<Оптика атмосферы и океана>, **8**, N 7 (1995)

УДК: 621.393.8

А.И. Бродович, С.А. Иконников, Е.И. Шабаков, А.Н. Калиненко

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ ДЛЯ СИСТОЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМОВ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Предложен метод обработки видовой космической информации, основанный на распараллеливании потока данных. В результате применения метода удается существенно уменьшить (примерно в 100 раз) время обработки потока данных.

Возможности современных фотографических, телевизионных и оптико-электронных систем наблюдения во многом определяются характеристиками средств обработки информации, поступающей в форме видеосигналов и изображений. Необходимость обработки потоков видеоданных высокой плотности в жестких режимах реального времени требует совершенствования как аппаратного, так и алгоритмического обеспечения технических средств обработки. Для этого в задачах цифровой обработки видеосигналов и изображений все шире применяются математические структуры абстрактной алгебры и теории чисел: кольца классов вычетов, поля Галуа, гиперкомплексные поля.

Широкий ассортимент быстрых алгоритмов обработки, в основу которых положены структурные теоремы алгебры и теории чисел, можно условно разбить на две большие группы. Первая основана на использовании теоретико-числовых свойств адресов данных или их номеров в сегменте обрабатываемого потока видеосигналов. Эта группа алгоритмов хорошо описана в литературе [1, 2, 3] и часто используется в цифровой обработке сигналов. К ним относятся алгоритмы Агарвала – Кули и Виноградова для вычисления свертки, алгоритмы Кули – Тьюки и Томаса – Гуда для дискретного преобразования Фурье и другие.

Вторая группа алгоритмов, основанная на использовании теоретико-числовых свойств самих квантовых значений дискретных отсчетов сигнала, не получила пока должного развития и находится в стадии разработки и исследования [4]. Особый интерес представляет применение этих алгоритмов для цифровой обработки видеосигналов и изображений, обладающих специфическими свойствами, когда исходные данные, во-первых, принимают значения на множестве целых положительных чисел; во-вторых, это множество ограничено количеством разрешимых градаций яркости; в-третьих, размеры обрабатываемых сегментов конечны [5].

Целочисленный характер данных обработки позволяет строить быстрые алгоритмы вычисления не только для отдельных элементов выходной последовательности, но и для последовательностей в целом. Для этого алгоритм обработки или его часть необходимо поместить в алгебраическую структуру, основанную на кольцах полиномов.

Цель настоящей статьи состоит в обсуждении алгоритмов обработки видеоданных в кольцах полиномов на примере вычисления наиболее трудоемкой операции свертки числовых последовательностей, описывающих изображения.

Линейная свертка двух целочисленных последовательностей $\{r_i\}$ и $\{h_i\}$ длиной l_r и l_h , описываемых полиномами $r(x)$ и $h(x)$, дает в качестве результата полином

$$s(x) = r(x)\, h(x), \qquad (1)$$

где степени полиномов равны $\deg r(x) = l_r - 1$, $\deg h(x) = l_r - 1$, $\deg s(x) = l_r + l_h - 2$.

Коэффициенты полиномов являются элементами кольца целых Z чисел, поэтому свертку можно вложить в кольцо полиномов с целочисленными коэффициентами, которое называется кольцом полиномов над кольцом Z и обозначается $Z[\,x]$.

Если коэффициенты полиномов представить как элементы кольца вычетов Z_m, где значения модуля m больше любого из коэффициентов полиномов $r(x)$, $h(x)$ и $s(x)$, то свертку можно вложить в кольцо полиномов над кольцом вычетов Z_m, которое обозначается $Z_m[\,x]$,

$$s(x) = r(x)\, h(x) \pmod{m}, \quad Z_m[x]. \tag{2}$$

Задача вычисления линейной свертки может быть вложена в задачу вычисления произведения полиномов по модулю фиксированного полинома $m(x)$ степени n. Если в качестве n выбрать целое число, которое больше степени полинома $s(x)$, а в качестве $m(x)$ – произвольный полином степени n, то задача вычисления выходного полинома

$$s(x) = r(x)\, h(x) \pmod{m(x)} \tag{3}$$

превращается в задачу вычисления линейной свертки, так как приведение по модулю $m(x)$ не меняет $s(x)$. Выбирая $m(x)$ равным $x^n - 1$, можно точно так же вычислить циклическую свертку:

