

**В.В. Воробьев**

# **Метод и некоторые результаты численного моделирования флуктуаций интенсивности плоской световой волны за фазовым экраном в области многолучевости.**

## **1. Средняя интенсивность**

*Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, г. Москва*

Поступила в редакцию 22.10.2001 г.

Исследуется пространственная структура средней интенсивности света за фазовым экраном, содержащим одномерные регулярные и двумерные случайные неоднородности. Сформулированы условия, при которых совпадают среднее по ансамблю и среднее по апертуре приемника распределения интенсивности и условия, при которых для расчета средних распределений применимо уравнение переноса излучения. Обсуждается вопрос о корректности обратной задачи. Показано, что нельзя восстановить распределение регулярной фазы на экране по измерениям средней интенсивности света в области многолучевости.

### **Введение**

Применимость методов численного моделирования распространения световых пучков, описываемых уравнениями квазиоптики, ограничена очевидными условиями: шаг расчетной сетки должен быть меньше минимального пространственного масштаба изменения светового поля, размер расчетной апертуры в поперечном сечении должен быть больше, чем размер светового пучка. Эти условия требуются как в разностных схемах нахождения решения, так и в прямых схемах, в которых, например, используются метод фазовых экранов и метод дискретного быстрого преобразования Фурье. Эти методы успешно применяются для исследования трансформации лазерных пучков в турбулентных и нелинейных средах [1–3].

Имеется, однако, ряд задач, которые из-за указанных условий не могут быть решены стандартными методами расчета трансформации волновых полей. Одна из них – это задача моделирования мерцаний звезд, наблюдаемых через атмосферу Земли с орбитальных аппаратов. Уникальные данные этих наблюдений, их интерпретация и подробная библиография по смежным вопросам приведены в [4, 5].

Характерными для данной проблемы являются большой диапазон пространственных масштабов атмосферных неоднородностей, формирующих картину мерцаний (порядка 1 см – 10 км в плоскости, перпендикулярной световому лучу), и еще больший диапазон масштабов изменения интенсивности и фазы светового поля. Если максимальные масштабы при этом такие же, как масштабы неоднородностей показателя преломления, т.е. около 10 км, то минимальные, определяемые интерференцией рассеянных полей, в области многолучевости могут составлять доли миллиметра. Таким образом, диапазон пространственных масштабов светового поля составляет 8–9 по-

рядков, что значительно усложняет реализацию алгоритмов расчета полей.

Информацию о пространственной структуре светового поля с масштабами меньше размера приемной апертуры практически невозможно извлечь из данных наблюдений, поэтому она является излишней. (Отметим, что и размеры апертуры для регистрации излучения отдельной звезды не могут быть меньшими нескольких сантиметров). Целью данной работы является разработка метода моделирования непосредственно усредненных по апертуре конечного размера распределений интенсивности светового поля, минуя этап расчета самого поля. Работа состоит из двух частей. В первой получены простые соотношения для расчета усредненных мерцаний, сформулированы условия их применимости. На основе этих соотношений исследована связь между распределением среднего угла рефракции на фазовом экране и распределением средней интенсивности светового поля – одной из основных характеристик мерцаний. Во второй части приведены результаты численного моделирования мерцаний, вызываемых неоднородностями атмосферы слоистого типа, которым можно поставить в соответствие одномерный фазовый экран.

### **Постановка задачи**

Предположим, что фазовый экран находится в плоскости  $x = 0$  и на нем задано распределение фазы  $\varphi(z, y)$  в виде

$$\varphi(z, y) = k[S_0(z) + S_1(z, y)],$$

где  $k$  – волновое число;  $S_0(z)$  – регулярная составляющая эйконала, зависящая только от одной координаты  $z$ ;  $S_1(z, y)$  – его случайная составляющая, являющаяся функцией двух координат. Разделение на регулярную и случайную составляющие может

быть проведено с некоторым произволом. В частности, в регулярную часть можно включить составляющую фазового набега, вносимую неоднородностями слоистого типа с достаточно большими масштабами, а в случайную – мелкомасштабную часть неоднородностей слоистого типа и часть фазового набега, вносимую локально-изотропной турбулентностью. Конкретные ограничения на масштабы будут сформулированы далее. Предположим также, что средняя по ансамблю величина  $\langle S_1(z, y) \rangle = 0$ , регулярная составляющая  $S_0(z) = \langle S(z, y) \rangle$ . Здесь угловыми скобками обозначается среднее по ансамблю реализаций. Относительно флуктуационной части будем считать, что она является локально-однородной функцией координат  $z$  и  $y$ , имеет нормальное распределение и структурную функцию

$$\begin{aligned} \tilde{D}(z_1, z_2, y_1, y_2) &= \langle [S_1(z_1, y_1) - S_1(z_2, y_2)]^2 \rangle = \\ &= C(z_1 + z_2) D(z_1 - z_2, y_1 - y_2). \end{aligned} \quad (1)$$

