

В.В. Воробьев

## Метод и некоторые результаты численного моделирования флуктуаций интенсивности плоской световой волны за фазовым экраном в области многолучевости.

### 2. Флуктуации за одномерным экраном

Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 22.10.2001 г.

Получены соотношения между распределением флуктуаций угла рефракции на статистически неоднородном фазовом экране и флуктуациями усредненной по апертуре приемника интенсивности света в области многолучевости. Анализируются условия применимости этих соотношений. На их основе проведено численное моделирование процесса мерцаний звезд при их наблюдении через атмосферу Земли из космоса. Показано хорошее согласие статистических характеристик смоделированных и реальных реализаций мерцаний.

В работе [1] получены соотношения для расчета характеристик мерцаний усредненных по ансамблю реализаций и по апертуре приемника, сформулированы условия их применимости. В данной статье приведены результаты численного моделирования мерцаний, вызываемых неоднородностями атмосферы слоистого типа, которым можно поставить в соответствие одномерный фазовый экран.

Определим среднюю интенсивность на прямоугольной приемной апертуре с полуширинами  $R_z$  по вертикальной оси и  $R_y$  – по горизонтальной как

$$I_S(z, R_z, R_y) = \frac{1}{4R_z R_y} \int_{-R_z}^{R_z} \int_{-R_y}^{R_y} I(z+z', y+y') dz' dy'. \quad (1)$$

В отличие от аналогичного определения в работе [1] здесь отсутствует усреднение по реализациям, величина  $I_S$  является флуктуирующей.

Из анализа, проведенного в [1], следует, что в том случае, когда размеры апертуры  $R_z$  и  $R_y$  много больше, чем характерные пространственные размеры прикаустической области  $l_k$ , средняя интенсивность света за фазовым экраном, на который падает плоская волна единичной интенсивности, может рассчитываться по формуле

$$I_S(z, y) = \frac{1}{4R_z R_y} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \theta \left[ 1 - \left( \frac{\eta + L\gamma_\eta(\eta, \zeta) - z}{R_z} \right)^2 \right] \theta \times \left[ 1 - \left( \frac{\zeta + L\gamma_\zeta(\eta, \zeta) - y}{R_y} \right)^2 \right] d\zeta d\eta, \quad (2)$$

где  $\eta$  и  $\zeta$  – координаты точек на фазовом экране;  $\theta(x)$  – единичная, ступенчатая функция;  $\gamma_\eta(\eta, \zeta) =$

$= \partial S(\eta, \zeta) / \partial \eta$ ,  $\gamma_\zeta(\eta, \zeta) = \partial S(\eta, \zeta) / \partial \zeta$  – компоненты углов рефракции;  $S(\eta, \zeta)$  – распределение эйконала на фазовом экране;  $L$  – расстояние от экрана до плоскости наблюдения.

В данной статье рассмотрим случай одномерного фазового экрана, на котором задано распределение угла рефракции  $\gamma(\eta) = \gamma_\eta(\eta) = \partial S(\eta) / \partial \eta$  как функции одной переменной  $\eta$ . Имея в виду применение к интерпретации измерений мерцаний в космосе, в качестве этой координаты выберем вертикаль, проходящую через точку перигея среднего для диапазона измерений светового луча, и будем отсчитывать ее от поверхности Земли. При этом  $\gamma_\zeta = 0$ , величина  $l_k$  определяется как

$$l_k(\eta) = \frac{L}{k} \left( k \frac{27}{24} \frac{d^3 S(\eta)}{d\eta^3} \right)^{1/3},$$

а выражение (2) после интегрирования по координате  $\zeta$  принимает вид

$$I_S(z) = \frac{1}{2R_z} \int_{-\infty}^{\infty} \theta \left[ 1 - \left( \frac{\eta + L\gamma(\eta) - z}{R_z} \right)^2 \right] d\eta. \quad (3)$$

Условия применимости выражения, аналогичного выражению (3), в работе [1] были сделаны на основании оценок отличий подынтегральной функции от ступенчатой  $\theta$ -функции при учете кубического члена разложения разности эйконала в двух точках. Здесь для иллюстрации работоспособности этого соотношения приведем сравнение точного и приближенного решений задачи дифракции света за гауссовым фазовым экраном с распределением  $\varphi(z) = kS(z) = -30\pi \times \exp[-(z/l_0)^2]$ , значением  $l_0 = 5$  м, на расстоянии  $L = 3000$  км. Волновое число  $k$  в расчетах выбрано

равным  $10^7 \text{ м}^{-1}$ . Экран с такими параметрами создает сложную дифракционную картину в плоскости наблюдения, центральная часть которой изображена на рис. 1,а. Она рассчитана методом быстрого преобразования Фурье.

