

В.Г. Гусев

## Формирование в диффузно рассеянных полях интерференционных картин в случае записи голограммы сфокусированного изображения амплитудного рассеивателя по схеме Габора

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 30.01.2001 г.

Рассматриваются запись и восстановление голограммы сфокусированного изображения амплитудного рассеивателя для контроля осевых волновых aberrаций линзы. Теоретически и экспериментально показано, что в третьем порядке приближения возникает ошибка контроля из-за сферической aberrации голограммы.

В [1, 2] было показано, что одноэкспозиционная запись голограммы сфокусированного изображения амплитудного рассеивателя приводит на стадии ее восстановления к образованию в когерентных диффузно рассеянных полях интерференционной картины в полосах равной толщины. При этом интерференционная картина характеризует сферическую aberrацию линзы, с помощью которой осуществлялось построение действительного изображения рассеивателя на стадии записи голограммы. Формирование действительного изображения рассеивателя в схеме записи голограммы, используемой в [3], дает возможность исключить сферическую aberrацию контролируемой линзы. В результате этого на стадии восстановления голограммы регистрируется интерференционная картина в полосах равной толщины, характеризующая астigmatизм контролируемой линзы. Приведенный в этих работах анализ образования в когерентных диффузно рассеянных полях интерференционных картин в параболическом приближении не учитывает возможных ошибок контроля, обусловленных aberrациями голограммы.

В настоящей статье в третьем порядке приближения анализируются особенности формирования в когерентных диффузно рассеянных полях интерференционных картин в случае записи голограммы сфокусированного изображения амплитудного рассеивателя по схеме Габора с целью определения ошибок контроля осевых волновых aberrаций положительной линзы или объектива.

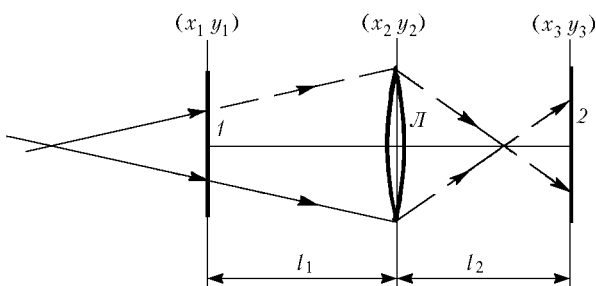


Рис. 1. Схема записи голограммы сфокусированного изображения амплитудного рассеивателя: 1 – амплитудный рассеиватель; 2 – фотопластинка; L – контролируемая линза

Как представлено на рис. 1, амплитудный рассеиватель 1, находящийся в плоскости  $(x_1, y_1)$ , освещается коге-

рентным излучением с расходящейся квазисферической формой волны с радиусом кривизны  $R$ . С помощью линзы  $L$ , для которой главной является плоскость  $(x_2, y_2)$ , его изображение строится в плоскости  $(x_3, y_3)$  фотопластинки 2, и проводится запись голограммы сфокусированного изображения рассеивателя за время одной экспозиции.

Распределение комплексной амплитуды поля в плоскости голограммы без учета постоянных коэффициентов в третьем порядке приближения принимает вид

$$\begin{aligned}
 u(x_3, y_3) \sim & \int \int \int_{-\infty}^{\infty} [1 - t(x_1, y_1)] \times \\
 & \times \exp i \left[ \frac{k}{2R} (x_1^2 + y_1^2) + \varphi_0(x_1, y_1) \right] \times \\
 & \times \exp -i \left[ \frac{k}{8R^3} (x_1^2 + y_1^2)^2 \right] \times \\
 & \times \exp i \left\{ \frac{k}{2l_1} [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] \right\} \times \\
 & \times \exp -i \left\{ \frac{k}{8l_1^3} [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^2 \right\} p(x_2, y_2) \times \\
 & \times \exp -i \left[ \frac{k}{2f} (x_2^2 + y_2^2) - \varphi(x_2, y_2) \right] \times \\
 & \times \exp i \left\{ \frac{k}{2l_2} [(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2] \right\} \times \\
 & \times \exp -i \left\{ \frac{k}{8l_2^3} [(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2]^2 \right\} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2, \quad (1)
 \end{aligned}$$

где  $k$  – волновое число;  $l_1, l_2$  – расстояния соответственно между плоскостями  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  и  $(x_2, y_2), (x_3, y_3)$ ;  $t(x_1, y_1)$  – амплитуда поглощения рассеивателя, являющаяся случайной функцией координат;  $\varphi_0(x_1, y_1)$  – детерминированная функция, характеризующая в общем случае фазовые искажения волны излучения, используемого для освещения амплитудного рассеивателя, например из-за aberrаций формирующей ее оптической системы;  $p(x_2, y_2)$  – функция зрачка [4] линзы  $L$  с фокусным расстоянием  $f$ ;  $\varphi(x_2, y_2)$  – детерми-

нированная функция, характеризующая осевые волновые aberrации контролируемой линзы.

