<Оптика атмосферы и океана>, **7**, N 7(1994)

УДК 534.231

Н.Г. Абрамов

О РАДИУСЕ КРИВИЗНЫ ЗВУКОВОГО ЛУЧА В НЕОДНОРОДНОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Получено точное выражение для радиуса кривизны звукового луча в неоднородной движущейся среде. Исследование проведено для двумерного пространства в неортогональной криволинейной системе координат, связанной с некоторым опорным лучом.

Один из известных способов построения траектории луча основан на знании радиуса кривизны луча $\rho(s)$ как функции длины луча s (см., например, [1, 2, 3]). Выражение для радиуса кривизны для неоднородной неподвижной среды хорошо известно (см., например [4]). Для движущейся неоднородной среды известна приближенная формула для $\rho(s)$ [2], справедливая при малых скоростях ветра. В настоящей статье получено точное выражение для радиуса кривизны звукового луча в неоднородной движущейся среде с помощью методики из [5, 6].

Исследование проведено для двумерного пространства в неортогональной криволинейной системе координат в окрестности некоторого опорного луча. Применение неортогональных координат физически оправдано тем, что при распространении звука в движущейся среде фазовый фронт неортогонален направлению луча (фазовая и групповая скорости звука не совпадают) [7]. В математическом отношении это несколько усложняет запись исходных уравнений, однако конечные выражения имеют более простой и наглядный вид, что оправдывает данный подход.

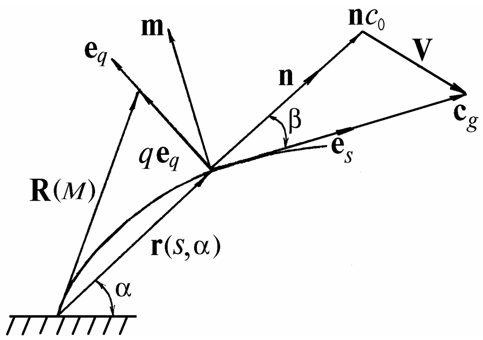

Рис. 1

Опишем координатную систему, связанную с некоторым опорным лучом $\mathbf{r}(s, \alpha)$ (см. рис. 1). Координата s изменяется вдоль единичного вектора $\mathbf{e}_s(s)$, указывающего направление групповой скорости звука в опорном луче; координата q изменяется вдоль касательной к фазовому фронту в точке пересечения его с опорным лучом (вдоль единичного вектора $\mathbf{e}_q(s)$); α – угол вылета луча. Репер системы координат ($\mathbf{e}_s(s)$; $\mathbf{e}_q(s)$) неортогонален. Радиус-вектор произвольной точки M в этой системе координат записывается в виде

$$\mathbf{R}(M) = \mathbf{r}(s) + \mathbf{e}_q(s)\, q,$$

где s – координата точки M на опорном луче; $\mathbf{r}(s)$ – радиус-вектор координаты s; q – поперечная координата точки M.

Для определения метрического тензора g_{ij} для данной системы координат вычислим скалярное произведение [1]:

$$\left(\frac{d\,\mathbf{R}}{d\,s}, \frac{d\,\mathbf{R}}{d\,s}\right) = \left(\frac{d\,\mathbf{r}}{d\,s} + \frac{d\,q}{d\,s}\,\mathbf{e}_q + q\,\frac{d\,\mathbf{e}_q}{d\,s}\right)^2. \tag{1}$$

Рассмотрим в (1) величину $\frac{d\,\mathbf{e}_q}{d\,s}$. Из геометрических построений рис. 1 следует, что

$$\mathbf{e}_q(s) = \mathbf{m}(s)\cos\beta(s) - \mathbf{e}_s(s)\sin\beta(s), \tag{2}$$

где $\mathbf{m}(s)$ – единичный вектор, ортогональный к $\mathbf{e}_s(s)$; $\beta(s)$ – угол между направлениями фазовой и групповой скоростей звука (между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{e}_s$). Поскольку для векторов $\mathbf{m}(s)$ и $\mathbf{e}_s(s)$ справедливы формулы Френе [3]:

$$\frac{d\,\mathbf{m}}{d\,s} = \frac{1}{\mathrm{r}}\,\mathbf{e}_s(s); \quad \frac{d\,\mathbf{e}_s}{d\,s} = -\frac{1}{\rho}\,\mathbf{m}(s), \tag{3}$$