Дифрагированное поле измеряется в плоскости, отстоящей на расстоянии  $L$  от фазового экрана. В параксиальном приближении его интенсивность задается выражением

$$\begin{aligned} I(z, y) &= \left( \frac{k}{2\pi L} \right)^2 \int \exp\{i[\varphi(z_1, y_1) - \varphi(z_2, y_2)]\} \times \\ &\times \exp\left[ \frac{ik}{2} \left( \frac{(z - z_1)^2 - (z - z_2)^2 + (y - y_1)^2 - (y - y_2)^2}{L} \right) \right] \times \\ &\times dz_1 dz_2 dy_1 dy_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь и далее интенсивность падающей плоской волны полагается равной единице, пределы интегрирования, если они не обозначены, полагаются равными  $(-\infty, +\infty)$ .

### Средняя интенсивность на точечном приемнике

Усреднение выражения (2) по ансамблю реализаций с учетом соотношения (1) дает

$$\begin{aligned} \langle I(z) \rangle &= \frac{k}{2\pi L} \times \\ &\times \int \exp\left[ ik[\Psi_0(\eta, \xi) + \frac{\eta - z}{L}\xi] - \frac{1}{2}k^2 C(\eta) D(\xi, 0) \right] d\eta d\xi, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\Psi_0(\eta, \xi) = S_0(\eta + \xi/2) - S_0(\eta - \xi/2).$$

Определим радиус когерентности  $r_c(\eta)$  на фазовом экране как расстояние, на котором величина  $k^2 C(\eta) D[r_c(\eta)] = 2$ . Предположим, что структурная функция  $D$  – степенная. Тогда величину  $C(\eta) D(\xi)$  можно записать в виде  $C(\eta) D(\xi) = 2|\xi/r_c(\eta)|^\beta$ . Существенной для интегрирования (3) по координате  $\xi$  областью является окрестность точки  $\xi = 0$  радиуса  $r_c(\eta)$ . Если размеры регулярных неоднородностей  $H$  много больше, чем радиус когерентности, то функцию  $\Psi_0(\eta, \xi)$  вблизи точки  $\xi = 0$  можно разложить в степенной ряд:

$$\Psi_0(\eta, \xi) = [\gamma(\eta)\xi + B(\eta)\xi^3 + \dots], \quad (4)$$

где

$$\gamma(\eta) = \frac{dS_0(\eta)}{d\eta} = S_0'(\eta)$$

– распределение угла рефракции на фазовом экране;

$$B(\eta) = \frac{1}{24} \frac{d^3 S_0(\eta)}{d\eta^3} = \frac{1}{24} S_0'''(\eta). \quad (5)$$

Если размеры неоднородностей достаточно велики, то при вычислении средней интенсивности можно ограничиться первым членом разложения (4). С помощью численного интегрирования было выяснено, что для этого при степенной структурной функции с показателем степени  $\beta = 5/3$  достаточно

$$R_c(\eta) \geq l_k(\eta), \quad (6)$$

где

$$R_c(\eta) = L/k r_c(\eta); \quad l_k(\eta) = 3L[|B(\eta)|/k^2]^{1/3}.$$

Величина  $R_c$  является масштабом функции размытия точки [6] (радиусом эффективной площади в плоскости наблюдения, по которой размывается точечный пучок лучей вследствие дифракции и случайного блуждания). Величина  $l_k$  – характерный пространственный размер прикаустической области в отсутствие случайных неоднородностей. Если условие (6) выполнено, интеграл (3) представляется в виде

$$\langle I(z) \rangle = \int G[p(z, \eta), \eta] d\eta, \quad (7)$$

где

$$p(z, \eta) = \eta + L\gamma(\eta) - z;$$

$$G[p(z, \eta), \eta] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \exp\left[ -\frac{1}{2}k^2 C(\eta) D\left(\frac{L}{k}t\right) + ip(z, \eta)t \right] dt \quad (8)$$

– спектр Фурье функции когерентности светового поля (функция размытия точки). Функция  $G[p(z, \eta), \eta]$  – нормирована,  $\int G(p, \eta) dp = 1$ . При степенной структурной функции

$$G[p(z, \eta), R_c(\eta)] = \frac{1}{R_c(\eta)} g\left[\frac{p(z, \eta)}{R_c(\eta)}, \beta\right], \quad (9)$$

где

$$g(q, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int \exp[-|t|^\beta + iqt] dt.$$

Отметим, что решение (7) с функцией  $G(p, \eta)$ , задаваемой выражением (8), является решением малуглового приближения уравнения переноса излучения в среде с регулярными неоднородностями [7], если это решение находить в приближении фазового экрана.

