

А.И. Бородулин, Б.М. Десятков, Н.А. Лаптева

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЯДОВ ВЕКТОРА СКОРОСТИ ВЕТРА И КОНЦЕНТРАЦИИ АЭРОЗОЛЬНЫХ ПРИМЕСЕЙ С ЗАДАНЫМИ ЗАКОНАМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И КОРРЕЛЯЦИОННЫМИ СВЯЗЯМИ, ТИПИЧНЫМИ ДЛЯ РЕАЛЬНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЫ

Разработаны процедуры получения рядов мгновенных значений компонент скорости ветра и значений концентрации аэрозольных примесей с заданными законами распределения и корреляционными связями, типичными для реальной турбулентной атмосферы. Под корреляционными связями подразумеваются связи, устанавливаемые тензором вязких напряжений Рейнольдса и турбулентными потоками примеси.

Решение ряда задач физики атмосферы и экологических задач подразумевает вычисление усредненных по статистическому ансамблю функций, зависящих от мгновенных значений компонент вектора скорости ветра и концентрации аэрозольных примесей. Например, такая необходимость возникает при оценке эффективности аспирации аэрозольных частиц в пробоотборные устройства в турбулентной среде. Один из возможных способов решения таких задач подразумевает численное моделирование рядов мгновенных значений компонент скорости ветра и значений концентрации аэрозолей с последующим усреднением этих функций по полученному статистическому ансамблю.

Целью данной работы является разработка процедуры получения рядов мгновенных значений компонент скорости ветра и значений концентрации аэрозольных примесей с заданными законами распределения и корреляционными связями, типичными для реальной турбулентной атмосферы.

Представим мгновенные значения компонент скорости ветра и концентрации аэрозолей в виде суммы средних и пульсаций [1]

$$U_i = \bar{U}_i + \hat{U}_i; \quad C = \bar{C} + \hat{C}; \quad (i = x, y, z), \quad (1)$$

где U_i – i -я компонента мгновенного значения скорости ветра; \bar{U}_i – математическое ожидание данной величины (черта сверху далее будет обозначать усреднение по статистическому ансамблю); \hat{U}_i – пульсация; аналогичные обозначения приняты и для концентрации C .

Известно, что функция распределения величины \hat{U}_i может быть с хорошей степенью точности представлена нормальным распределением (см., например, [2]):

$$F_i(\hat{U}_i) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\hat{U}_i}{2^{1/2} \sigma_i} \right) \right], \quad (2)$$

где F_i – функция распределения пульсаций i -й компоненты скорости ветра; erf – обозначение интеграла вероятности [3]; σ_i – стандартное отклонение пульсации i -й компоненты скорости ветра. Согласно [4] функция распределения мгновенного значения концентрации имеет следующий вид:

$$F_c(C) = 1 + \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{C - \bar{C}}{v} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{C + \bar{C}}{v} \right) \right], \quad (3)$$

где F_c – функция распределения мгновенного значения концентрации; \bar{C} – математическое ожидание концентрации примеси; v – второй параметр функции распределения.

Закон распределения (3) получен в наших предыдущих работах и подтвержден экспериментально на основании ряда лабораторных и независимых натуральных экспериментов [4].

Далее, не нарушая общности последующих рассуждений, рассмотрим приземный слой атмосферы. Расположим среднее значение вектора скорости ветра вдоль оси x , ось y будет перпендикулярна ей в горизонтальной плоскости, а ось z направим вертикально вверх. Будем также предполагать горизонтальную однородность и стационарность решаемой задачи, что ниже позволит использовать теорию подобия приземного слоя атмосферы [1].

Вследствие вышесказанного будем иметь

$$U_x = \bar{U}_x + \hat{U}_x; U_y = \hat{U}_y; U_z = \hat{U}_z. \quad (4)$$

Корреляционные связи между пульсациями компонент скорости ветра устанавливает тензор вязких напряжений Рейнольдса $\tau_{ij} = \overline{\hat{U}_i \cdot \hat{U}_j}$ [1]. В идеальном приземном слое атмосферы он имеет вид

$$\tau_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_x^2 & 0 & -U_*^2 \\ 0 & \sigma_y^2 & 0 \\ -U_*^2 & 0 & \sigma_z^2 \end{vmatrix}, \quad (5)$$

где σ_x^2 , σ_y^2 , σ_z^2 – дисперсии пульсаций x , y и z компонент скорости ветра соответственно; U_* – скорость трения [1].

Корреляции между пульсациями концентрации аэрозолей и пульсациями компонент скорости ветра определяются турбулентными потоками примеси ϕ_i [1]:

$$\phi_x = \overline{\hat{U}_x \cdot \hat{C}}; \quad \phi_y = \overline{\hat{U}_y \cdot \hat{C}}; \quad \phi_z = \overline{\hat{U}_z \cdot \hat{C}}. \quad (6)$$

Моделирование независимых друг от друга рядов мгновенных значений \hat{U}_i и \hat{C} можно провести с использованием последовательностей случайных чисел r_i и r , равномерно распределенных в интервале от нуля до единицы. Для этого необходимо и достаточно по значениям r_i и r найти решения уравнений (2) и (3) [5]

$$F_i(\hat{U}_i) = r_i; \quad F_c(C) = r. \quad (7)$$

Теперь рассмотрим процедуру получения случайных последовательностей \hat{U}_i и C , удовлетворяющих соотношениям (5) и (6).