Если диаметр  $D_0$  освещенной области рассеивателя удовлетворяет условию  $D_0 \geq Rd/(l_1 + R)$ , где  $d$  – диаметр зрачка линзы  $L$ , когда весь спектр пространственных частот рассеивателя ограничивается последней, то при выполнении равенства  $1/f = 1/l_1 + 1/l_2$  распределение комплексной амплитуды поля в плоскости  $(x_3, y_3)$  определяется выражением

$$u(x_3, y_3) \sim \exp ik \left[ \frac{1}{2l_2} (x_3^2 + y_3^2) - \frac{1}{8l_2^3} (x_3^2 + y_3^2)^2 \right] \times \\ \times \left\{ [1 - t(-\mu x_3, -\mu y_3)] \exp i \varphi_0(-\mu x_3, -\mu y_3) \times \right. \\ \times \exp i \left[ \frac{k\mu^2}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{l_1} \right) (x_3^2 + y_3^2) \right] \times \\ \times \exp -i \left[ \frac{k\mu^4}{8} \left( \frac{1}{R^3} + \frac{1}{l_1^3} \right) (x_3^2 + y_3^2)^2 \right] A(x_3, y_3) \otimes \\ \left. \otimes P(x_3, y_3) \otimes \Phi_1(x_3, y_3) \otimes \Phi_2(x_3, y_3) \right\}, \quad (2)$$

где  $\otimes$  – символ операции свертки;  $\mu = l_1/l_2$  – коэффициент масштабного преобразования;

$$A(x_3, y_3) = \int \int \int \int \exp i \psi_1(x_1, y_1; x_2, y_2) \times \\ \times \exp -ik \left[ \left( \frac{x_1}{l_1} + \frac{x_3}{l_2} \right) x_2 + \left( \frac{y_1}{l_1} + \frac{y_3}{l_2} \right) y_2 \right] dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

– детерминированная функция, обусловленная aberrациями, определяемыми функцией

$$\psi_1(x_1, y_1; x_2, y_2) = -\frac{k}{8l_1^3} (6x_1^2 x_2^2 + 6y_1^2 y_2^2 - 4x_1^3 x_2 - 4x_1^2 y_1 y_2 + \\ + 2x_1^2 y_2^2 - 4x_1 x_2^3 - 4x_1 x_2 y_1^2 + 8x_1 x_2 y_1 y_2 - 4x_1 x_2 y_2^2 + 2x_2^2 y_1^2 - \\ - 4x_2^2 y_1 y_2 - 4y_1^3 y_2 + 2y_1^2 y_2^2 - 4y_1 y_2^3);$$

$$P(x_3, y_3) = \int \int p(x_2, y_2) \exp i \varphi(x_2, y_2) \\ \times \exp -i \left[ \frac{k}{l_2} (x_2 x_3 + y_2 y_3) \right] dx_2 dy_2$$

– Фурье-образ обобщенной функции [5] зрачка линзы  $L$ , учитывающей ее осевые волновые aberrации;

$$\Phi_1(x_3, y_3) = \int \int \exp -i \left[ \frac{k}{8} \left( \frac{1}{R^3} + \frac{1}{l_1^3} \right) (x_2^2 + y_2^2)^2 \right] \times$$

$$\times \exp -i \left[ \frac{k}{l_2} (x_2 x_3 + y_2 y_3) \right] dx_2 dy_2$$

– Фурье-образ соответствующей функции;

$$\Phi_2(x_3, y_3) = \int \int \exp i \psi_2(x_2, y_2; x_3, y_3) \times$$

$$\times \exp -i \left[ \frac{k}{l_2} (x_2 x_3 + y_2 y_3) \right] dx_2 dy_2$$

– Фурье-образ функции  $\exp i \psi_2(x_2, y_2; x_3, y_3)$ ; функция  $\psi_2(x_2, y_2; x_3, y_3)$  имеет вид функции  $\psi_1(x_1, y_1; x_2, y_2)$  при замене  $l_1$  на  $l_2$  и координат  $x_1, y_1$  на  $x_2, y_2$ , а координаты  $x_2, y_2$  заменяются координатами  $x_3, y_3$ .