$$s(x) = r(x) \pmod{x^n - 1}\, h(x). \tag{4}$$

В зависимости от того, над какой алгебраической структурой определены полиномы $r(x)$, $h(x)$ и $s(x)$, вычисление свертки можно вложить в задачу вычисления произведения полиномов в различных кольцах вычетов полиномов по их модулю. Если полиномы определены над кольцом целых чисел Z, то

$$s(x) = r(x)\, h(x) \pmod{m(x)}; \quad Z[x] / m(x). \tag{5}$$

Если над кольцом классов вычетов Z_m, то

$$s(x) = r(x)\, h(x) \pmod{m} \pmod{m(x)}; \quad Z_m[x] / m(x). \tag{6}$$

Если над полем Галуа, то

$$s(x) = r(x)\, h(x) \pmod{p} \pmod{m(x)}; \quad GF(p)\,[x] / m(x), \tag{7}$$

где $Z[x]/m(x)$ – кольцо вычетов полиномов по модулю $m(x)$ над кольцом целых чисел; $Z_m[x]/m(x)$ – то же над кольцом вычетов целых чисел по модулю m; $GF(p)[x]/m(x)$ – то же над полем Галуа $GF(p)$; здесь p – простое целое положительное число.

Если полином $m(x)$ разлагается на неприводимые над полем Галуа полиномы $p_1(x)$, $p_2(x)$, ... , $p_j(x)$, ... , $p_k(x)$, то вычисление свертки в кольце $GF(p)/m(x)$ можно свести к вычислению коротких сверток $s_j(x)$ в кольцах $GF(p)/p_j(x)$:

$$\begin{aligned} s_1(x) &= r(x)\, h(x) \pmod{p} \pmod{p_1(x)}; \\ s_2(x) &= r(x)\, h(x) \pmod{p} \pmod{p_2(x)}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_k(x) &= r(x)\, h(x) \pmod{p} \pmod{p_k(x)}. \end{aligned}$$

Использование полиномиального варианта китайской теоремы об остатках (КТО) [6] позволяет преобразовать все $s_j(x)$ полиномы в единственный полином $s(x)$. Такой метод перехода к вычислению коротких сверток положен в основу метода Виноградова вычисления свертки, который обеспечивает наименьшее число умножений [1, 2]. Метод Виноградова применяется для вычисления сверток над любыми полями, над которыми существуют неприводимые полиномы малой степени. Сюда следует отнести, прежде всего, поле вещественных и комплексных чисел, а также конечные поля Галуа. Если вычислять свертку в кольце $Z_m[x]/m(x)$, то метод Виноградова может быть дополнен методами вычисления свертки в прямой сумме колец вычетов полиномов по модулю $m(x)$, позволяющему вычислять несколько сверток одновременно.

Рассмотрим вычисление K различных целочисленных сверток как произведение K различных полиномов $r_j(x)$ на соответствующие полиномы $h_j(x)$, где $j = 1, 2, \ldots, K$:

$$\begin{aligned} s_1(x) &= r_1(x)\, h_1(x); \\ s_2(x) &= r_2(x)\, h_2(x); \\ &\ldots\ldots\ldots \\ s_k(x) &= r_k(x)\, h_k(x). \end{aligned}$$

Униполярность и относительно небольшой динамический диапазон входного видеосигнала позволяют каждое такое произведение полиномов вложить в кольцо вычетов полиномов $Z_{m_j}[x]/m(x)$, где $m_1, m_2, \ldots, m_k$ – попарно простые целые числа, а степень полинома $m(x)$ больше степени любого из полиномов $s_1(x), s_2(x), \ldots, s_k(x)$:

$$s_1(x) = r_1(x)\, h_1(x) \pmod{m_1} \pmod{m(x)},\ \ Z_{m_1}[x] / m(x);$$
$$s_2(x) = r_2(x)\, h_2(x) \pmod{m_2} \pmod{m(x)},\ \ Z_{m_2}[x] / m(x);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s_k(x) = r_k(x)\, h_k(x) \pmod{m_k} \pmod{m(x)},\ \ Z_{m_k}[x] / m(x).$$