то, используя (2) и (3), получим важную для нас формулу

$$\frac{d\,\mathbf{e}_q}{d\,s} = -\,1\,/\,\rho^*\,\mathbf{n}(s), \tag{4}$$

где введено обозначение $1/\rho^*(s) = 1/\rho(s) - d\beta/ds$; $\mathbf{n}(s)$ – единичный вектор нормали к фазовому фронту. Учитывая (4) и равенство $d\mathbf{r}/ds = \mathbf{e}_s$ в (1), получим

$$(d\,\mathbf{R}, d\,\mathbf{R}) = \left(1 + 2\,\frac{q}{\rho^*}\cos\beta + \frac{q^2}{\rho^{*2}}\right)(d\,s)^2 - 2\sin\beta\,d\,q\,d\,s + (d\,q)^2.$$

Следовательно,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + 2\,q/\rho^*\cos\beta + q^2/\rho^{*2}; & -\sin\beta \\ -\sin\beta; & 1 \end{pmatrix}.$$

Для построения траектории звукового луча в движущейся среде необходимо определить связь $1/\rho^*(s)$ с параметрами среды $c(s, q)$ и $\mathbf{v}(s, q)$. После этого, используя выражение (4), можно построить траекторию луча в плоскости (s, q).

Выражение для $1/\rho^*(s)$ получается при решении уравнения эйконала в криволинейных неортогональных координатах в малой окрестности опорного луча. Данное уравнение запишем в виде [8]

$$(\nabla\,\theta)^2 = (1 - \nabla\,\theta, \mathbf{v}(s, q))^2\,/\,c^2\,(s, q). \tag{5}$$

Если эйконал $\theta(s, q)$ и все входящие в уравнение (5) величины разложить в ряды Тейлора по поперечной координате q и собрать слагаемые при одинаковых степенях, то при первой степени q получится искомое выражение.

Приступим к решению. Распишем подробнее величины, входящие в (5). Вектор градиента эйконала имеет ковариантные компоненты. Поэтому

$$(\nabla\,\theta)^2 = g^{11}\,(\partial\theta\,/\,\partial s)^2 + 2\,g^{12}\,\partial\theta\,/\,\partial s\,\partial\theta\,/\,\partial q + g^{22}\,(\partial\theta\,/\,\partial q)^2, \tag{6}$$

где g^{ij} – матрица, обратная матрице g_{ij}. Поскольку компоненты вектора $\mathbf{v}(s, q)$ контравариантные, то скалярное произведение $\nabla\theta$ на $\mathbf{v}(s, q)$ запишется в виде

$$(\nabla\,\theta, \mathbf{v}) = \partial\theta\,/\,\partial s\,\upsilon^s(s, q) + \partial\theta\,/\,\partial q\,\upsilon^q(s, q), \tag{7}$$

где $\upsilon^s(s, q)$ и $\upsilon^q(s, q)$ – компоненты вектора $\mathbf{v}(s, q)$ в криволинейной неортогональной системе координат.

Найдем решение уравнения эйконала (5) в виде

$$\theta(s, q) = \theta_0(s) + \frac{1}{2}\,\theta_2(s)\,q^2 + \ldots,$$

где $\theta_0(s) = \theta(s, 0)$; $\theta_2(s) = (\partial^2\theta / \partial q^2)_{q=0}$. Поскольку координата q изменяется вдоль оси, являющейся касательной к фазовому фронту в точке (s, $q = 0$), то $(\partial\theta/\partial q)_{q=0} = 0$.

Все слагаемые, входящие в уравнение эйконала (5), также разложим в ряд по степеням q:

$$\partial\theta / \partial s = \theta_0'(s) + \frac{1}{2}\,\theta_2'(s)\,q^2 + \ldots, \tag{8}$$

где штрих означает производную по ds: $\theta_0'(s) = \partial\theta_0 / \partial s$ и т. д.

$$\partial\theta / \partial q = \theta_2(s) + \frac{1}{2}\,\theta_3(s)\,q^2 + \ldots. \tag{9}$$

Учитывая (8) и (9) и раскладывая в ряды по степеням q все компоненты тензора

$$g^{ij} = g_{ij}^{-1} = \frac{1}{g}\begin{pmatrix} 1; & \sin\beta \\ \sin\beta; & 1 + 2\,q/\rho^*\cos\beta + q^2/\rho^{*2} \end{pmatrix},$$

где $g = \det g_{ij} = (\cos\beta + q / \rho^*)^2$, получим

$$(\nabla\,\theta)^2 = \frac{1}{\cos^2\beta}\left\{\theta_0'^2 - 2\,\frac{1}{\rho_c}\,\theta_0'^2\,q + \left(\theta_0'\,\theta_2' + 3\,\frac{1}{\rho_c^2}\,\theta_0'^2\right)q^2\right\} + 2\,\frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\beta}\left\{\theta_0'\,\theta_2'\,q + \left(\frac{1}{2}\,\theta_0'\,\theta_3 - 2\,\frac{1}{\rho_c}\,\theta_0'\,\theta_2\right)q^2\right\} +$$

$$+ \frac{1}{\cos^2\beta}\,\theta_2^2\,q^2. \tag{10}$$

Здесь последовательно разложены в ряды три слагаемых (6) с точностью до второй степени q, $\rho_c = \rho^*\cos\beta$.

