«Оптика атмосферы и океана», **13,** № 6–7 (2000)

УДК 551.576.11.001.572

В.М. Мальбахов

Теоретическое изучение механизма образования когерентных структур в распределении примеси в нижней тропосфере в конвективных условиях

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск

Поступила в редакцию 9.02.2000 г.

Предложена гидродинамико-статистическая модель, качественно объясняющая наличие квазиупорядоченных структур в распределении примеси в атмосферном конвективном пограничном слое.

Введение

Данные измерений показывают, что в летнее время над засушливыми территориями взвешенные в воздухе мелкие пылевые частицы примеси, поля температуры и скорости иногда образуют квазиупорядоченные когерентные конвективные структуры с периодом от одного до нескольких километров [1]. Настоящая работа посвящена теоретическому объяснению этого феномена. В ней исследуется взаимодействие нескольких содержащих примесь конвективных ячеек, для чего используются упрощенные уравнения Буссинеска, дополненные уравнением для пассивной примеси. Показано, что при взаимодействии ячейки могут сливаться и разрушаться. Этот результат позволяет выдвинуть гипотезу относительно путей формирования статистической структуры ансамбля конвективных ячеек и получить относительно простые соотношения для их спектров [2]. При упрощающих предположениях показано, что параметрический учет суммарного влияния мелких конвективных ячеек при моделировании ансамбля конвективных ячеек следующего иерархического уровня сводится к добавлению постоянного множителя при коэффициентах молекулярной и турбулентной вязкости, теплопроводности и диффузии. Таким образом, в предполагаемой теории максимальные пространственно-временные масштабы имеют конвективные ячейки с высотой H_k, совпадающей с толщиной конвективного слоя, а поля концентрации примеси имеют горизонтальный масштаб, примерно в 6 раз больше H_k, что при $H_k = 1$ км совпадает с измерениями [1].

Упрощенная гидродинамическая модель

Вводим следующие упрощающие предположения.

1. Конвективные ячейки возникают под влиянием расположенных друг над другом осесимметричных импульсов тепла.

2. Учитываются лишь взаимодействия ячеек, расположенных вдоль действия вектора сил плавучести (т.е. лежащих на одной вертикали). Первые два предположения позволяют считать процесс осесимметрическим.

3. Считается, что вертикальные размеры ячеек больше их горизонтальных размеров потому, что на распространение конвективных возмущений по вертикали действуют вязкость и сила Архимеда. Это предположение позволяет упростить уравнения Буссинеска за счет теории вертикального пограничного слоя [2].

4. Температура и плотность жидкости связаны следующим линейным законом: $\rho = \rho_0(1 - k\theta)$, где θ – отклонение температуры от ее значения $\Theta = \Theta_0 - \alpha z$ в невозмущенной жидкости ($\alpha = \text{const}$); ρ и ρ_0 – плотность и ее среднее значение в невозмущенной жидкости; $k = \text{const}$ – коэффициент линейного расширения жидкости или газа.

5. Конвективный слой стратифицирован неустойчиво: $\alpha > 0$.

6. Фоновая концентрация примеси S убывает с высотой по линейному закону $S = S_0 - \beta z$ при $z \le S_0/\beta$, $S = 0$ при $z \ge S_0/\beta$.

7. Коэффициенты вязкости ν, теплопроводности и диффузии примеси постоянны и равны друг другу.

Уравнения Буссинеска, дополненные уравнением для s (где s – отклонение концентрации примеси от ее фонового значения S), с учетом указанных упрощений примут следующий вид [2]:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial z} = \lambda\theta + \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\frac{\partial w}{\partial r} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u\frac{\partial \theta}{\partial r} + w\frac{\partial \theta}{\partial z} = \alpha w + \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\frac{\partial \theta}{\partial r} + \nu\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u\frac{\partial s}{\partial r} + w\frac{\partial s}{\partial z} = \beta w + \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\frac{\partial s}{\partial r} + \nu\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial ur}{\partial r} + \frac{\partial wr}{\partial z} = 0, \tag{4}$$

где t – время; r, z – цилиндрические радиальная и вертикальная координаты (ось z направлена вверх); u, w – радиальная и вертикальная составляющие скорости; $\lambda = kg$; g – ускорение силы тяжести.

