«Оптика атмосферы», **4**, № 6 (1991)

АТМОСФЕРНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

УДК 621.373.826 : 551.510.5

В.М. Булдаков

ПРИМЕНЕНИЕ КОНТИНУАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Предлагается переход от интегрирования по траекториям к обыкновенному интегрированию по амплитудам гармоник. В результате получено выражение для поля, позволяющее исследовать широкий класс задач как в линейных, так и в нелинейных случайно-неоднородных средах. На основе предлагаемого выражения для поля получено общее выражение для пространственно-временной корреляционной функции произвольных флуктуаций интенсивности в турбулентной атмосфере.

В линейной случайной среде с крупномасштабными неоднородностями диэлектрической проницаемости (по сравнению с длиной волны) распространение оптической волны описывается линейным стохастическим параболическим дифференциальным уравнением. Известно, что решение линейного параболического уравнения может быть представлено в виде континуального интеграла [1–4], возможность использования которого показана в [5–9] на примере расчета характеристик излучения в области сильных и слабых флуктуаций интенсивности в турбулентной атмосфере.

Для описания нелинейного взаимодействия лазерного излучения со случайной средой можно также воспользоваться континуальным интегралом, основываясь на понятии T-отображения [10]. T-отображение предполагает учет эффекта запаздывания (или релаксации) в величинах, зависящих от неизвестной функции. Для интерпретации T-отображения можно использовать нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее процесс распространения оптической волны

$$2ik\frac{\delta u(x\,\boldsymbol{p},\,t)}{\delta x}+\Delta_{\perp}u(x,\,\boldsymbol{p},\,t)+k^{2}\left\{\varepsilon_{Д}(x,\,\boldsymbol{p},\,t)\left[1-\frac{T_{сл}(x,\,\boldsymbol{p},\,t)+T_{нл}(x,\,\boldsymbol{p},\,t)}{T(x,\,\boldsymbol{p},\,t)}\right]+i\varepsilon_{0}(x,\,\boldsymbol{p},\,t)\right\}u(x,\,\boldsymbol{p},\,t)=0\,, \tag{1}$$

где $\kappa = 2\pi/\lambda$ — волновое число; λ — длина волны лазерного излучения; x, y, z — декартовые координаты; лазерное излучение распространяется вдоль координаты x; $\boldsymbol{p} = \mathbf{i}y + \mathbf{j}z$ — вектор в поперечной к направлению распространения плоскости; t — время; $u(x, y, z, t) = e^{-i\kappa x}E_{\kappa}(x, y, z, t)$, $E_{\kappa}(x, y, z, t)$ — медленно меняющаяся комплексная амплитуда поля волны; $\Delta_{\perp} = \frac{\delta^2}{\delta y^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2}$ — поперечный Лапласиан; $\varepsilon_д(x, y, z, t)$ — отклонение диэлектрической проницаемости среды от ее среднего значения; $\varepsilon_0(x, y, z, t)$ — мнимая часть диэлектрической проницаемости среды, описывающая поглощение лазерного излучения; $T(x, y, z, t)$ — средняя температура среды до ее нагрева лазерным излучением; $T_{сл}(x, y, z, t)$ — отклонение температуры от $T(x, y, z, t)$ вследствие случайно-неоднородного характера среды; $T_{нл}(x, y, z, t)$ — отклонение температуры от $T(x, y, z, t)$ вследствие нагрева среды лазерным излучением. $T_{нл}(x, y, z, t)$ является функционалом от интересующей нас функции $u(x, y, z, t)$: $T_{нл}(x, y, z, t) = F[u(x, y, z, t)]$.

Функционал F описывает нелинейное взаимодействие лазерного излучения со средой.

Из физических соображений ясно, что изменение температуры среды $T_{нл}(x, y, z, t)$ происходит за некоторый промежуток времени T. Поэтому можно считать, что $T_{нл}(x, y, z, t)$ зависит от значений неизвестной функции до некоторого предшествующего момента времени $t-T$. В связи с малой величиной T такой зависимостью обычно пренебрегают. Однако при составлении разностной схемы решения подобных уравнений [11] факт запаздывания, по существу, учитывается, поскольку для вычисления $T_{нл}(x, y, z, t_2)$ в момент времени t_2 используются значения $u(x, y, z, t_1)$ в предыдущий момент времени t_1. В этом смысле введенное В.П. Масловым [10] понятие T-отображения стоит ближе к реальным физическим процессам, чем уравнение (1). В [10] показано, что метод T-отображений тесно связан с понятием нелинейного континуального интеграла, который может быть интерпретирован как метод построения решения шагами по t. Используя введенное Масловым В.П. понятие T-отображения, нелинейное дифференциальное уравнение (1) можно представить в виде континуального интеграла

$$u(x, \boldsymbol{p}, t) = \int\limits_{p(0)=p_0}^{p(x)=p} D\boldsymbol{p}(\xi) u_0(\boldsymbol{p}_0, t) \exp\left\{ \frac{ik}{2}\int\limits_0^x d\xi \left[\left(\frac{d\boldsymbol{p}(\xi)}{d\xi}\right)^2 + \varepsilon_Д(\xi, \boldsymbol{p}(\xi), t)\left[1 - \frac{T_{сл}(\xi, \boldsymbol{p}(\xi), t) + T_{нл}(\xi, \boldsymbol{p}(\xi), t)}{T(\xi, \boldsymbol{p}(\xi), t)}\right] + \right.\right.$$

$$\left.\left. + i\varepsilon_0(\xi, \boldsymbol{p}(\xi), t) \right\} , \qquad (2)$$