Так как ширина функции  $P(x_3, y_3)$  порядка  $\lambda l_2/d$  [6], где  $\lambda$  – длина волны когерентного источника света, используемого для записи и восстановления голограммы, то положим, что в пределах ее области существования изменение фазы сферической волны радиуса кривизны  $Rl_2/\mu(R + l_1)$  не превосходит  $\pi$ . Тогда в плоскости  $(x_3, y_3)$  для диаметра  $D \leq Rd/\mu(R + l_1)$  квадратичный фазовый множитель  $\exp i \left[ \frac{k\mu^2}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{l_1} \right) (x_3^2 + y_3^2) \right]$  вынесем в выражении (2) из-под знаков интегралов свертки, учитывая то обстоятельство, что ширина функции  $\Phi_1(x_3, y_3) \otimes \Phi_2(x_3, y_3)$  меньше, чем ширина функции  $P(x_3, y_3)$ .

Пусть фотослой, подвергнутый экспонированию светом с интенсивностью  $u(x_3, y_3) u^*(x_3, y_3)$ , обработан и получен негатив на прямолинейной части характеристической кривой почернения. Тогда для  $t(x_1, y_1) \ll 1$  [7] комплексная амплитуда пропускания  $\tau(x_3, y_3)$  голограммы без учета постоянной составляющей, так как она занимает малую область пространства в плоскости регистрации интерференционной картины, для диффузно рассеянной составляющей света определяется выражением

$$\tau(x_3, y_3) \sim \left\{ \exp -i \varphi_0(-\mu x_3, -\mu y_3) \times \right. \\ \times \exp i \left[ \frac{k\mu^4}{8} \left( \frac{1}{R^3} + \frac{1}{l_1^3} \right) (x_3^2 + y_3^2)^2 \right] A^*(x_3, y_3) \otimes \\ \left. \otimes P^*(x_3, y_3) \otimes \Phi_1^*(x_3, y_3) \otimes \Phi_2^*(x_3, y_3) \right\} \times \\ \times \left\{ t(-\mu x_3, -\mu y_3) \exp i \varphi_0(-\mu x_3, -\mu y_3) \times \right. \\ \times \exp -i \left[ \frac{k\mu^4}{8} \left( \frac{1}{R^3} + \frac{1}{l_1^3} \right) (x_3^2 + y_3^2)^2 \right] A(x_3, y_3) \otimes \\ \left. \otimes P(x_3, y_3) \otimes \Phi_1(x_3, y_3) \otimes \Phi_2(x_3, y_3) \right\} + \text{к.с.}, \quad (3)$$

к.с. – комплексное сопряжение.

Первое слагаемое в выражении (3) определяет последующую дифракцию волн в  $(-1)$ -м порядке, а комплексно сопряженное слагаемое – в  $(+1)$ -м порядке.

Так как для опорной волны можно положить, что

$$P(x_3, y_3) \text{ E } \Phi_1(x_3, y_3) \text{ E } \Phi_2(x_3, y_3) \text{ E } \delta(x_3, y_3),$$

где  $\delta(x_3, y_3)$  – дельта-функция Дирака, а для объектной волны – медленность изменения с координатой функций

$$\exp i\varphi_0(-\mu x_3, -\mu y_3), \exp i \left[ \frac{k\mu^4}{8} \left( \frac{1}{R^3} + \frac{1}{l_1^3} \right) (x_3^2 + y_3^2)^2 \right], A(x_3, y_3)$$

по сравнению с функцией  $P(x_3, y_3) \otimes \Phi_1(x_3, y_3) \otimes \Phi_2(x_3, y_3)$ , определяющей размер субъективного спекла в плоскости  $(x_3, y_3)$ , то выражение для комплексной амплитуды пропускания голограммы принимает вид

$$\tau(x_3, y_3) \sim [t(-\mu x_3, -\mu y_3) \otimes P(x_3, y_3) \otimes \Phi_1(x_3, y_3) \otimes \Phi_2(x_3, y_3) + t(-\mu x_3, -\mu y_3) \otimes P^*(x_3, y_3) \otimes \Phi_1^*(x_3, y_3) \otimes \Phi_2^*(x_3, y_3)]. \quad (4)$$