Китайская теорема об остатках позволяет свести данные K произведений полиномов к вычислению одного произведения полиномов

$$s(x) = r(x)\, h(x) \pmod{m} \pmod{m(x)} \tag{8}$$

в кольце полиномов $Z_m[x]/m(x)$, которое изоморфно прямой сумме колец полиномов $Z_{m_j}[x]/m(x)$:

$$Z_m[x] / m(x) \sim Z_{m_1}[x] / m(x) + Z_{m_2}[x] / m(x) + \ldots + Z_{m_k}[x] / m(x). \tag{9}$$

При этом значения полиномов-сомножителей формируются по правилам:

$$r(x) = \sum_{j=1}^{K} r_j(x)\, M_j\, T_j \pmod{m} \pmod{m(x)}; \tag{10}$$

$$h(x) = \sum_{j=1}^{K} h_j(x)\, M_j\, T_j \pmod{m} \pmod{m(x)}, \tag{11}$$

где $M_j = m/m_j$; $M_j T_j = \pmod{m}$.

Каждый полином $s_j(x)$ получается из полинома $s(x)$ с помощью вычисления вычета по соответствующему модулю m_j:

$$s_1(x) = s(x) \pmod{m_1};$$
$$s_2(x) = s(x) \pmod{m_2};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s_k(x) = s(x) \pmod{m_k}.$$

Для вычисления значений полинома $s(x)$ может быть использован метод Виноградова, если полином $m(x)$ выбран таким образом, что допускает разложение на несколько неприводимых полиномов $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_k(x)$. Если $h_1(x) = h_2(x) = \ldots = h_k(x)$, то обработка в прямой сумме колец полиномов позволяет осуществлять фильтрацию нескольких сегментов отсчетов видеосигнала или нескольких фрагментов изображения одновременно, как это показано на рис. 1. Если же существует необходимость в обработке массива видеоданных параллельно несколькими фильтрами, описываемыми полиномами $h_1(x), \ldots, h_k(x)$, то указанный подход позволяет вести фильтрацию с помощью единственного фильтра, как это показано на рис. 2.

Как видно из рисунков, размеры сегментов или фильтров, преобразованных с помощью китайской теоремы об остатках, не превышают размеров исходных массивов данных. Если значения преобразованного фильтра могут быть вычислены заранее, то количество операций, необходимых для вычисления свертки, уменьшается в K раз. Единственным ограничением на количество K одновременно вычисленных сверток является необходимость выполнения условия $m < 2^{l_p}$, где l_p – длина разрядной сетки процессора. Существует несколько способов обойти эти ограничения при вычислениях с помощью модулярной арифметики [7], однако все они приводят к уменьшению скорости обработки.