Функции  $g(q, \beta)$  могут быть легко найдены с помощью численного интегрирования, затабулированы или представлены в каком-либо другом, удобном для дальнейшего интегрирования виде. В частности, при значении  $\beta = 5/3$ , которое соответствует показателю

степени колмогоровской турбулентности, функция  $g(q)$  может быть аппроксимирована как

$$g(q) = g_1(q)(q \leq q_1) + g_2(q)(q_1 < q \leq q_2) + g_3(q)(q > q_2), \quad (10)$$

где

$$g_1(q) = \frac{3}{5\pi} \Gamma\left(\frac{3}{5}\right) \exp[-(0,52q)^2],$$

$$g_2(q) = g_1(q_1) \left(\frac{q_1}{q}\right)^3, \quad g_3(q) = g_2(q_2) \left(\frac{q_2}{q}\right)^{8/3},$$

$$q_1 = 3, \quad q_2 = 22.$$

Относительная ошибка этого приближения на интервале  $0 \leq q \leq 100$  не превышает 2%.

Вычисление распределения средней интенсивности, таким образом, сводится к вычислению однократного интеграла (7). Существенными для интегрирования областями при этом являются области радиуса порядка  $R_c$ , вблизи точек, в которых величина  $p(z, \eta) = 0$ . Пусть этими точками являются  $\eta_n(z)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Это точки стационарности регулярной фазы на экране, точки, из которых приходят лучи в точку наблюдения с координатой  $z$ . Если расстояния между соседними стационарными точками превышают величину  $R_c$  и точка  $z$  не является особой, т.е.  $1 + L\gamma'[\eta_n(z)] \neq 0$  при всех  $n$ , из формулы (7) следует приближенное соотношение для средней интенсивности

$$\langle I(z) \rangle = \sum_n \frac{1}{|1 + L\gamma'[\eta_n(z)]|}. \quad (11)$$

Распределение  $\langle I(z) \rangle$  при указанных условиях не зависит от величины  $R_c$  и, следовательно, от значения радиуса когерентности. Если стационарная точка одна, то

$$\langle I(z) \rangle = \frac{1}{|1 + L\gamma'[\eta(z)]|}. \quad (12)$$

При этом высотное распределение средней интенсивности то же, что и регулярное распределение интенсивности в отсутствие случайных неоднородностей.

В случае многолучевости средняя интенсивность (11) представляет собой сумму интенсивностей полей, формируемых стационарными точками на экране. Ее распределение по  $z$ , естественно, отличается от распределения, формирующегося в отсутствие случайных неоднородностей и представляющего собой сложную картину интерференции полей, приходящих в точку наблюдения из окрестностей стационарных точек. Турбулентность при выполнении условия (6) «замывает» интерференционную картину и сложную структуру прикаустических областей.

### Средняя интенсивность на апертуре конечных размеров

Пространственные масштабы распределения средней интенсивности, создаваемого в плоскости наблюдения крупномасштабными, регулярными неоднород-

ностями, ограничены снизу величиной  $R_c$ , которая может меняться в интервале от нескольких сантиметров на высотах перигеев световых лучей (минимальных расстояний от поверхности Земли до лучей) около 40 км до десятков метров на высотах около 10 км. Эти величины сравнимы с размерами эффективных приемных апертур в реальных измерениях мерцаний. В измерениях под размером эффективной апертуры понимается наибольший из следующих:

$R_{ap}$  – радиус приемного объектива, стандартная величина которого составляет 5–10 см;

$R_t$  – расстояние, на которое перемещается приемник за время накопления сигнала. Это расстояние составляет несколько десятков сантиметров в измерениях с частотой отсчета порядка 10 кГц [4, 5] и сотни метров при спектроскопических измерениях [8];

$R_d$  – величина дисперсионного смещения лучей на крайних длинах волн спектральной полосы приемника, которая в видимом диапазоне при ширине полосы 10 нм может достигать десятков метров на высотах порядка 15–10 км [4, 5].