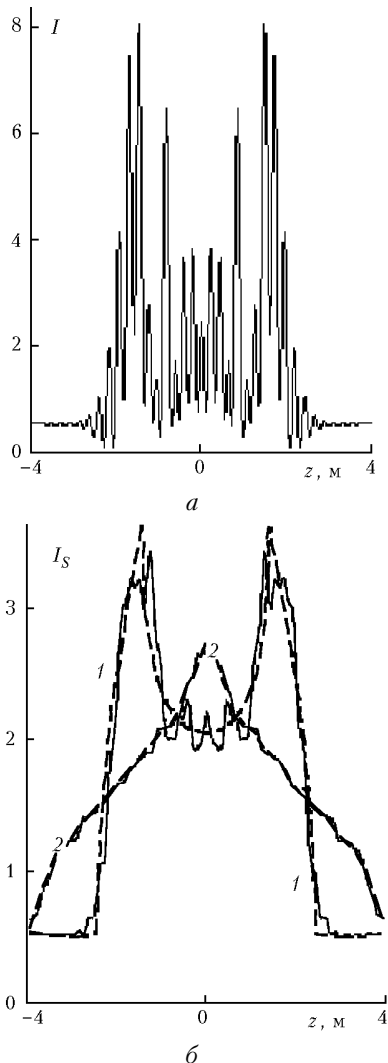


Рис. 1. Распределение интенсивности в области многолучевости при дифракции плоской волны на экране с гауссовым возмущением фазы. Неусредненное распределение (а), усредненное (б) при полуширине апертуры 0,5 (1) и 2 м (2). Сплошные кривые – точное решение, штриховые – приближенное

На рис. 1,б представлены распределения средних интенсивностей, рассчитанных как скользящее среднее по апертурам с полуширинами 0,5 и 2 м. При этом сплошными линиями на рис. 1,б представлены результаты усреднения точных распределений интенсивности, пунктиром – рассчитанные по формуле (3). Максимальное значение масштаба  $l_k(z)$  при заданном расстоянии  $L$  и параметрах фазового экрана равно 0,45 м. Из рис. 1 видно, что уже при значении  $R_z = 0,5$  м отличие между приближенными и точными зависимостями невелико, а при  $R_z = 2$  м приближенная и точная зависимости с графической точностью

совпадают, т.е. в данном примере для точности примерно 2% требуется выполнение условия  $R_z > 4 l_k$ .

Данный пример показывает, что соотношение (3) применимо для расчетов в том случае, когда размеры неоднородностей сравнительно малы, порядка нескольких метров для геометрии наблюдений на орбитальных станциях, если при этом и размеры эффективной апертуры усреднения составляют не менее нескольких метров. Это позволяет просто моделировать мерцания за атмосферой с крупномасштабными неоднородностями слоистого типа, возникающими при обрушении внутренних волн [2, 3]. Минимальные масштабы таких неоднородностей не превышают 10 м. Ниже приведены некоторые результаты статистического моделирования мерцаний за одномерным фазовым экраном.

Как видно из формулы (2), распределение усредненной по апертуре интенсивности светового поля за фазовым экраном не зависит от волнового числа и полностью определяется распределением угла рефракции на экране.