В качестве начальных условий для (1)–(5) зададим несколько вытянутых по вертикали осесимметричных импульсов тепла:

при $t = 0$

$$\theta = \frac{4\nu^2}{\lambda r_0^2} R_0 f_0(z); \quad s = 0; \quad w = 0, \tag{5}$$

где $R_0 = \exp[-r^2/(2r_0^2)]$; $f_0(z)$ отлична от нуля на нескольких несоприкасающихся отрезках.

Двумерная задача Коши (1) – (5) сводится к одномерной [2]:

$$w = 4\nu^2\alpha\varphi Rf; \; u = \frac{4\nu^2\varphi(R-1)}{r}\frac{\partial f}{\partial z}; \; \theta = \frac{\psi w}{\lambda\varphi}; \; s = \frac{\beta w}{n}; \tag{6}$$

$$\varphi = \frac{\mathrm{sh}(nt)}{n}; \; \psi = \mathrm{ch}(nt); \; a = \frac{1}{2\nu t + r_0^2}; \; R = \exp(-ar^2); \tag{7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + 4\nu^2\alpha\varphi f\frac{\partial f}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}; \quad \text{при } t = 0 \quad f = f_0(z); \tag{8}$$

$$2\pi\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty vrdrdz = Q; \; \int_{-\infty}^\infty fdz = Q_e; \; Q_e = \frac{\lambda q_e}{8\pi c_p\rho\nu^2}, \tag{9}$$

$Q = Q_e\,\psi$ – плавучесть ячейки (величина, пропорциональная количеству тепла, содержащегося в ячейке); $n = \sqrt{\alpha\lambda}$.

Получим критерий неустойчивости ячеек по отношению к воздействию на них возмущениями конечной амплитуды. Для этих целей разобьем t на достаточно мелкие дискретные интервалы: $t = i \times \Delta t$, $i = 0,1,...,n$, в каждом из которых коэффициент $b = 2\nu a\varphi$ перед нелинейным слагаемым в (8) можно считать величиной постоянной: $b = 2\nu a\varphi = b_i = \mathrm{const}$ при $\Delta t_i \le t \le \Delta t(i+1)$. В начальный момент $t = 0$ подействуем на неустойчивую атмосферу тепловым импульсом и будем считать, что к моменту $t = t_i = \Delta t_i$ сформировался достаточно мощный термик с плавучестью Q. Дополнительно к этому в момент $t = t_i$ осуществим очень слабое воздействие на атмосферу с $Q_2 = \varepsilon \ll 1$. В этом случае при $\Delta t_i \le t \le \Delta t(i+1)$ вместо (8) имеем ïðè $t = t_i, f = f_1(z) + f_2(z)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + 2\nu b_i f\frac{\partial f}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \tag{10}$$

где f_1 – решение (10) при $t = t_i$; f_2 – слабое воздействие в момент $t = t_i$.

Пользуясь тем обстоятельством, что при $\Delta t_i < t < \Delta t(i+1)$ (10) является уравнением Бюржерса, вместо (10) будем решать следующую задачу:

$$f = \frac{\exp Q(F_1 + \varepsilon F_2)}{b_i\left[1 + \exp Q\left(\int_z^\infty (F_1 + \varepsilon F_2)\,dz\right)\right]}, \tag{11}$$

где F_1, F_2 удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\int_{-\infty}^\infty F_1dz = \int_{-\infty}^\infty F_2dz = 1, \; \frac{\partial F}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \; F = F_1 + F_2.$$

В (11) знаменатель обращается в нуль и решение теряет смысл при

$$\varepsilon = -(\exp(Q_1) + \int_z^\infty F_1dz)/\int_z^\infty F_2dz. \tag{12}$$

Таким образом, значения ε зависят от t, z, но поскольку флуктуации в поле температуры могут появиться в любой момент времени и в любой точке конвективного слоя, то следует взять минимальное по модулю значение ε из (12). Это значение соответствует минимальной по мощности тепловой флуктуации, разрушающей термик; достигается оно при $\int_{-\infty}^\infty F_1dz = 0$ и $\int_{-\infty}^\infty F_2dz = 1$. Подставляя эти значения в (12), окончательно имеем

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{кр}} = -\exp(-Q_1). \tag{13}$$