Как и в [1–3], на стадии восстановления голограммы выполняется регистрация освещенности в фокальной плоскости  $(x_4, y_4)$  объектива, установленного за голограммой. Для сокращения записи положим, что фокусное расстояние объектива равно расстоянию  $l_2$ . Тогда на основании выражения (4) распределение комплексной амплитуды поля в плоскости  $(x_4, y_4)$  без учета его дифракционной ограниченности определяется выражением

$$u(x_4, y_4) \sim \left\{ \exp i\varphi(-x_4, -y_4) \exp -i \left[ \frac{k}{8} \left( \frac{1}{l_1^3} + \frac{1}{l_2^3} \right) (x_4^2 + y_4^2)^2 \right] \times \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \exp i \psi_2(x_2, y_2; x_3, y_3) \times \exp -i \left\{ \frac{k}{l_2} [(x_2 + x_4)x_3 + (y_2 + y_4)y_3] \right\} dx_2 dy_2 dx_3 dy_3 + \exp -i \varphi(x_4, y_4) \exp i \left[ \frac{k}{8} \left( \frac{1}{l_1^3} + \frac{1}{l_2^3} \right) (x_4^2 + y_4^2)^2 \right] \times \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \exp -i \psi_2(x_2, y_2; x_3, y_3) \times \exp i \left\{ \frac{k}{l_2} [(x_2 - x_4)x_3 + (y_2 - y_4)y_3] \right\} dx_2 dy_2 dx_3 dy_3 \right\} \times p(x_4, y_4) F(x_4, y_4), \quad (5)$$

где

$$F(x_4, y_4) = \int \int_{-\infty}^{\infty} t(-\mu x_3, -\mu y_3) \exp -i \left[ \frac{k}{l_2} (x_3 x_4 + y_3 y_4) \right] dx_3 dy_3$$

– Фурье-образ соответствующей функции.

Пусть на стадии восстановления голограммы в ее плоскости проводится пространственная фильтрация дифракционного поля на оптической оси с помощью непрозрачного экрана с круглым отверстием. Если в пределах диаметра отверстия величина функции  $\psi_2(x_2, y_2; x_3, y_3)$  хотя бы на порядок меньше  $\pi$ , то распределение комплексной амплитуды поля в фокальной плоскости объектива принимает вид

$$u(x_4, y_4) \sim \left\{ \exp i\varphi(-x_4, -y_4) \exp -i \left[ \frac{k}{8} \left( \frac{1}{l_1^3} + \frac{1}{l_2^3} \right) (x_4^2 + y_4^2)^2 \right] + \right.$$

$$\left. + \exp -i\varphi(x_4, y_4) \exp i \left[ \frac{k}{8} \left( \frac{1}{l_1^3} + \frac{1}{l_2^3} \right) (x_4^2 + y_4^2)^2 \right] \right\} \times p(x_4, y_4) F(x_4, y_4) \otimes P_0(x_4, y_4), \quad (6)$$

где

$$P_0(x_4, y_4) = \int \int_{-\infty}^{\infty} p_0(x_3, y_3) \exp -i \left[ \frac{k}{l_2} (x_3 x_4 + y_3 y_4) \right] dx_3 dy_3$$

– Фурье-образ функции  $p_0(x_3, y_3)$  [4] пропускания пространственного фильтра.

Если период изменения функции

$$\exp i \left[ \varphi(-x_4, -y_4) - \frac{k}{8} \left( \frac{1}{l_1^3} + \frac{1}{l_2^3} \right) (x_4^2 + y_4^2)^2 \right] + \exp -i \left[ \varphi(x_4, y_4) - \frac{k}{8} \left( \frac{1}{l_1^3} + \frac{1}{l_2^3} \right) (x_4^2 + y_4^2)^2 \right]$$

хотя бы на порядок [8] превосходит размер субъективного спекла в плоскости  $(x_4, y_4)$ , определяемого шириной функции  $P_0(x_4, y_4)$ , то ее можно вынести в выражении (6) из-под знака интеграла свертки. Тогда для четной функции  $\varphi(x_4, y_4)$  распределение освещенности в фокальной плоскости объектива определяется выражением

$$I(x_4, y_4) \sim \left\{ 1 + \cos 2 \left[ \varphi(x_4, y_4) - \frac{k}{8} \left( \frac{1}{l_1^3} + \frac{1}{l_2^3} \right) (x_4^2 + y_4^2)^2 \right] \right\} \times |F(x_4, y_4) \otimes P_0(x_4, y_4)|^2. \quad (7)$$