Пусть приемник имеет прямоугольную апертуру с полуширинами  $R_z$  по вертикальной оси и  $R_y$  по горизонтальной. Они могут быть функциями координаты  $z$ . Двойное среднее (по апертуре и по реализациям) значение интенсивности определим как

$$\langle I_S(z, R_z, R_y) \rangle = \frac{1}{4R_z R_y} \left\langle \int_{-R_z}^{R_z} \int_{-R_y}^{R_y} I(z + z', y + y') dz' dy' \right\rangle. \quad (13)$$

Учитывая определение (2), после интегрирования (13) по координатам  $z'$  и  $y'$  для среднего распределения интенсивности на апертуре получим соотношение:

$$\langle I_S(z, R_z) \rangle = \int G_S[p(z, \eta), R_z, \eta] d\eta, \quad (14)$$

где

$$G_S[p(z, \eta), R_z, \eta] = \frac{1}{2\pi} \times \int \exp\left[-\frac{1}{2}k^2 C(\eta) D\left(\frac{L}{k}\right) + ip(z, \eta)t\right] \frac{\sin(R_z t)}{R_z t} dt. \quad (15)$$

Выражение под интегралом (15) отличается от (7) наличием апертурного множителя  $\sin(R_z t)/R_z t$ . Функция  $G_S$  является, таким образом, спектром Фурье от произведения функции когерентности светового поля за экраном на апертурную функцию. Если эффективная приемная апертура  $R_z$  много больше, чем масштаб  $R_c$ , тогда функция

$$G_S[p(z, \eta), R_z, \eta] = G_S[p(z, \eta), R_z] = \frac{1}{2R_z} \theta\left[1 - \left(\frac{p(z, \eta)}{R_z}\right)^2\right], \quad (16)$$

где  $\theta(x)$  – единичная, ступенчатая функция:  $\theta(x) = 0$  при  $x < 0$ ,  $\theta(x) = 1$  при  $x \geq 0$ .

Достаточным для применимости соотношения (16) условием, как было выяснено с помощью численного

интегрирования с учетом кубического члена разложения функции  $\Psi_0$ , является  $R_z \geq 16l_k$ . При этом отличие расчетной функции от ступенчатой функции (16) не превышает 5%. Из сравнения данного условия с условием (6) видно, что при одних и тех же параметрах регулярных неоднородностей приближение (8) выполняется при значительно меньших значениях апертур усреднения, чем приближение (16).

Вне окрестности особых точек радиуса  $R_z$  интенсивность на конечной апертуре определяется той же формулой (11), что и средняя по реализациям интенсивность в точке. При этом она не зависит от размера усредняющей апертуры и способа усреднения. Различия в способе усреднения проявляются на распределении интенсивностей в окрестности особых точек.

Найти распределение интенсивности в окрестностях особых точек при известном распределении средней фазы на экране несложно с помощью численного интегрирования выражений (7) и (14).

В качестве примера рассмотрена модель фазового экрана в виде экспоненциального распределения, на который наложено гауссово возмущение. При этом высотное распределение угла рефракции задавалось в виде

$$\gamma(z) = \frac{dS_0}{dz} = \gamma_0 \{ \exp[-(z/H_0)] + 2m \frac{H_0}{H_1} \frac{z}{H_1} \exp[-(z/H_1)^2] \}. \quad (17)$$

Параметры модели (17) выбирались такими, чтобы смоделировать прохождение света в атмосфере через область тропопазузы. Они полагались равными:  $\gamma_0 = 0,008$  рад,  $H_0 = 7$  км,  $H_1 = 1$  км,  $m = 0,1$ . Особыми точками в плоскости наблюдения являются  $z_1 = -23,482$  км и  $z_2 = -8,646$  км. Расстояние  $L$  до плоскости наблюдения задавалось равным 2000 км. Координаты стационарных точек на экране для этой модели:  $\eta(z_1) = -0,62$  км и  $\eta(z_2) = -0,63$  км. Интенсивность волны в точках интервала  $z_1 < z < z_2$  определяется тремя стационарными точками.