Более слабые флуктуации термика не разрушают. Точно такое соотношение для ε в решении для двух одновременных точечных тепловых импульсов, заданных для $\alpha = 0$, $r_0 = 0$ при $t = 0$, дано в [2]. Отметим, что полученные решения не описывают сам процесс разрушения ячейки (так как решение в этом случае отсутствует). Однако численное решение аналогичной задачи, осуществленное при тех же условиях, но по уравнениям Буссинеска без упрощений теории вертикального пограничного слоя, показало, что разрушению ячейки в более полной модели соответствует процесс типа «опрокидывания волны», инициируемый столкновением подымающейся и опускающейся ячеек, сопровождаемый вовлечением окружающего воздуха внутрь ячейки и приводящий к быстрой ее диссипации. В развитой здесь упрощенной теории подобная диссипация считается мгновенной и именуется разрушением ячейки.

Сравнение теории с расчетами, проведенными по модели без упрощений вертикального пограничного слоя, показало, что жизненный цикл каждой ячейки состоит из двух стадий – ламинарной (для микромасштабных пульсаций) или квазиламинарной (для термиков и конвектиных облаков) и турбулентной. На первой стадии происходит спонтанный рост ячейки, а на второй – ее мгновенное разрушение в упрощенной модели и постепенная диссипация в более полной модели. Вторая стадия с разной вероятностью может наступить в любой момент. Это обусловлено неустойчивостью конвективных ячеек и, в конечном счете, определяет вероятностные свойства предложенной упрощенной модели.

Статистическая модель ансамбля конвективных ячеек

Следуя (13) (подробнее см. [2]), будем считать, что для плотности вероятности распределения ячеек $P(Q)$ выполняется следующее соотношение:

$$P(Q) = \exp(Q_n - Q), \; \int_{Q_n}^{Q} P(x)dx = 1. \tag{14}$$

Однако (14) непригодно для проверки. Попытаемся выразить Q через параметры, поддающиеся приближенным оценкам на основе данных измерений. Для этих целей воспользуемся полученным в [2] решением задачи (8) без вертикальной вязкости при $t \gg 1/n$:

при $0 \le z \le h$

$$w = nzR,\ \theta = \alpha zR,\ s = \beta zR; \tag{15}$$

при $z < 0$ и $z > h = 2(Q\nu/n)^{1/2}$

$$w = 0,\ \theta = 0,\ s = 0. \tag{16}$$

Нетрудно видеть, что

$$w_m = 2(Q\nu n)^{1/2};\ \theta_m = 2\alpha(Q\nu/n)^{1/2};$$

$$s_m = 2s_0(Q\nu/n)^{1/2}; \tag{17}$$

$$H = w_m\theta_m = 4\nu\alpha Q;\ E = w_m w_m = 4\nu nQ;$$

$$M = w_m s_m = 4\nu\beta Q; \tag{18}$$

$$Q^2 = \alpha\lambda h^4/(16\nu^2) = gk\Delta\Theta h^3/(16\nu^2) = Ra_q/16, \tag{19}$$

где w_m, v_m, s_m равны w, v, s при $z = h$ и $r = 0$; $\Delta\Theta = \Theta_{z=h} - \Theta_{z=0} = \alpha h$; Ra_q – число Рэлея для ячейки с плавучестью Q.

Таким образом, получена простая связь Q с h, w_m, v_m, H, которая позволяет получить следующие соотношения для плотностей распределений конвективных ячеек:

$$P(Y_i)dY_i = 2(Y_i - X_i)\exp\{-[(Y_i - X_i)^2/D_i]^2\}/D_i^2\, dY_i,$$

$$P(H)dH = \exp[-(H - H_m)/H_0]/H_0 dH,$$

$$P(E)dE = \exp[-(E - E_m)/E_0]/E_0 dE,$$

$$P(M)dM = \exp[-(M - M_m)/M_0]/M_0 dM,$$

где $i = 1, 2, 3, 4$; $Y_1 = h$, $Y_2 = w_m$, $Y_3 = \theta_m$; $Y_4 = s_m$; D_i – дисперсии Y_i: $D_1 = h_0 = 2(\nu/n)^{1/2}$, $D_2 = w_0 = 2(\nu n)^{1/2}$, $D_3 = \theta_0 = 2\alpha h_0$; $D_4 = s_0 = 2\beta h_0$; $X_1 = h_n = Q_n^{1/2}h_0$, $X_2 = w_n = Q_n^{1/2}w_0$, $X_3 = \theta_n = Q_n^{1/2}\theta_0$; $X_4 = = s_n = Q_n^{1/2}s_0$; $H_0 = 4\nu\alpha$, $H_n = Q_nH_0$; $E_0 = 4\nu(\alpha\lambda)^{1/2}$, $E_n = Q_nE_0$; $M_0 = 4\nu\beta$, $M_n = Q_nS_0$.