Компоненты вектора скорости ветра $\upsilon^s(s, q)$ и $\upsilon^q(s, q)$ и скорость звука также разложим в ряды Тейлора:

$$\upsilon^s(s, q) = \upsilon_0^s(s) + \upsilon_1^s(s)\,q + \frac{1}{2}\,\upsilon_2^s(s)\,q^2 + \ldots; \tag{11}$$

$$\upsilon^q(s, q) = \upsilon_0^q(s) + \upsilon_1^q(s)\,q + \frac{1}{2}\,\upsilon_2^q(s)\,q^2 + \ldots; \tag{12}$$

$$c(s, q) = c_0(s) + c_1(s)\,q + \frac{1}{2}\,c_2(s)\,q^2 + \ldots, \tag{13}$$

где введены обозначения:

$$\upsilon_0^s(s) = \upsilon^s(s, 0); \quad \upsilon_1^s(s) = (\partial\,\upsilon^s / \partial q)_{q=0}; \quad \upsilon_2^s(s) = (\partial^2\upsilon^s / \partial q^2)_{q=0},$$

(аналогично для составляющей $\upsilon^q(s, q)$),

$$c_0(s) = c(s, 0);\ \ c_1(s) = (\partial\,c / \partial\,q)_{q=0};\ \ c_2(s) = (\partial^2 c / \partial q^2)_{q=0}.$$

Используя (8), (9), (11), (12), запишем в виде ряда выражение (7):

$$(\nabla\,\theta, \mathbf{v}) = \theta_0'\,\upsilon_0^s + (\theta_0'\,\upsilon_1^s + \theta_2\,\upsilon_0^q)\,q + \left[\frac{1}{2}\,(\theta_0'\,\upsilon_2^s + \theta_2'\,\upsilon_0^s) + (\theta_2\,\upsilon_1^q + \frac{1}{2}\,\theta_3\,\upsilon_0^q)\right]q^2. \tag{14}$$

Из (13) имеем

$$\frac{1}{c^2(s, q)} = \frac{1}{c_0^2(s)}\left(1 - 2\,\frac{c_1(s)}{c_0(s)}\,q + 3\,\frac{c_1^2(s)}{c_0^2(s)}\,q^2 - \frac{c_2(s)}{c_0(s)}\,q^2\right). \tag{15}$$

Для краткости записи введем вспомогательные обозначения:

$$A = \theta_0' \upsilon_0^s; \quad B = (\theta_0' \upsilon_1^s + \theta_2 \upsilon_0^q); \quad D = \frac{1}{2}(\theta_0' \upsilon_2^s + \theta_2' \upsilon_0^s) + (\theta_2 \upsilon_1^q + \frac{1}{2}\theta_3 \upsilon_0^q). \tag{16}$$

Учитывая (14), (15), (16), получим выражения для слагаемых в уравнении эйконала (5):

$$2\frac{(\nabla\theta, \mathbf{v})}{c^2(s, q)} = \frac{2}{c_0^2(s)}\left\{A - \left(2A\frac{c_1(s)}{c_0(s)} - B\right)q + \left(3A\frac{c_1^2(s)}{c_0^2(s)} - A\frac{c_2(s)}{c_0(s)} - 2B\frac{c_1(s)}{c_0(s)} + D\right)q^2\right\}, \tag{17}$$

$$\frac{(\nabla\theta, \mathbf{v})^2}{c^2(s, q)} = \frac{1}{c_0^2(s)}\left\{A^2 + 2\left(AB - A^2\frac{c_1(s)}{c_0(s)}\right)q + \left(3A^2\frac{c_1^2(s)}{c_0^2(s)} - A^2\frac{c_2(s)}{c_0(s)} - 4AB\frac{c_1(s)}{c_0(s)} + 2AD + B^2\right)q^2\right\}. \tag{18}$$