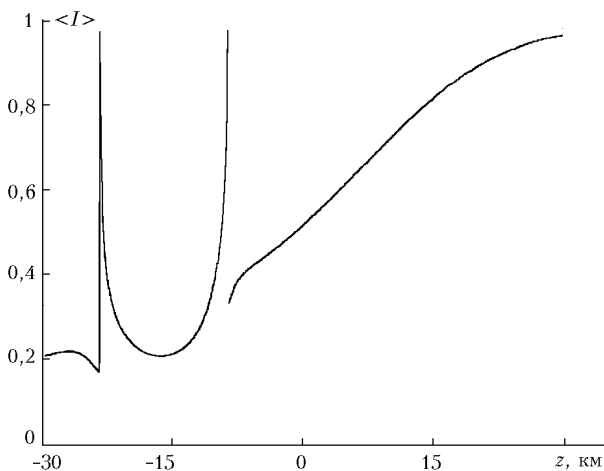


Рис. 1. Средняя интенсивность как функция высоты наблюдения  $z$  для модели (17), рассчитанная по формуле (11)

На рис. 1 приведены распределения средней интенсивности в плоскости наблюдения, рассчитанные по асимптотической формуле (11), на рис. 2 – средние распределения интенсивности в окрестности точки  $z_1$ , рассчитанные по формулам (7), (10) при двух значениях радиуса когерентности  $r_c = 0,05$  м ( $R_c = 4$  м) и  $r_c = 0,005$  м ( $R_c = 40$  м), а также распределения, рассчитанные по формулам (14) и (16) при значениях полуширин апертур  $R_z$ , равных  $R_c$ .

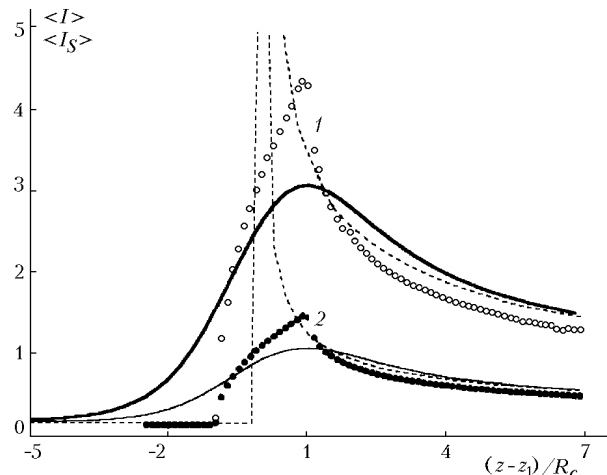


Рис. 2. Средние интенсивности вблизи особой точки  $z_1$ . Штриховые линии – асимптотика (11), сплошные – средние по реализациям при значениях радиуса размытия  $R_c$ , равных 4 м (1) и 40 м (2). Точки – средние по апертурам с полуширинами  $R_z = R_c$

Из рис. 1, 2 видно влияние дифракции на случайных неоднородностях, и усреднение на апертуре приемника приводит к ограничению уровня средней интенсивности в области каустик тем больше, чем больше размеры апертур. Заметно различие средних распределений интенсивности при рассмотренных двух способах усреднения.

### О некорректности задачи восстановления средней фазы на экране по распределению средней интенсивности света

В однолучевом случае уравнение (12), связывающее распределение средней интенсивности и регулярное распределение производной угла рефракции, имеет однозначное решение:

$$L\gamma(\eta) = z(\eta) - \eta, \quad \eta(z) = z_0 + \int_{z_0}^z \langle I(z) \rangle dz, \quad (18)$$

где  $z_0$  – начальная высота, достаточно большая, такая, что на ней рефракция незначительна.

Если в формировании распределения интенсивности участвует несколько лучей, то задача восстановления распределения угла рефракции или его производной, по данным измерений среднего распределения интенсивности, некорректна. По распределению средней интенсивности нельзя определить даже

число регулярных лучей, участвующих в ее формировании.

Можно предположить, что некоторую информацию о регулярном распределении фазы на экране можно получить, если восстановление проводить по «однолучевой» формуле (18). На рис. 3 показан пример восстановления величины  $\gamma(\eta)$  по этой формуле по среднему распределению, представленному на рис. 1.

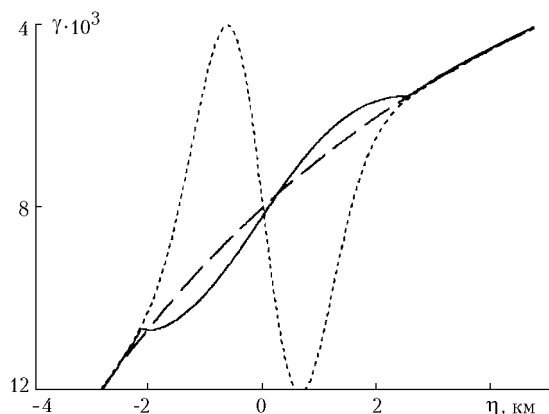


Рис. 3

Сплошной линией изображено восстановленное распределение, пунктиром – исходное распределение  $L\gamma(\eta)$ , штриховой линией – невозмущенное экспоненциальное распределение.