Выполняя процедуру нахождения среднего по ансамблю

$$\overline{x} = \int_{X_i}^{\infty} Y_i P(Y_i)dY_i,\quad \overline{F}_j = \int_{F_n}^{\infty} F_j P(F_j)dF_j,\ \ j = 1, 2, 3, \tag{20}$$

имеем $\overline{f}_j = h_{0i}(Q_n^{1/2} + \pi^{1/2}/2)$, $\overline{F}_j = F_{0j}(Q_n + 1)$, где $f_1 = \overline{h}$, $f_2 = \overline{w}_m$, $f_3 = \overline{\theta}_m$, $f_4 = \overline{s}_m$, $f_{01} = \overline{h}_0$, $f_{02} = \overline{w}_0$, $f_{03} = \overline{q}_0$, $f_{04} = \overline{s}_0$; $F_1 = \overline{H}$, $F_2 = \overline{E}$, $F_3 = \overline{M}$, $F_{01} = \overline{H}_0$, $F_{02} = \overline{E}_0$, $F_{03} = \overline{M}_0$.

Отсюда видно, что Q_m может быть определено через средние величины и их дисперсии:

$$Q_m + 1 = \overline{F}_j/F_{0j};\ Q_m + \pi^{1/2}/2 = (Y_i/D_i)^2. \tag{21}$$

Очевидно, что $\overline{F}_j$ пропорциональны конвективным потокам тепла и импульса через верхнюю границу конвективной ячейки в окружающую атмосферу. Принимая какую-либо гипотезу относительно горизонтального распределения ячеек и производя осреднение по горизонтали, имеем

$$\hat{\overline{H}} = c\alpha(Q_m + 1),\ \hat{\overline{E}} = cn(Q_m + 1),\ \hat{\overline{M}} = c\beta(Q_m + 1), \tag{22}$$

где $c = 4\nu C$, C – обратно пропорционально среднему расстоянию между ячейками. При горизонтальном расстоянии между ячейками $l = 2\pi h\ C \approx 0{,}7$.

В случае, если конвективное возмущение возникает не в покоящейся атмосфере, а внутри более крупной конвективной ячейки, то тогда вместо $\alpha = d\Theta/dz$ следует брать $\alpha_2 = d\Theta_2/dz$, где Θ_2 – температура внутри этой более крупной ячейки. (Будем нижним индексом 2 обозначать распределения для конвективного ансамбля второго иерархического уровня).

Будем теперь изучать поведение нескольких расположенных друг над другом взаимодействующих ячеек второго иерархического уровня. Потоки тепла и импульса за счет микромасштабной конвекции в этом ансамбле параметризуем следующим образом:

$$\hat{\overline{H}} = c_1\partial\Theta_2/\partial z;\ \hat{\overline{E}} = c_1\partial w_2/\partial z;\ \hat{\overline{M}} = c_1\partial s_2/\partial z; \tag{23}$$

$$\hat{\overline{vu}} = c_1\partial\Theta_2/\partial x;\ \hat{\overline{wu}} = c_1\partial w_2/\partial x;\ \hat{\overline{su}} = c_1\partial s_2/\partial x, \tag{24}$$

где $c_1 = 4C\nu(Q_m + 1)$.

