«Оптика атмосферы и океана», **14**, № 6–7 (2001)

УДК 535.36

В.В. Абдулкин, Л.Е. Парамонов

Применение ортогональных полиномов для оценки коэффициентов светорассеяния изотропного ансамбля полидисперсных сфероидальных частиц

Красноярский государственный технический университет

Поступила в редакцию 19.03.2001 г.

Ортогональные полиномы используются для малопараметрической оценки коэффициентов (сечений) ослабления, рассеяния и поглощения изотропного ансамбля полидисперсных сферических и сфероидальных частиц. Оценка основана на эквивалентности (отношение эквивалентности задается равенством моментов распределения) исследуемого ансамбля и дискретного ансамбля сферических частиц.

Построены квадратурные формулы типа Гаусса, точные до $(2n-1)$ момента включительно, обсуждается их физическая интерпретация. Оценивается погрешность квадратурных формул, результаты сравниваются с расчетами точной теории для полидисперсных сфероидальных частиц.

Введение

Построение математических моделей основано на математическом понятии отношение эквивалентности, или «равенства» [1]. Параметры математических моделей совпадают с некоторыми основными параметрами реального объекта. Отношение равенства параметров модели определяет отношение эквивалентности и «разбивает» все математические объекты на непересекающиеся классы эквивалентности. В пределах одного класса объекты, с точки зрения модели, неразличимы, и любой представитель характеризует класс в целом и в дальнейшем может быть выбран наиболее простым.

В настоящей статье, которая является логическим продолжением и обобщением [2], построение малопараметрических моделей для оценки коэффициентов (сечений) светорассеяния изотропного ансамбля сфероидальных частиц основано на использовании ортогональных полиномов [3].

1. Полидисперсные сферические частицы

Рассмотрим элементарный рассеивающий объем, содержащий полидисперсные сферические частицы, с известной функцией плотности распределения по размерам $\rho(r)$. Коэффициенты ослабления, рассеяния и поглощения имеют вид

$$\langle C(m_r, \lambda)\rangle = \int_{r_1}^{r_2} C(m_r, \lambda, r)\, \rho(r)\, dr, \qquad (1)$$

где $[r_1, r_2]$ – интервал изменения размерных параметров; λ – длина волны падающего излучения; m_r – относительный показатель преломления. В дальнейшем показатель преломления и длину волны полагаем неизменными и опускаем.

Интеграл (1) оценивается с помощью квадратурных формул типа Гаусса [3], где весовой функцией является функция плотности распределения $\rho(r)$. Квадратурными формулами типа Гаусса называют формулы вида

$$\int_a^b f(x)\, \rho(x)\, dx \simeq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i), \qquad (2)$$

где весовые коэффициенты λ_i и узлы x_i $(i = 1, 2,\ldots,n)$ подбираются таким образом, чтобы формула (2) была точной для произвольного полинома степени $(2n-1)$ включительно.

Узлы x_i $(i = 1, 2,\ldots,n)$ являются корнями полинома $p_n(x)$ из системы ортогональных полиномов на интервале (a, b) весом $\rho(x)$. Используя свойства ортогональных полиномов, получим явное выражение [3]:

$$p_n(x) = A_n \begin{bmatrix} C_0 & C_1 \ldots & C_n \\ C_1 & C_2 \ldots & C_{n+1} \\ . & . \quad . & . \\ C_{n-1} & C_n \ldots & C_{2n-1} \\ 1 & x \ \ldots & x^n \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

где A_n – нормировочная константа;

$$C_k = \int_a^b x^k\, \rho(x)\, dx.$$

Коэффициенты λ_i $(i = 1, 2,\ldots,n)$ находятся с использованием формулы Дарбу–Кристоффеля [3] или при известных x_i $(i = 1, 2,\ldots,n)$ как решение системы линейных уравнений при условии, что формула (2) точна для произвольного набора из n линейно независимых полиномов степени $(2n-1)$ включительно.

Оценка интеграла (1) с использованием квадратурной формулы Гаусса (2) имеет следующую физическую интерпретацию: ансамблю полидисперсных сферических частиц ставится в соответствие дискретный ансамбль сферических частиц, спектр размеров которого совпадает с узловыми точками квадратурной формулы, весовые множители рассматриваются как коэффициенты концентрации и при этом дискретный ансамбль сферических частиц имеет равные с исходным ансамблем моменты распределения до $(2n - 1)$ включительно. Таким образом, эти ансамбли частиц принадлежат одному классу эквивалентности, где отношение эквивалентности задается равенством моментов распределения.