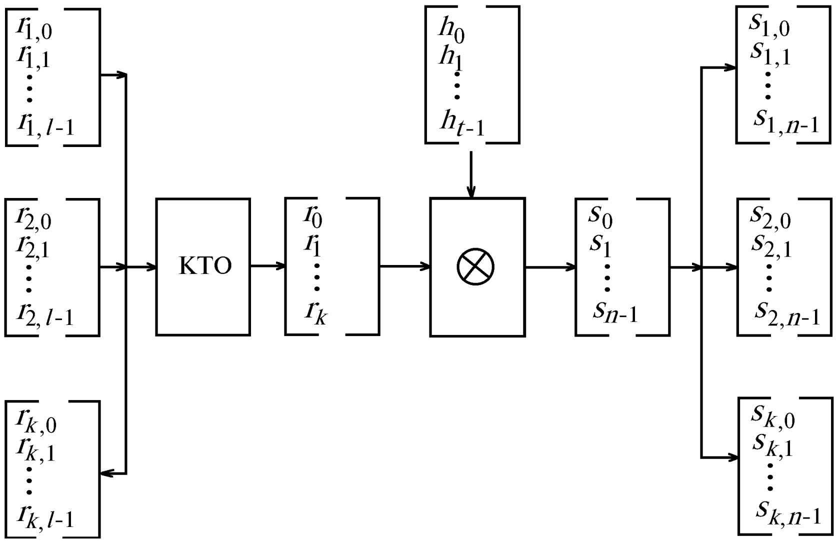

Рис. 1. Схема алгоритма обработки нескольких фрагментов одним фильтром

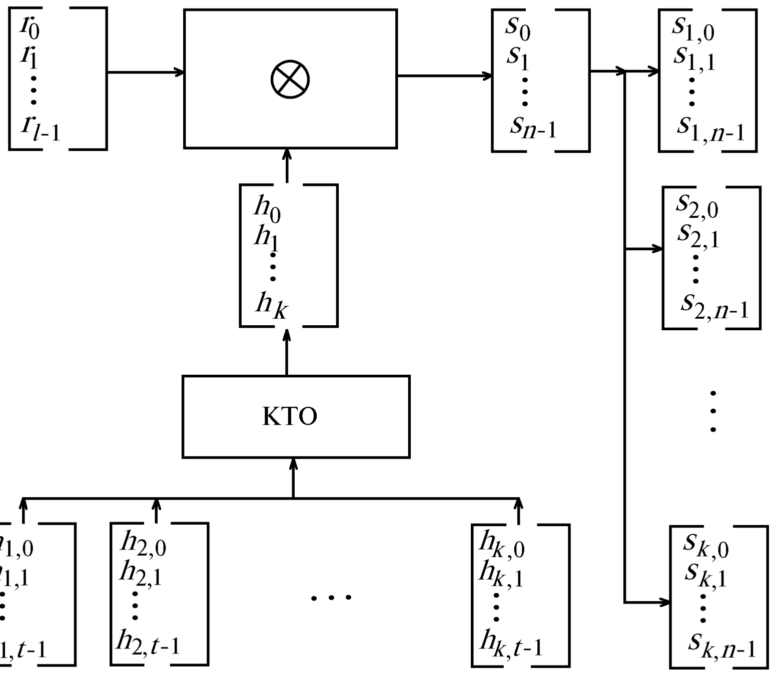

Рис. 2. Схема алгоритма параллельной обработки фрагмента несколькими фильтрами

Таким образом, снижение времени обработки на универсальной ЭВМ может быть достигнуто за счет использования алгоритмов одновременного вычисления нескольких сверток в кольце, изоморфном прямой сумме колец полиномов над кольцами классов вычетов по попарно простым модулям.

Эти алгоритмы позволяют обрабатывать одновременно несколько фрагментов изображения или использовать несколько фильтров. Последний вариант оказывается предпочтительным, так как весовую функцию синтезированного фильтра можно вычислять заблаговременно.

Наиболее целесообразно использовать синтезированные фильтры в задачах локализации, обнаружения, определения координат и пространственной ориентации объектов на изображении методами согласованной фильтрации. Ограничением на количество одновременно реализуемых фильтров является длина разрядной сетки арифметического устройства ЭВМ.

1. Б л е й х у т Р . Э . Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1989. 448 с.
2. М а к к л е л а н Д ж . Х . , Р е й д е р Ч . М . Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов. М.: Радио и связь, 1983. С. 8–59, 186–202.
3. Л а б у н е ц В . Г . Алгебраическая теория сигналов и систем. Цифровая обработка сигналов. Красноярск: Изд-во Красноярского ун-та, 1984. 244 с.
4. Б р о д о в и ч А . И . , Ш а б а к о в Е . И . Целочисленная обработка видеосигналов и изображений. Выпуск 2. С.-Пб.: ВИКА им. А.Ф. Можайского, 1993. 152 с.
5. B a t r a k o v A . S . , B r o d o v i c h A . I . , S h a b a k o v E . I . Number-theoretic coding for iconic systems. SPIE. V. 1961. Visual Information Processing II (1993). P. 456–466.
6. Т и т к о в Б . В . , Ш а б а к о в Е . И . // Техника средств связи. Сер.: Техника телевидения. 1985. Вып. 4. С. 26–33.
7. К н у т Д . Искусство программирования для ЭВМ. Т. 2. Получисленные алгоритмы. М.: Мир, 1978. С. 74–76. С. 411–419. С. 476.

Институт оптики атмосферы СО РАН, Томск
Военная инженерно-космическая академия им. А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
23 декабря 1994 г.

A . I . B r o d o v i c h , S . A . I k o n n i k o v , E . I . S h a b a k o v , A . N . K a l i n e n k o . **Number Theory Application to Systolization of Algorithms of Images Numerical Processing.**

A method for space video information processing based on data flow parallelizing is proposed. The method allows significant decrease of time of the data flow processing (about a hundred times).