В данной работе по формуле (3) рассчитывалась средняя интенсивность за фазовым экраном с распределением угла рефракции  $\gamma(z)$  вида

$$\gamma(z) = \gamma_0(z) [1 + d\gamma g(z)], \quad (4)$$

где  $\gamma_0(z)$  – среднее распределение угла рефракции с высотой  $z$ ;  $d\gamma$  – корень квадратный из дисперсии относительных флуктуаций угла рефракции;  $g(z)$  – функция, имеющая нормальное распределение, нулевое среднее и дисперсию, равную единице. Пространственный спектр этой функции задавался в виде

$$Fg(p) = \frac{C}{1 + (pL_0)^2} \exp[-(pl_0)^2], \quad (5)$$

где коэффициент  $C$  выбирался из нормировки

$$\langle g^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} Fg(p) dp = 1. \quad (6)$$

Инерционная часть спектра (5) соответствует спектру флуктуаций эйконала на экране  $F_S(p) \sim 1/p^4$ , характерному для турбулентности, обусловленной обрушением внутренних волн [2]. Значение  $d\gamma$  в расчетах задано равным 0,02, а значения «внутреннего»  $l_0$  и «внешнего»  $L_0$  масштабов – 50 и 1000 м. Реализации распределений угла рефракции моделировались с помощью метода фильтрации белого шума [4].

В качестве среднего распределения задавалось экспоненциальное

$$\gamma_0(z) = \gamma(z_0) \exp\left(-\frac{z_0 - z}{H_0}\right)$$

со значениями параметров:  $z_0 = 30$  км,  $H_0 = 6,25$  км,  $S_0 = L\gamma(z_0) = 1,124$  км.

Чтобы учесть влияние ослабления интенсивности света из-за молекулярного рассеяния, учет которого

важен при интерпретации данных реальных наблюдений, рассчитанные по формуле (3) реализации интенсивности как функции высоты перигея луча  $\eta$  при высотах меньше  $\eta_1 = 40$  км умножались на функцию ослабления

$$F_{\text{ext}}(\eta) = \exp [A_1 (\eta - \eta_1) - A_2 (\eta - \eta_1)^2 + A_3 (\eta - \eta_1)^3]$$

со значениями параметров:  $A_1 = 0,02$ ,  $A_2 = 0,0003$ ,  $A_3 = 0,00008$ .

Пример реализации интенсивности мерцаний  $I_S$  на приемнике с полушириной апертуры  $R_z = 2$  м как функции высоты перигея луча, а также отрезки этой реализации длиной 0,5 км при разных высотах перигея луча представлены на рис. 2.

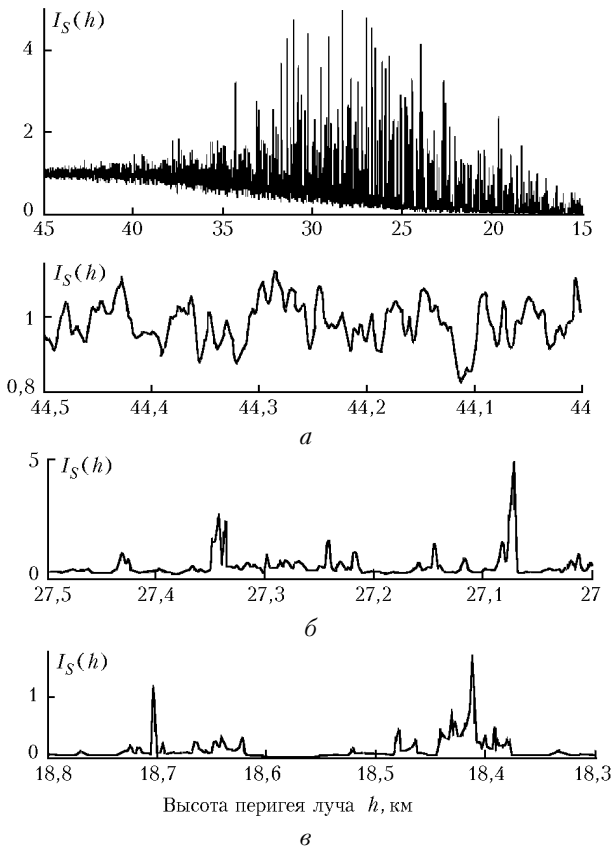


Рис. 2. Одна из смоделированных реализаций интенсивности мерцаний  $I_S$  и ее фрагменты в областях: слабых флуктуаций (а), фокусировок (б) и многолучевости (в)