Из выражения (7) следует, что субъективная спекл-структура промодулирована интерференционными полосами равной толщины, причем согласно (6) в пределах изображения зрачка контролируемой линзы (рис. 1). Интерференционная картина, как и в [1, 2], характеризует сферическую aberrацию линзы, считая, что коэффициент ее астigmatизма имеет более высокий порядок малости по сравнению с коэффициентом сферической aberrации [4], и дополнительно сферическую aberrацию голограммы, определяемую вторым слагаемым в (7). Если положить, что отклонение от сферической волновой поверхности в области диаметра зрачка контролируемой линзы не должно превосходить одной десятой длины волны, то величина его диаметра должна удовлетворять условию

$$d \leq 2 \sqrt[4]{0,8\lambda \frac{l_1^3 l_2^3}{l_1^3 + l_2^3}}$$

без учета увеличения чувствительности интерферометра.

В эксперименте голограммы записывались на фотопластинках типа Микрат-ВРЛ с помощью излучения He-Ne-лазера на длине волны 0,63 мкм. Методика экспериментальных исследований из-за большей демонстрационной наглядности заключалась в записи голограмм сфокусированного изображения амплитудного рассеивателя по схеме Габора для контроля астigmatизма положительной линзы (или объектива) [3] при разных величинах диаметра ее зрачка. Затем зарегистрированные на стадии восстановления голограмм интерференционные картины фотометрировались и полученные в результате этого экспериментальные данные сравнивались с теоретическими предположениями.

Последние следуют из того, что в третьем порядке приближения в случае записи голограммы сфокусированного изображения амплитудного рассеивателя по схеме, в которой исключается сферическая aberrация контролируемой линзы [3], распределение освещенности в фокальной плоскости объектива на стадии восстановления голограммы принимает вид

$$I(x, y) \sim \left\{ 1 + \cos 4 \left[ \varphi(x, y) - \frac{1,125k}{8f^3} (x^2 + y^2)^2 \right] \right\} \times |F(x, y) \otimes P(x, y)|^2, \quad (8)$$

где использованы обозначения, принятые в цитируемой работе.

В качестве примера на рис. 2 представлены интерференционные картины в полосах равной толщины, характеризующие астигматизм контролируемой линзы с величиной коэффициента  $C = 0,5\lambda$ , для которой величина фокусного расстояния составляла 130 мм, а диаметр зрачка – 10 мм. Их регистрация осуществлялась в фокальной плоскости объектива с фокусным расстоянием 50 мм при проведении пространственной фильтрации дифракционного поля в плоскости голограммы путем ее восстановления на оптической оси с помощью малоапертурного ( $\approx 2$  мм) лазерного пучка.

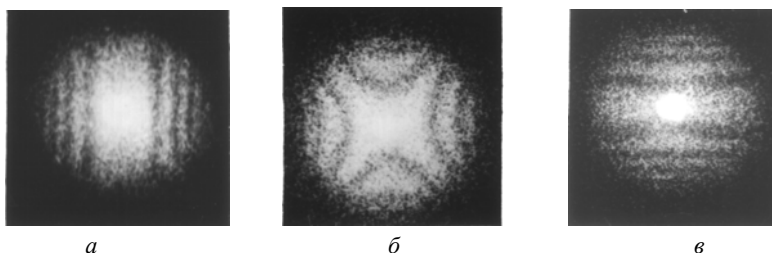


Рис. 2. Интерференционные картины в полосах равной толщины, зарегистрированные в случае выполнения записи голограммы: *a* – в тангенциальном фокусе; *b* – в плоскости наилучшего фокуса; *v* – в сагиттальном фокусе

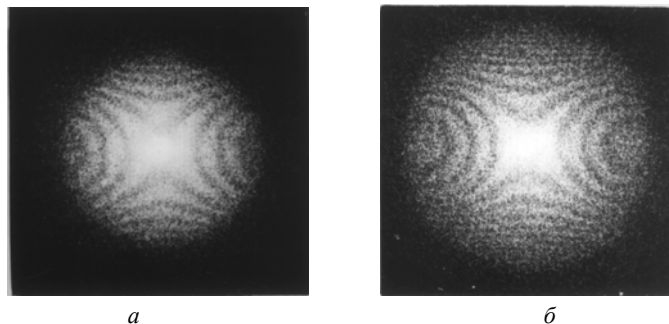


Рис. 3. Интерференционные картины в полосах равной толщины, зарегистрированные в случае выполнения записи голограмм в плоскости наилучшего фокуса, для диаметра зрачка контролируемой линзы: *a* – 14 мм, *b* – 18 мм