Введем нормально распределенные ряды случайных чисел α_m и β_n , обладающие следующими свойствами:

$$\overline{\alpha_m} = \overline{\beta_n} = 0; \quad \overline{\alpha_m \alpha_n} = \delta_{mn}; \quad (8)$$

$$\overline{\beta_m \beta_n} = \delta_{mn}; \quad \overline{\alpha_m \beta_n} = 0; \quad (m, n = 1, 2, 3),$$

где δ_{mn} – символ Кронекера [3]. Моделирование пульсаций компонент скорости ветра будем производить по следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \hat{U}_x &= \alpha_1 a_1 + \beta_1 b_1, \\ \hat{U}_y &= \alpha_2 a_2 + \beta_2 b_2, \\ \hat{U}_z &= \alpha_3 a_3 + \beta_3 b_3 + \beta_1 b_4, \end{aligned} \quad (9)$$

где $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4$ – константы, подлежащие определению. Заданные таким образом пульсации компонент скорости ветра распределены по нормальному закону [6] и имеют нулевые математические ожидания.

Для получения мгновенных значений концентрации с законом распределения (2) в (9) были специально введены члены с коэффициентами a_m . Введем случайную величину $\alpha_0 = 3^{-1/3} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$. Она будет распределена нормально с нулевым средним и единичной дисперсией. В соответствии с (7) α_0 связана с равномерно распределенным на отрезке (0,1) случайным числом r_0 , которое мы будем использовать для выработки с привлечением (3) мгновенных значений пульсации концентрации.

Неизвестные пока семь коэффициентов в (9) найдем из системы уравнений, следующей из (5) и (6):

$$\sigma_x^2 = a_1^2 + b_1^2; \sigma_y^2 = a_2^2 + b_2^2; \sigma_z^2 = a_3^2 + b_3^2 + b_4^2; -U_*^2 = b_1 b_4;$$

$$\varphi_x = (\overline{\alpha_1 \hat{C}}) a_1; \varphi_y = (\overline{\alpha_2 \hat{C}}) a_2; \varphi_z = (\overline{\alpha_3 \hat{C}}) a_3. \quad (10)$$

Решения приведенных выше уравнений выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} a_1 &= \varphi_x (\overline{\alpha_1 \hat{C}})^{-1}, \quad a_2 = \varphi_y (\overline{\alpha_2 \hat{C}})^{-1}, \quad a_3 = \varphi_z (\overline{\alpha_3 \hat{C}})^{-1}; \\ b_1 &= (\sigma_x^2 - a_1^2)^{1/2}, \quad b_2 = (\sigma_y^2 - a_2^2)^{1/2}, \\ b_4 &= -U_*^2 b_1^{-1}, \quad b_3 = (\sigma_z^2 - a_3^2 - b_4^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (11) следуют ограничения на коэффициенты a_1, a_2, a_3 :

$$|a_1| < \sigma_x [1 - U_*^4 / (\sigma_x^2 \sigma_z^2)]^{1/2}, \quad |a_2| < \sigma_y, \quad (12)$$

$$|a_3| < \sigma_z \{1 - U_*^4 / [\sigma_x^2 \sigma_z^2 (1 - a_1^2 \sigma_x^{-2})]\}^{1/2}.$$

В силу статистической независимости случайных чисел α_m и заданного выше способа генерации пульсаций концентрации имеют место соотношения

$$(\overline{\alpha_1 \hat{C}}) = (\overline{\alpha_2 \hat{C}}) = (\overline{\alpha_3 \hat{C}}) = a_0.$$

Обсудим процедуру получения рядов пульсаций мгновенных значений компонент скорости ветра и концентрации аэрозольных примесей. На первом этапе следует с помощью достаточно длинных последовательностей чисел α_m получить согласно (7) неизвестное пока значение a_0 . Затем убедиться в том, что ограничения (12) выполняются. И, наконец, найдя по (11) коэффициенты $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4$, приступить к моделированию рядов пульсаций компонент скорости ветра и концентрации.

Т а б л и ц а 1

Исходные и смоделированные компоненты тензора напряжений, m^2/c^2

Компоненты	σ_x^2	σ_y^2	σ_z^2	$-U_*^2$
Исходные	0,9200	0,8400	0,8400	0,530
Смоделированные	0,8945	0,8422	0,8398	0,498

Т а б л и ц а 2

Исходные и смоделированные компоненты вектора турбулентного потока аэрозолей и стандартного отклонения их концентрации, усл.ед.