Если сравнить смоделированные мерцания с натурными, т.е. рис. 2 данной статьи с рис. 3 работы [2] и рис. 2 соответственно с рис. 4 и 5 работы [3], то можно отметить их хорошее качественное и количественное согласие. Так, в области фокусировок (при высотах перигеев лучей около 29 км в натурном эксперименте и около 27 км – в численном) характерным являются наличие выбросов шириной около 10–20 м и расстояние между ними примерно 300–400 м. Характерным для зоны многолучевости является распад сигнала на последовательность импульсов, раз-

ленных промежутками глубокого замирания сигнала. Эффективная ширина импульсов растет по мере опускания высоты перигея луча. Отличие натуральных и смоделированных реализаций состоит в том, что в натуральных присутствует высокочастотная модуляция вида мультипликативного шума. Эта модуляция обусловлена, по-видимому, влиянием мелкомасштабной колмогоровской турбулентности, которая не учитывается в моделировании.

Соотношения (2) и особенно (3) позволяют легко проводить статистическое моделирование, исследовать на его основе свойства сильных флуктуаций как в статистически однородных, так и неоднородных средах, проверять теоретические выводы, полученные на основе применения различных асимптотических методов.

В качестве одного из примеров ниже рассматривается вопрос о применимости методов возмущений для расчета дисперсии усредненных по апертуре флуктуаций интенсивности.

В работе [5] показано, в частности, что для расчета низкочастотной части спектра мерцаний за статистически однородным, одномасштабным случайным экраном применимы соотношения метода плавных возмущений. Эти соотношения согласно асимптотическим оценкам [5] должны выполняться для волновых чисел спектра

$$q < q_1 = \sqrt{\frac{l^2}{2 < dS^2 > L^2}}, \quad (7)$$

где  $l$  – масштаб неоднородностей фазового экрана;  $< dS^2 >$  – дисперсия флуктуаций эйконала на экране. При распределении (4) величина  $< dS^2 > / l^2 \approx [\gamma_0(z) d\gamma]^2$  и волновое число

$$q_1(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}R_1} \approx \frac{1}{\sqrt{2}L\gamma_0(\eta)d\gamma}. \quad (8)$$

Величина  $R_1$ , обратная величине  $q_1$ , по порядку величины равна корню квадратному из дисперсии смещений светового луча в плоскости наблюдения. Усредненные по апертуре флуктуации интенсивности определяются спектральными компонентами с  $q \leq R_z^{-1}$ , поэтому можно ожидать, что соотношения МПВ (в области сильных не усредненных флуктуаций) могут выполняться не только для низкочастотной части спектра, но и для дисперсии флуктуаций интенсивности, если  $q_1 R_z > C_1$ . Здесь величина  $C_1$  по порядку величины равна единице. Численный эксперимент позволяет уточнить применимость этого предположения.

На рис. 3 представлены результаты расчетов высотных зависимостей дисперсии усредненных флуктуаций интенсивности, вычисленных по 200 реализациям, при тех же значениях параметров фазового экрана, при которых моделировалась одна из реализаций, показанных на рис. 2. При этом величина  $R_1$  составляет приблизительно 30 м при высоте перигея

луча 30 км. Представлены также данные расчетов дисперсии флуктуаций интенсивности  $\beta_0(\eta)$ , вычисленной по формулам первого приближения метода возмущений.