2. Полидисперсные хаотически ориентированные сфероидальные частицы

Оценка коэффициентов светорассеяния хаотически ориентированных монодисперсных сфероидальных частиц основана на оптической эквивалентности (в приближении Рэлея–Ганса–Дебая) полидисперсным сферическим частицам с соответствующей весовой функцией $\rho(a, b, r)$ [2] и, таким образом, сводится к аналогичной задаче для полидисперсных сферических частиц. В случае полидисперсных хаотически ориентированных сфероидов с функцией плотности распределения по размерам $f(a, b)$ весовая функция совместного распределения a, b, r имеет вид свертки [4]:

$$\rho_0(a, b, r) = f(a, b) * \rho(a, b, r). \quad (4)$$

Здесь a, b – размер полуосей сфероида. Весовая функция эквивалентного ансамбля полидисперсных сферических частиц $\rho(r)$ находится в результате интегрирования (4) по области изменения a и b.

3. Результаты расчетов

Алгоритм малопараметрической оценки коэффициентов ослабления, рассеяния и поглощения полидисперсных хаотически ориентированных сфероидальных частиц включает в себя:

1) определение моментов распределения C_k для весовой функции $\rho(r)$ эквивалентного полидисперсного ансамбля сферических частиц;

2) нахождение корней $(x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n)$ полинома $p_n(x)$ (3) и весовых множителей λ_i, $i = 1,2,\ldots,n$;

3) расчет коэффициентов светорассеяния дискретного ансамбля сферических частиц по формуле (2).

В таблице приведены результаты расчетов (с точностью до множителя k^{-2}, k – волновое число) коэффициентов ослабления, рассеяния и поглощения полидисперсных хаотически ориентированных сжатых сфероидов с функцией плотности распределения

$$f(a, b) = f(\varepsilon b, b) = \frac{2b_{\min}^2\, b_{\max}^2}{\varepsilon(b_{\max} - b_{\min})^2\, (b_{\max} + b_{\min})}\, b^{-3},$$
$$b_{\min} \le b \le b_{\max} \quad (5)$$

(ε – параметр формы, равный отношению большей полуоси к меньшей) и относительными показателями преломления m_r, соответствующими биологической, терригенной составляющим океанской взвеси, аэрозолям минерального происхождения, в видимой области спектра. Были использованы: строгая теория – метод Т-матриц [5] и предложенная малопараметрическая оценка. Во всех рассмотренных случаях ε = 3.

Используемый метод	C_{ext}	C_{scat}	C_{abs}
	$m_r = 1{,}05 + i0{,}0001$, $kb_{\min} = 1$, $kb_{\max} = 10$		
Т-матриц	23,83	23,68	0,149
$n = 3$	23,72	23,56	0,148
$n = 4$	23,65	23,51	0,148
	$m_r = 1{,}15$, $kb_{\min} = 1$, $kb_{\max} = 10$		
Т-матриц	110,3	110,3	0
$n = 3$	102,3	102,3	0
$n = 4$	111,0	111,0	0
	$m_r = 1{,}5 + i0{,}0001$, $kb_{\min} = 0{,}1$, $kb_{\max} = 5$		
Т-матриц	1,662	1,661	0,00134
$n = 3$	1,367	1,366	0,00143
$n = 4$	1,545	1,544	0,00142
$n = 5$	1,737	1,736	0,00131
$n = 7$	1,667	1,666	0,00128

Заключение

Построенные малопараметрические модели оптимальны для оценки коэффициентов светорассеяния полидисперсных сферических частиц по числу узлов квадратурной формулы, которая имеет и наглядную физическую интерпретацию. Изотропный ансамбль сфероидальных частиц и построенный эквивалентный дискретный ансамбль сферических частиц имеют одинаковые средние объем и площадь геометрического сечения.

1. *Ван дер Варден Б.* Современная алгебра. Ч. 1. М.: Гостехиздат, 1947.
2. *Парамонов Л.Е.* Малопараметрические модели оценки сечений ослабления, рассеяния и поглощения атмосферных аэрозолей // Оптика атмосф. и океана. 1994. Т. 7. № 8. С. 1139–1148.
3. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984. 344 с.
4. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.
5. *Waterman P.C.* Symmetry, unitarity and geometry in electromagnetic scattering // Phys. Rev. D. 1971. V. 3. N 4. P. 825–839.

V.V. Abdulkin, L.E. Paramonov. **Application of orthogonal polynomials to estimation of light scattering coefficients of polydisperse randomly oriented spheroidal particles.**

Orthogonal polynomials are used for small-parameter estimation of extinction, scattering and absorption coefficients of polydispersions of spherical and randomly oriented spheroidal particles. The estimation is based on equivalence (relation of equivalence is set by equality of the moments of distribution) of polydispersions of randomly oriented spheroidal particles and discrete ensemble of spherical particles.

Quadrature formulae of Gauss type, exact up to $(2n - 1)$ moment inclusive are constructed and their physical interpretation is discussed. The error quadrature formulae is estimated, the results are compared with numerical results of exact theory for polydispersions of randomly oriented spheroidal particles.