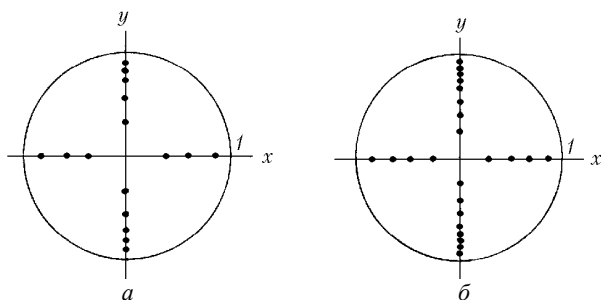


Рис. 4. Положения на осях  $x, y$  минимумов интерференционных полос для диаметра зрачка контролируемой линзы: *a* – 14 мм, *b* – 18 мм

Если интерференционная картина на рис. 2 характеризуется только астигматизм контролируемой линзы, то дальнейшее увеличение диаметра ее зрачка, когда  $d \geq 2 \sqrt[4]{0,8\lambda f^3}$ ,

приводит к тому, что интерференционная картина в полосах равной толщины принимает характерный вид для случая сочетания астигматизма и сферической aberrации. Так, на рис. 3 представлены интерференционные картины, зарегистрированные на стадии восстановления голограмм, запись которых выполнялась для диаметров зрачка контролируемой линзы:  $d_1 = 14$  мм,  $d_2 = 18$  мм. В эксперименте диаметр зрачка изменялся путем изменения диаметра диафрагмы, которая устанавливалась в плоскости формирования спектра пространственных частот амплитудного рассеивателя, т.е. в плоскости зеркала 4 на рис. 1 в [3]. Так как величины  $d_1$  и  $d_2$  находятся в рамках рассматриваемого приближения

( $d \leq 2 \sqrt[6]{1,6\lambda f^5}$ ), то на основании выражения (8) с учетом того, что коэффициент астигматизма увеличивается пропорционально квадрату радиуса зрачка линзы [4], можно рассчитать положения на осях минимумов интерференционных полос. Для нормированного радиуса зрачка контролируемой линзы эти положения указаны точками на рис. 4, и они соответствуют положениям минимумов интерференционных полос на осях  $x, y$  для рис. 3 с точностью до ошибки, допускаемой при фотометрировании.

Таким образом, результаты проведенных исследований показали, что в случае записи голограммы сфокусированного изображения амплитудного рассеивателя по схеме Габора для контроля осевых волновых aberrаций положительной линзы или объектива возникает систематическая ошибка, которую необходимо учитывать при дешифровке интерферограммы. Эта ошибка обусловлена сферической aberrацией голограммы, когда диаметр зрачка контролируемой линзы или объектива не удовлетворяет условию дифракции Френеля.

Проведение исследований с целью учета еще более высокого порядка приближения, чем третий порядок, затруднено тем обстоятельством, что с увеличением диаметра

ра зрачка увеличивается частота интерференционных полос (рис. 3,б).

При этом период интерференционных полос становится соизмерим с размером субъективного спекла в плоскости их регистрации. В результате этого уменьшается видность интерференционной картины, так как интерференционные полосы модулируют субъективную спекл-структуру. В связи с этим повышение контрастности интерференционной картины может быть обеспечено путем применения широкоугольной оптической системы для ее регистрации с довольно малой величиной фокусного расстояния (по крайней мере на порядок меньше, чем фокус-

ное расстояние объектива, используемого в эксперименте), чтобы уменьшить размер спекла.

1. Гусев В.Г. // Изв. вузов. Физика. 1996. № 10. С. 75–80.
2. Гусев В.Г. // Оптич. ж. 1998. Т. 65. № 2. С. 36–40.
3. Гусев В.Г. // Оптика атмосф. и океана. 2001. Т. 14. № 3. С. 187–188.
4. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970. 846 с.
5. Гудмен Д. Введение в Фурье-оптику. М.: Мир, 1970. 359 с.
6. Франсон М. Оптика спеклов. М.: Мир, 1980. 158 с.
7. Gabor D. // Nature (Gr. Brit.). 1948. V. 161. P. 777–778.
8. Джоунс Р., Уайкс К. Голографическая и спекл-интерферометрия. М.: Мир, 1986. 320 с.

***V.G. Gusev. Formation of interferograms in diffusively scattered light when recording the hologram of amplitude screen focused image by the Gabor method.***

An analysis of recording and reconstruction of hologram of amplitude screen focused image for the control of axial wave aberration of a lens is presented. It is shown theoretically and experimentally that the three order of approximation gives an error of the control because of the hologram spherical aberration.