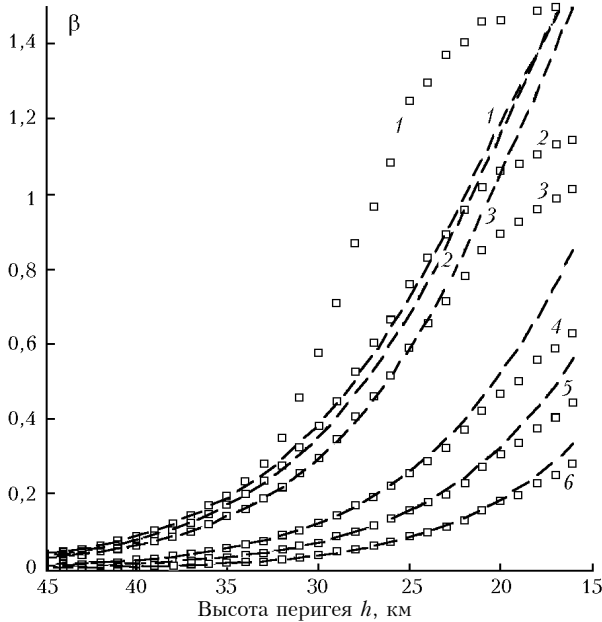


Рис. 3. Индекс усредненных мерцаний  $\beta$  как функция высоты перигея луча при значениях полуширин апертур усреднения 1 (1), 10 (2), 20 (3), 100 (4), 200 (5) и 400 м (6). Квадратики – результаты численного моделирования сильных мерцаний с последующим их усреднением, штриховые линии – расчет по формулам метода возмущений

Эти формулы получены следующим образом. Запишем высотную зависимость угла рефракции в виде

$$\gamma(\eta) = \gamma_0(\eta) + \gamma_1(\eta),$$

где  $\gamma_1(\eta) = \gamma_0(\eta) d\gamma g(\eta)$  – флуктуирующая часть.

Предположим, что в отсутствие флуктуаций режим распространения является однолучевым и флуктуации угла рефракции малы ( $|\gamma_1(\eta)| \ll |\gamma_0(\eta)|$ ). Пусть  $\eta_0$ ,  $\eta_1$  и  $\eta_2$  – корни уравнений:

$$\eta_0 + L\gamma_0(\eta_0) = z, \quad \eta_1 + L\gamma(\eta_1) = z - R_z,$$

$$\eta_2 + L\gamma(\eta_2) = z + R_z.$$

Если флуктуации  $\gamma_1$  малы, решениями двух последних уравнений будут

$$\eta_1 = \eta_0 - QR_z \left[ 1 + \frac{L}{R_z} \gamma_1(\eta_0 - QR_z) \right],$$

$$\eta_2 = \eta_0 + QR_z \left[ 1 - \frac{L}{R_z} \gamma_1(\eta_0 + QR_z) \right],$$

где

$$Q(z) = Q[\eta_0(z)] = [1 + Ld\gamma_0(\eta_0)/d\eta_0]^{-1}$$

– коэффициент рефракционного ослабления.

Для усредненной по апертуре интенсивности и ее относительных флуктуаций из (3) получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} I_S(z) &= I_S[\eta_0(z)] = \frac{\eta_2(z) - \eta_1(z)}{2R_z} = \\ &= Q(z) \left( 1 + \frac{L}{R_z} [\gamma_1(\eta_0 - QR_z) - \gamma_1(\eta_0 + QR_z)] \right), \\ I_1(\eta) &= I_S(\eta) / Q(\eta) - 1 = \\ &= \frac{L}{R_z} [\gamma_1(\eta_0 - QR_z) - \gamma_1(\eta_0 + QR_z)]. \end{aligned} \quad (9)$$

В предположении о том, что пространственные масштабы флуктуационной части угла рефракции много меньше, чем пространственные масштабы регулярной части, из (9) для квадрата дисперсии относительных флуктуаций интенсивности следует выражение

$$\begin{aligned} \beta_0^2(\eta) &= \langle I_1^2(\eta) \rangle = \frac{4L^2}{R_z^2} [\gamma_0(\eta) d\gamma]^2 \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} Fg(p) \sin^2 [R_z Q(\eta) p] dp. \end{aligned} \quad (10)$$

Из данных, приведенных на рис. 3, можно заключить, что, действительно, для расчета дисперсии флуктуаций интенсивности, усредненной по апертуре достаточно больших размеров, как в области фокусировок, так и в области случайной многолучевости, можно применять формулы первого приближения метода возмущений (соответствующие формулам метода плавных возмущений для расчета поля).

Если усредненные флуктуации интенсивности слабые, такие, что для их расчета применимо соотношение (10), то они при нормальном законе распределения флуктуаций угла рефракции также должны иметь нормальное распределение. Справедливость этого утверждения была проверена на примере статистически однородного экрана. (В случае статистически неоднородного экрана такое моделирование провести сложно из-за необходимости моделирования большого числа реализаций для обеспеченности статистических выводов).

