	0,8296	0,7991	0,7846	0,7271
3,0	0,8572	0,8513	0,8518	0,8222	0,7768	0,7400	0,7997	0,7672	0,7526	0,6900
3,5	0,8338	0,8273	0,8279	0,7957	0,7477	0,7098	0,7716	0,7377	0,7234	0,6570
4,0	0,8114	0,8045	0,8051	0,7706	0,7206	0,6822	0,7454	0,7105	0,6965	0,6273
4,5	0,7902	0,7829	0,7835	0,7471	0,6956	0,6569	0,7209	0,6854	0,6717	0,6006
5,0	0,7700	0,7624	0,7630	0,7249	0,6723	0,6337	0,6981	0,6621	0,6489	0,5766
5,5	0,7509	0,7430	0,7436	0,7041	0,6508	0,6123	0,6769	0,6406	0,6277	0,5549
6,0	0,7329	0,7246	0,7253	0,6846	0,6309	0,5925	0,6570	0,6207	0,6082	0,5354
6,5	0,7158	0,7073	0,7080	0,6663	0,6124	0,5743	0,6386	0,6023	0,5900	0,5176
7,0	0,6997	0,6910	0,6917	0,6492	0,5952	0,5575	0,6215	0,5852	0,5731	0,5016
7,5	0,6845	0,6756	0,6763	0,6332	0,5793	0,5419	0,6055	0,5693	0,5575	0,4870
8,0	0,6702	0,6611	0,6618	0,6183	0,5645	0,5275	0,5906	0,5546	0,5429	0,4738
8,5	0,6566	0,6474	0,6482	0,6043	0,5508	0,5142	0,5768	0,5410	0,5294	0,4617
9,0	0,6438	0,6345	0,6353	0,5913	0,5381	0,5018	0,5639	0,5283	0,5168	0,4507
9,5	0,6318	0,6224	0,6231	0,5791	0,5263	0,4903	0,5519	0,5166	0,5050	0,4407
10,0	0,6204	0,6109	0,6117	0,5676	0,5152	0,4796	0,5407	0,5056	0,4940	0,4315

Авторы выражают благодарность профессору И.В. Самохвалову за постановку задачи и М.В. Лукашевскому за предоставление программы статистического моделирования SPIM-L.

1. Wang M.C., Guth E. On the Theory of Multiple Scattering, Particularly of Charged Particles // Phys. Rev. 1953. V. 89 N 6. P. 1256–1266.
2. Goudsmit S., Saunderson J.L. Multiple Scattering of Electrons // Phys. Rev. 1940. Part. I. V. 57. P. 24–29. Part. II. V. 58. P. 36–42.
3. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1956. 462 с.

4. Гермогенова Т.А., Золотухин В.Г., Климанов В.А., Машикович В.П., Миськевич А.И., Суворов А.П. Альbedo нейтронов. М.: Атомиздат, 1973. 280 с.
5. Bellman R. Introduction to Matrix Analysis. N.Y.: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1960.
6. Будак В.П., Козельский А.В., Савицкий Е.Н. Улучшение сходимости метода сферических гармоник при сильном анизотропном рассеянии // Оптика атмосф. и океана. 2004. 17. № 1. С. 36–41.
7. Дейрменджан Д. Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами. М.: Мир, 1971. 168 с.

V.P. Budak, A.V. Lubenchenko. Precision and application range of the quasi-single scattering approximation at the calculation of the backscattering signal.

In this paper the problem of the light reflection from a turbid medium slab is considered. The method of the single scattering separation into the scattering, leading or not leading to a change of the radiation propagation direction relative normal to the surface is offered. The reflectance is represented as a series on the scattering multiplicities with single change of the direction. For each multiplicity the precise linear integro-differential equation with homogeneous boundary conditions is derived. The application of the discrete ordinates method brings to the linear matrix equations. The solution of these equations without application of the small angle approximation in the matrix exponential curves form is obtained. The application range of the quasi-single scattering approximation is uniquely determined.