Компоненты	φ_x	φ_y	φ_z	σ_c
Исходные	0,060	0	-0,032	0,684
Смоделированные	0,073	0,041	-0,060	0,679

В качестве практического примера рассмотрим процесс распространения аэрозольных частиц от линейного стационарного источника, расположенного на высоте $z_0 = 60$ м и перпендикулярного осям x, z . Расчеты проводились по методу [7] и соответствовали реальным усло-

виям распространения аэрозольных примесей при неустойчивой стратификации атмосферы. Для точки с координатой $z = 20$ м на удалении $x = 100$ м от вертикальной плоскости, в которой расположен источник, получены значения компонент тензора напряжений, приведенные в табл. 1 (графа «Исходные»). Параметры функции распределения концентрации следующие: $\bar{C} = 0,85$ усл. ед., $v = 1,02$ усл. ед. Найденные согласно [7] компоненты вектора турбулентного потока аэрозолей и стандартного отклонения их концентрации приведены в табл. 2 в графе «Исходные». Для данного примера точки при $z = 20$ м и $x < 100$ м рассматривать нельзя из-за наличия ограничений (12). Удаление же точки наблюдения от источника постепенно приводит практически к полной потере статистических связей между полями пульсаций скорости ветра и концентрации.

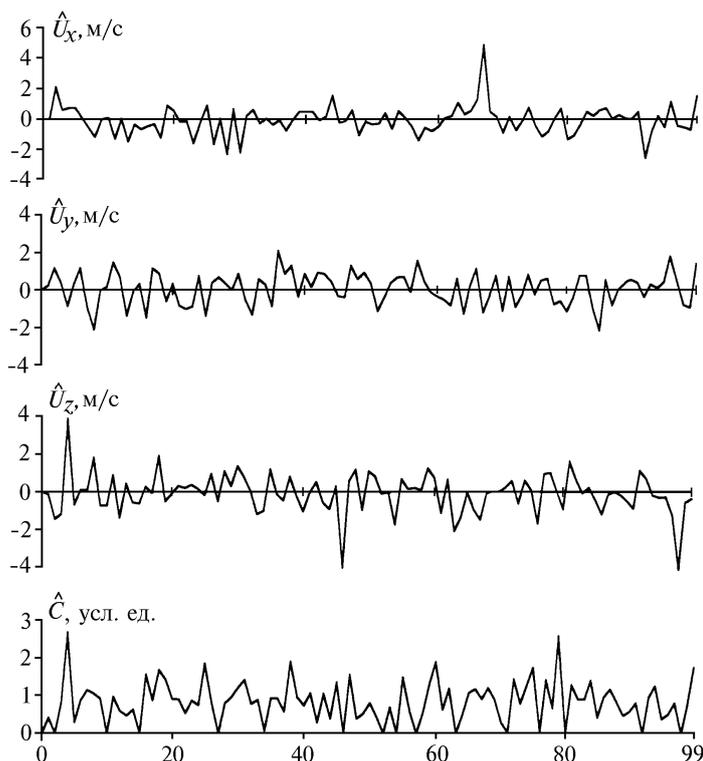


Рис. 1. Пример фрагментов полученных рядов пульсаций компонент скорости ветра и концентрации примеси

На рисунке приведен пример фрагментов полученных рядов пульсаций, а таблицы содержат в графах «Смоделированные» вычисленные по найденным рядам характеристики. Каждый ряд пульсаций содержал тысячу отсчетов. Очевидно, величина погрешностей кроме объема выборки в основном связана с методом получения равномерно распределенных случайных чисел и точностью решения трансцендентных уравнений (7). Оценка абсолютных значений погрешностей, возникавших при моделировании тензора напряжений и компонент вектора турбулентного потока примеси, составляет порядка $0,03 \text{ м}^2/\text{с}^2$ и $0,04$ усл. ед. Таким образом, мы убеждаемся в удовлетворительном согласии полученных результатов с исходными данными.

1. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 640 с.
2. Henneuth В. // Boundary Layer Meteorology. 1978. V. 8. N 4. P. 489–506.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1977. 832 с.
4. Бородулин А. И., Майстренко Г. М., Чалдин Б. М. // Статистическое описание распространения аэрозолей в атмосфере. Метод и приложения. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1992. 124 с.
5. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М.: Советское радио, 1971. 328 с.
6. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982. 624 с.
7. Десятков Б. М., Сарманаев С. Р., Бородулин А. И. Численно-аналитическая модель переноса аэрозолей в термически стратифицированном пограничном слое атмосферы // Оптика атмосферы и океана. 1996. Т. 9. N 6. С. 815–820.

A. I. Borodulin, B. M. Desyatkov, N. A. Lapteva. Modelling of Series of Wind Velocity Vector and Aerosol Pollutant Concentration with Given Distribution Laws and Correlations Typical for the Actual Turbulent Atmosphere.

Solution of some problems in meteorological physics and ecology means a calculation of functions averaged over a statistic ensemble and depending on instantaneous values of wind velocity vector components and aerosol pollutant concentration. The aim of this work is to develop a procedure for the derivation of a series of instantaneous values of wind velocity vector components and values of the aerosol pollutant concentration with given distribution law and correlations typical for the actual turbulent atmosphere. In this work, the correlations are presented by the Reynolds viscous stress tensor and turbulent flows of pollutants.