Теперь соберем слагаемые в уравнении (5) при одинаковых степенях q. При нулевой степени q получим уравнение

$$\frac{1}{\cos^2\beta}\theta_0'^2 + 2\frac{1}{c_0^2(s)}\theta_0' \upsilon_0^s - \frac{1}{c_0^2(s)}\theta_0'^2 \upsilon_0^{s2} = \frac{1}{c_0^2(s)}.$$

Решая это квадратное уравнение относительно θ_0', получим

$$\theta_0' = \frac{\cos\beta(s)}{c_0(s) + \upsilon_0^s(s)\cos\beta(s)}. \tag{19}$$

Учтем, что групповая скорость звука на опорном луче определяется соотношением [7]

$$\mathbf{c}_g(s, 0) = \mathbf{e}_s\, c_g(s, 0) = c(s, 0)\,\mathbf{n}(s) + \mathbf{v}(s, 0).$$

Тогда из геометрических построений рис. 2 видно, что выражение в знаменателе правой части (19) является модулем групповой скорости звука $c_g(s)$. Уравнение (19) можно представить в виде

$$\theta_0 = \int_0^s \frac{ds}{c_g(s)}. \tag{20}$$

Из последнего выражения ясен физический смысл первого члена в разложении функции эйконала в ряд Тейлора. Величина θ_0 равна времени распространения звука вдоль опорного луча из точки (0, 0) до точки (s, 0).

Запишем уравнение при первой степени q:

$$\frac{1}{\cos^2\beta\,\rho_c}\theta_0'^2 - \frac{\mathrm{tg}\beta}{\cos\beta}\theta_0'\theta_2 - \frac{1}{c_0^2}\left[(\theta_0'\upsilon_1^s + \theta_2\upsilon_0^q) - 2\theta_0'\upsilon_0^s\frac{c_1}{c_0}\right] + \frac{1}{2c_0^2}\left\{\theta_0'\upsilon_0^s\left[(\theta_0'\upsilon_1^s + \theta_2\upsilon_0^q) - 2\theta_0'\upsilon_0^s\frac{c_1}{c_0}\right] + \theta_0'\upsilon_0^s(\theta_0'\upsilon_1^s + \right.$$

$$\left. + \theta_2\upsilon_0^q\right\} = \frac{1}{c_0^2}\frac{c_1}{c_0}. \tag{21}$$

Учтем, что $\beta \in [-\pi, \pi]$ и что $\beta > 0$ при отсчете от вектора $\mathbf{e}_s$ против часовой стрелки, в противном случае $\beta < 0$. Учтем также, что $\upsilon_0^q / c_0 = -\mathrm{tg}\,\beta$ для восходящего луча и $\upsilon_0^q / c_0 = \mathrm{tg}\,\beta$ для нисходящего луча (см. рис. 2, *а* и 2, *б* соответственно). Тогда слагаемые (21), содержащие θ_2, в сумме дают ноль. Оставшееся выражение (21) можно разрешить относительно $1/\rho_c = 1/(\rho^*\cos\beta)$, используя равенство $\theta_0' = \cos\beta / (c_0 + \upsilon_0^s\cos\beta)$. В итоге получим выражение для радиуса кривизны звукового луча в неоднородной движущейся среде

$$\frac{1}{\rho^*(s)} = \frac{\partial c/\partial q + \partial\upsilon^s/\partial q\,\cos\beta(s)}{c(s, 0)}\cos\beta(s), \tag{22}$$

где $1/\rho^*(s) = 1/\rho\,(s) - d\beta/ds$. Все призводные берутся на опорном луче в точке $(s, 0)$.