Соотношения (23) получены без привлечения дополнительных гипотез. Поскольку данная модель не учитывает бокового взаимодействия ячеек, то с ее помощью вычислить верные значения горизонтальных потоков тепла и момента затруднительно. Вследствие этого уравнения (24) приняты нами в качестве гипотезы, дополняющей принятые нами при постановке задачи и при построении статистической модели. Вид (24) аналогичен (23). В этом случае для ансамбля расположенных друг над другом взаимодействующих ячеек второго иерархического уровня следует брать уравнения, аналогичные уравнениям (1)–(4), в которых u, w, θ, s, ν, α заменены на u_2, w_2, θ_2, s_2, $\nu_2 = 4C\nu(Q_m + 1) + \nu$, α_2, где α_2 задает температурную стратификацию с учетом осредненного влияния конвекции первого иерархического уровня. Соотношения вида (23), (24) и вытекающие из них выводы справедливы для всех иерархических уровней. Таким образом,

$$\frac{\overline{h}_{i+1}}{\overline{h}_i} = LN_i^{-1/4};\quad \frac{\overline{w}_{i+1}}{\overline{w}_i} = LN_i^{1/4};\quad \frac{\overline{u}_{i+1}}{\overline{u}_i} = L;\quad \frac{\overline{\theta}_{i+1}}{\overline{\theta}_i} = LN_i^{3/4}, \tag{25}$$

где $N_i = \alpha_{i+1}/\alpha_i$; $L = 2[C(Q_m + 1)]^{1/2}$.

Переходим теперь к определению Q_m. К сожалению, в атмосфере конвективная турбулентность первого иерархического уровня не отличима от турбулентности динамической, поэтому обратимся к данным эксперимента [3], где изучалась конвекция в воде, находящейся в широкой кастрюле, подогреваемой снизу нагретой до 100 °С водой. Нагрев осуществлялся таким образом, что количество тепла, поступающего снизу, равнялось его оттоку через верх и боковые стенки, когда влияние дна и стенок на конвекцию было минимальным, средняя скорость очень мелких, взвешенных в воде частиц примеси равнялась 1,8 см · с$^{-1}$, а дисперсия составляла 20% от этой скорости. Полагая $D_2/\overline{w} = 0{,}2$ и подставляя это значение в (21), имеем $Q_m \approx 25$. Полагая $\nu = 10^{-2}$ см^2 · с$^{-1}$, $\alpha = 1$ °С · с$^{-1}$, $\lambda = gk = 3$ см · с$^{-1}$ (°С)$^{-1}$, имеем $\overline{w} \approx (2Q_m\nu)^{1/2}(\alpha\lambda)^{1/4} \approx 1{,}8$ см · с$^{-1}$, что совпадает с измерениями [3]. И наконец, полагая, что высота ячеек последнего иерархического уровня совпадает с толщиной конвективного слоя H_k, имеем $l = 2\pi H_k$ 6 км при $H_k = 1$ км, что подтверждается измерениями [1]. Нетрудно также показать, что среднее время существования ячейки увеличивается с увеличением иерархического уровня конвективного ансамбля.

Заключение

Результаты теории показывают, что конвективный ансамбль состоит из ячеек, размеры которых существенно различны. Линейные размеры конвективных ячеек первого иерархического уровня согласно (21) составляют примерно 10 см. Они образуют ячейки второго иерархического уровня, линейные размеры которых согласно (25) приблизительно на порядок больше. Это правило оказывается справедливым и для ячеек следующих иерархических уровней.

Согласно теории, а также данным наблюдений развитие атмосферной конвекции идет таким образом. Вначале над нагреваемой Солнцем подстилающей поверхностью образуется конвективный ансамбль, состоящий из сантиметровых и дециметровых ячеек. (Этот ансамбль часто виден как марево над пашней или асфальтом). По мере нагрева нижнего слоя постепенно появляются ячейки следующих иерархических уровней. Результаты измерений, приведенные в [1], показали, что в конвективных условиях поля субмикронных частиц аэрозоля над полупустынными районами в какой-то мере повторяют структуру ансамбля наиболее крупных и упорядоченных конвективных ячеек, что подтверждает эта модель.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-05-64678.

1. *Горчаков Г.И. и др.* // Оптика атмосферы и океана. 1998. Т. 11. № 10. С. 1118–1124.
2. *Malbackov V.M.* // J. Fluid Mech. 1998. V. 365. P. 1–24.
3. *Голицын Г.С.* Исследование конвекции с геофизическими приложениями и аналогиями Л.: Гидрометеоиздат, 1980. 55 с.

V.M. Malbakhov. **A theoretical study of mechanism of formation of coherent structures at substance in lower troposphere under convective conditions.**

A hydrodynamical-statistical model providing a qualitative explanation of quasi-ordered structures presence in the distribution of a substance in the atmospheric boundary layer is proposed.