На рис. 4 приведены результаты расчетов плотности вероятности распределения усредненной интенсивности в случае малой, по сравнению с величиной  $R_1$ , и большой апертур усреднения. Моделировалось 400 реализаций экрана со значениями параметров  $\gamma_0(\eta) = \text{const}$ ,  $R_1 = L\gamma_0 d\gamma = 100$  м, спектром (5) с  $l_0 = 50$  м,  $L_0 = 500$  м. Крестиками на рис. 4 нанесены результаты численного моделирования при полуширине апертуры  $R_z = 0,5$  м, кружочками – при  $R_z = 200$  м. Величины дисперсий усредненных флуктуаций составляли  $\beta_1 = 1,25$ , при  $R_z = 0,5$  м и  $\beta_2 = 0,256$  при  $R_z = 200$  м.

Из рис. 4 видно, что при большой апертуре усреднения распределение вероятностей флуктуаций усредненной интенсивности ближе к нормальному, чем

к логнормальному. При малой апертуре усреднения распределение вероятностей, если  $I_S \geq 0,7$ , близко к логнормальному закону распределения, если  $I_S < 0,7$ ,

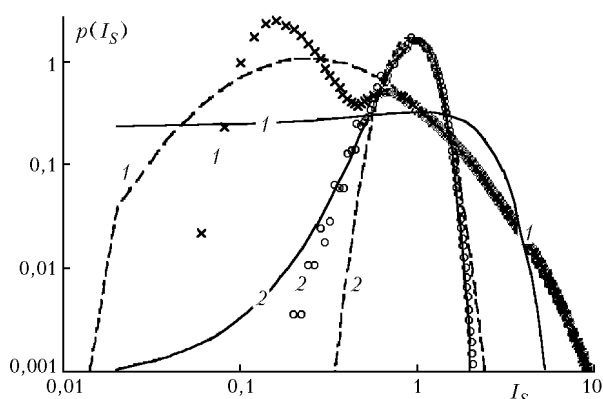


Рис. 4. Распределение плотностей вероятностей  $p(I_S)$  усредненных по апертуре приемника флуктуаций интенсивности света в области многолучевости за статистически однородным экраном: 1 – при полуширине апертуры усреднения  $R_z = 0,5$  м, 2 – при  $R_z = 200$  м. Крестики и кружочки – численный эксперимент, штриховые линии – логарифмически нормальное распределение, сплошные – нормальное распределение с параметрами  $\beta_1$  и  $\beta_2$

она существенно отличается от логнормального распределения и значительно больше от нормального. Эти результаты, в основном, согласуются с результатами анализа мерцаний в реальном эксперименте [3]. Некоторое различие есть в распределении вероятностей сильных выбросов и глубоких замираний. В натурном эксперименте их вероятность больше, чем в численном. Эти различия обусловлены, возможно, наличием аппаратных шумов в измерениях, существенных в области замираний, и необеспеченностью статистики сильных выбросов. Отметим, что в численном моделировании при варьировании в широких пределах параметров модели ( $R_1$ ,  $I_0$ ,  $L_0$ ,  $d\gamma$ ) не наблюдалось распределений вероятностей, близких к экспоненциальному распределению, которое широко используется для расчетов характеристик флуктуаций в области насыщения. На то, что экспоненциальное распределение не реализуется в натуральных измерениях, указывалось ранее [6].

Проведенные исследования доказывают применимость для расчета характеристик мерцаний, измеренных приемником с большой апертурой, соотношений метода возмущений. Для практических приложений этот вывод может быть полезным при разработке методов учета мерцаний, при спектроскопических методах определения газовых составляющих атмосферы по измерениям излучения звезд на космических аппаратах [7]. Характерным размером апертуры усреднения при этом является интервал высот, на который приемник смещается за время между последовательными отсчетами сигнала. При частоте отсчета, равной нескольким герцам, в зависимости от расположения орбиты спутника относительно направле-

ния на звезду интервал усреднения может составлять от 100 до 1000 м.