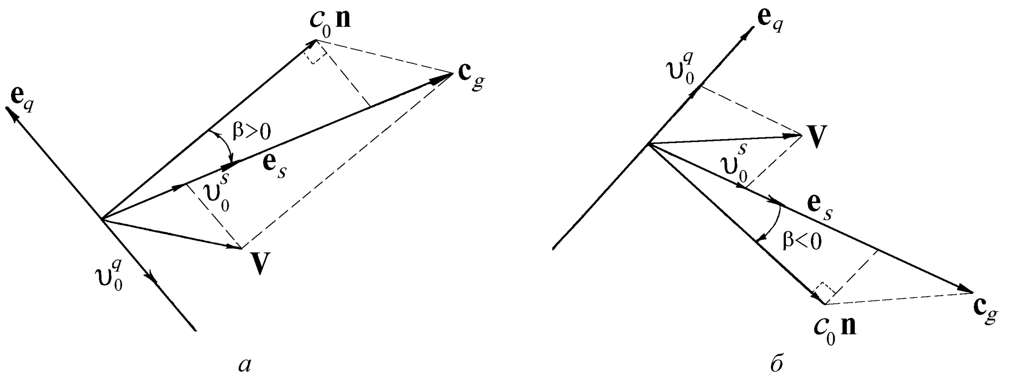

Рис. 2

При $\mathbf{v}(s, q) = 0$ выражение (22) совпадают с соответствующим выражением для радиуса кривизны для неподвижной среды (см., например, [1, 2, 4]). При этом векторы $\mathbf{e}_s$ и $\mathbf{e}_q$ будут перпендикулярны, $\beta(s) = 0$ и $1/\rho^*(s) = 1/\rho\,(s)$. Отметим, что влияние движения среды на радиус кривизны выражается через $\partial\upsilon^s/\partial q\cos\beta\,(s)$ – проекцию производной составляющей скорости $\upsilon^s(s, q)$ на нормаль к фазовому фронту в точке $(s, q = 0)$. Влияние самого вектора $\mathbf{v}(s, 0)$ выражается через значение величины $\cos\beta(s)$. От производных составляющей скорости ветра вдоль касательной к фазовому фронту $\upsilon^q(s, q)$ радиус кривизны не зависит. Используя выражение (22), формулу (4) и зная параметры среды $c(s, q)$ и $\mathbf{v}(s, q)$ как функции координат, можно построить лучевые траектории.

Для построения лучей в неоднородной движущейся среде часто используют интегральное уравнение луча [9]. По сравнению с этим способом построение лучей на основе выражения для радиуса кривизны обладает следующими преимуществами:

1. Параметры c и $\mathbf{v}$ могут быть функциями двух переменных (при обобщении результатов настоящей статьи для случая трехмерного пространства – трех переменных). Интегральное уравнение луча существует только для слоистой среды.

2. Точка поворота луча (при использовании данного метода) не является особой точкой траектории луча. Построение луча в ее окрестности проводится так же, как и в любой точке луча. Построение луча из интегрального уравнения в окрестности точки поворота связано с известными трудностями.

Недостатком данного метода является необходимость бóльшего времени счета.

Упомянутое выше известное в литературе выражение для радиуса кривизны звукового луча в неоднородной движущейся среде находилось в линейном приближении по $\mathbf{v}/c$ [2]. Такое приближение приводит к ошибкам при построении траектории луча, причем выражение для радиуса кривизны имеет более громоздкий вид.

Примечание. Выражение для радиуса кривизны получено в ходе построения гауссова пучка в неоднородной движущейся среде. Для его построения осталось решить уравнение при второй степени q для θ_2. Подобно случаю неподвижной среды для θ_2 должно быть получено уравнение типа Риккати [1, 5, 6]. Для нахождения амплитуды гауссова пучка необходимо дополнительно рассмотреть в окрестности опорного луча уравнение переноса для неоднородной движущейся среды [8].

Автор благодарит В.М. Бабича за полезные обсуждения и доброжелательность, А.Я. Богушевича, Н.П. Красненко – за помощь и поддержку в работе над статьей.

1. Бабич В.М., Попов М.М. // Акустический журнал. 1981. Т. 27, Вып. 6. С. 828 – 835.
2. Мюлали Р.Ф. // Лучевое приближение и вопросы распространения радиоволн / Под ред. М.П. Кияновского. М.: Наука, 1971. 311 с.
3. Новиков С.П., Фоменко А.Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. М.: Наука, 1987. 432 с.
4. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические формулы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 453 с.

5. Б а б и ч В . М . , Б у л д ы р е в В . С . , М о л о т к о в И . А . Пространственно-временной лучевой метод: Линейные и нелинейные волны. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1985. 272 с.
6. Б а б и ч В.М., П о п о в М.М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. N 12. С. 1447 – 1466.
7. Б л о х и н ц е в Д . И . Акустика неоднородной движущейся среды. Изд. 2-е. М.: Наука, 1981. 206 с.
8. Г р и г о р ь е в а Н . С . Асимптотические методы в задачах о распространении звука в неоднородной движущейся среде. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та. 1991. 240 с.
9. О с т а ш е в В . Е . Распространение звука в движущихся средах. М.: Наука, 1992. 208 с.

ИОА СО РАН,
г. Томск

Поступила в редакцию
12 декабря 1993 г.

N . G . A b r a m o v . **Radius of Curvature of a Sound Beam in an Inhomogeneous Moving Medium.**
In this paper we present an exact formula for the radius of curvature of a sound beam derived for the case of a moving inhomogeneous medium. In our study we used a nonorthogonal curvilinear coordinate system reffered to a reference ray.