Из сравнения кривых нельзя увидеть какого-либо соответствия между заданным и восстановленным распределениями в области многолучевости. Даже качественное поведение кривых различно. Например, знак вариаций восстановленного распределения относительно невозмущенного (экспоненциального) противоположен знаку заданных вариаций. Амплитуда вариаций восстановленного угла рефракции в данном примере в десятки раз меньше истинной. Таким образом, предположение о возможности восстановления усредненных характеристик возмущения по «однолучевой» формуле оказывается несостоятельным. При усреднении теряется интерференционная структура, в которой, в основном, содержится информация о многолучевости.

### Выводы

Получены уравнения связи между распределением средней интенсивности света в плоскости наблюдения на апертуре конечных размеров и распределением регулярного угла рефракции на фазовом экране

в области регулярной многолучевости. Они соответствуют описанию распространения волны в приближении уравнения переноса излучения и применимы при условии, что размеры эффективной апертуры усреднения в плоскости наблюдения больше характерных размеров изменения интенсивности вблизи каустик регулярной лучевой картины. Вне окрестностей особых точек средняя интенсивность не зависит от размеров апертуры усреднения. При этом она является суммой интенсивностей света из окрестностей стационарных точек на фазовом экране и рассчитывается по простым асимптотическим формулам. Вблизи особых точек распределение средней интенсивности зависит от способа и величины апертуры усреднения. Показано, что задача восстановления распределения среднего угла рефракции на экране по распределению средней интенсивности, измеренной в области регулярной многолучевости, некорректна.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 01-02-16213 и 01-05-64944).

1. Кандидов В.П. Метод Монте-Карло в нелинейной статистической оптике // Успехи физ. наук. 1996. Т. 166. № 12. С. 1309–1338.
2. Лукин В.П., Фортес Б.В. Адаптивное формирование пучков и изображений в атмосфере. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 214 с.
3. Vorob'ev V.V. Thermal blooming of laser beams in the atmosphere // Progress in Quant. Electronics. 1991. V. 15. N 1/2. P. 1–152.
4. Гурвич А.С., Кан В., Савченко С.А., Пахомов А.И., Боровихин П.А., Волков О.Н., Калери А.Ю., Авдеев С.В., Корзун В.Г., Падалка Г.И., Подвязный Я.П. Исследование турбулентности и внутренних волн в стратосфере по наблюдениям мерцаний звезд из космоса. 1. Наблюдения и дисперсия мерцаний // Изв. РАН. Физ. атмосфер. и океана. 2001. Т. 37. № 4. С. 469–486.
5. Гурвич А.С., Кан В., Савченко С.А., Пахомов А.И., Падалка Г.И. Исследование турбулентности и внутренних волн в стратосфере по наблюдениям мерцаний звезд из космоса. 2. Распределения вероятностей и спектры мерцаний // Изв. РАН. Физ. атмосфер. и океана. 2001. Т. 37. № 4. С. 487–501.
6. Исмаилов А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Ч. 2. М.: Мир, 1981. 318 с.
7. Воробьев В.В. Рассеяние светового пучка в среде с регулярной рефракцией // Изв. вузов. Радиофиз. 1971. Т. 14. № 8. С. 1283–1285.
8. Поляков А.В., Тимофеев Ю.М., Гурвич А.С., Воробьев В.В., Кан В. Влияние мерцаний звезд на погрешности измерений содержания озона в атмосфере // Изв. РАН. Физ. атмосфер. и океана. 2001. Т. 37. № 1. С. 56–66.

#### V.V. Vorob'ev. A method and some results of numerical simulation of intensity fluctuations of a plane light wave behind the phase screen in a multipath region. 1. Mean intensity.

Spatial structure of mean intensity of light behind the phase screen containing one-dimensional regular and two-dimensional random inhomogeneities is studied. The requirements are formulated, at which intensity distributions – mean on an ensemble and mean under an aperture of the receiver coincide, and the requirement, at which for calculation of the mean intensity distribution the radiation transfer equation is usable. The correctness of an inverse problem is considered. It is shown that it is impossible to restore a regular phase distribution on the screen from measurements of mean light intensity in a multi-path propagation area.