Следует иметь в виду, однако, что формула (10) получена в предположении, что регулярная волновая структура (в отсутствие флуктуаций) в плоскости наблюдения является однолучевой. В моделях регулярной рефракции, допускающих режим многолучевости, как это показано в [1], даже среднее распределение интенсивности света с высотой может иметь сложную структуру. Вопрос о том, применим ли при этом метод возмущений для расчета характеристик флуктуаций, требует отдельного рассмотрения.

## Выводы

Получены простые соотношения между распределением флуктуаций угла рефракции на неоднородном фазовом экране и распределением усредненной по апертуре приемника интенсивности света в области многолучевости. На их основе проведено численное моделирование процесса мерцаний звезд при их наблюдении через атмосферу Земли из космоса.

На модели экспоненциальной регулярной атмосферы исследованы зависимости дисперсии усредненных мерцаний от высоты перигея светового луча и размеров апертуры усреднения. Рассчитаны распределения плотности вероятностей интенсивности мерцаний.

Подтверждены выводы асимптотической теории о том, что крупномасштабная часть спектра сильных флуктуаций описывается соотношениями метода возмущений. Отмечено, что в области сильных флуктуаций статистика больших выбросов интенсивности близка к логарифмически нормальной. Широко применяемое в асимптотической теории предположение о том, что при насыщении флуктуаций их распределение должно быть близко к экспоненциальному, численным экспериментом не подтверждено.

Автор признателен А.С. Гурвичу и В. Кану за предоставление рукописей статей [2, 3] и обсуждение результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 01-02-16213 и 01-05-64944).

1. Воробьев В.В. Метод и некоторые результаты численного моделирования флуктуаций интенсивности плоской световой волны за фазовым экраном в области многолучевости. 1. Средняя интенсивность // Оптика атмосф. и океана. 2002. Т. 15. № 7. С. 561–565.
2. Гурвич А.С., Кан В., Савченко С.А., Пахомов А.И., Боровихин П.А., Волков О.Н., Калери А.Ю., Авдеев С.В., Корзун В.Г., Падалка Г.И., Подвязный Я.П. Исследование турбулентности и внутренних волн в стратосфере по наблюдениям мерцаний звезд из космоса. 1. Наблюдения и дисперсия мерцаний // Изв. РАН. Физ. атмосф. и океана. 2001. Т. 37. № 4. С. 469–486.
3. Гурвич А.С., Кан В., Савченко С.А., Пахомов А.И., Падалка Г.И. Исследование турбулентности и внутренних волн в стратосфере по наблюдениям мерцаний звезд из космоса. 2. Распределения вероятностей и спектры мерцаний // Изв. РАН. Физ. атмосф. и океана. 2001. Т. 37. № 4. С. 487–501.

4. Fleck J.A., Morris J.R., Feit M.D. Time-dependent propagation of high energy laser beam through the atmosphere // Appl. Phys. 1976. V. 10. № 1. P. 129–160.
5. Шишов В.И. Дифракция волн на сильно преломляющем случайном фазовом экране // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14. № 1. С. 85–92.
6. Гурвич А.С., Кон А.И., Миронов В.Л., Хмелевцов С.С. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1976. 277 с.
7. Поляков А.В., Тимофеев Ю.М., Гурвич А.С., Воробьев В.В., Кан В. Влияние мерцаний звезд на погрешности измерений содержания озона в атмосфере // Изв. РАН. Физ. атмосф. и океана. 2001. Т. 37. № 1. С. 56–66.

**V.V. Vorob'ev. A method and some results of numerical simulation of intensity fluctuations of a plane light wave behind the phase screen in a multipath region. 2. Fluctuations behind one-dimensional screen.**

The relations between distribution of a refraction angle fluctuations on a statistically nonuniform phase screen and fluctuations averaged over the aperture of the receiver of light intensity in multipath area are obtained. The requirements to applicability of these relations are analyzed. On their basis, simulation of the process of stellar scintillations at their observation through Earth's atmosphere from space is carried out. A good agreement between statistical performances of simulated and natural realizations of stellar scintillations is shown.