где

$$D\boldsymbol{p}(\xi) = \prod_{\zeta=0}^{x} \frac{d\boldsymbol{p}(\xi)}{d\xi} \frac{k}{2\pi i} , \quad T_{нл}(\xi, \boldsymbol{p}(\xi), t) = F_{нл}[u(\xi, \boldsymbol{p}(\xi), t - T)] .$$

К настоящему времени методов вычисления континуальных интегралов не существует за исключением случая, когда интеграл действия (в (2)—это интеграл в экспоненте) имеет квадратичный вид. Но при описании как линейных, так и нелинейных эффектов интеграл действия такого вида, как правило, не имеет. В связи с этим возникает необходимость использовать приближенные методы для расчетов. В частности, возможны приближения, связанные с учетом лишь одной траектории, дающей основной вклад в континуальный интеграл. В [12] в качестве такой траектории предлагается выбирать прямые линии, соединяющие две концевые точки. Для определения основной траектории можно использовать уравнение Эйлера, имеющее решение при существенных приближениях и ограничениях [13].

В настоящей статье предлагается учитывать любые траектории с помощью их представления в виде суперпозиции произвольно направленной прямой липни и набора различных гармоник. При этом производится переход от интегрирования но траекториям к обыкновенному интегрированию по амплитудам гармоник.

Известно [2, 10], что интегрирование по траекториям в (2) аналогично представлению в виде предела

$$u(x, \boldsymbol{p}, t) = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{k}{2\pi i\Delta x}\right)^N \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int d^2\rho_0\, d^2\rho_1 \dots d^2\rho_{N-1}\, u_0(\boldsymbol{p}_0, t) \exp\left\{\frac{ik}{2} \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{(\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p}_{j-1})^2}{(\Delta x)^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \varepsilon_Д(j\Delta x, \boldsymbol{p}_j, t)\left[1 - \frac{T_{сл}(j\Delta x, \boldsymbol{p}_j, t) + T_{h}(j\Delta x, \boldsymbol{p}_j, t)}{T(j\Delta x, \boldsymbol{p}_j, t)}\right] + i\varepsilon_0(j\Delta x, \boldsymbol{p}_j, t)\right]\Delta x \right\} , \qquad (3)$$

где $\boldsymbol{p}_N = \boldsymbol{p}$, $\Delta x = x/N$.

Записи выражений (2) и (3) означают, что $u(x, \boldsymbol{p}, t)$ находится как сумма (интеграл) по траекториям, произвольно соединяющим все точки источника с точкой $\boldsymbol{p}$ на конце трассы. Вклад в сумму по различным траекториям может быть произвольным, в том числе и противоположным друг другу. Для удобного анализа вклада в сумму по различным видам траекторий представим их следующим образом:

$$\boldsymbol{p}(\xi) = \boldsymbol{p}_S(\xi) + \boldsymbol{p}_Д(\xi) , \qquad (4)$$

где $\boldsymbol{p}_п(\xi) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\boldsymbol{p}_0 + \frac{\xi}{x}\boldsymbol{p}$ — прямая линия, соединяющая концевые точки $\boldsymbol{p}_0$ и $\boldsymbol{p}$; $\boldsymbol{p}_д(\xi)$ — некоторая траектория, обладающая свойствами $\boldsymbol{p}_д(0) = \boldsymbol{p}_д(x) = 0$. Согласно теореме В.А. Стеклова [14] траекторию $\boldsymbol{p}_д(\xi)$ можно разложить в виде

$$\boldsymbol{p}_Д(\xi) = \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{a}_l\, \varphi_l(\xi) , \qquad (5)$$

где в качестве ортонормированной системы функций используются функции $\varphi_l(\xi) = \sqrt{2/x}\,\sin(\pi\xi/x)$. Значения $\mathbf{a}_l = \int\limits_0^x d\xi \boldsymbol{p}_д(\xi)\varphi_l(\xi)$ неизвестны из-за произвольного вида траектории $\boldsymbol{p}_д(\xi)$. Если представить выражение (5) в виде

$$\boldsymbol{p}_{\text{Д}}(\xi) = \sum_{l=1}^{N\text{-}1} \mathbf{a}_l\, \varphi_l(\xi) + \sum_{l=N}^{\infty} \mathbf{a}_l\, \varphi_l(\xi) \tag{5′}$$

и пренебречь последней суммой, роль которой уменьшается с ростом N, то можно осуществить переход от переменных интегрирования $\boldsymbol{p}_j$ в (3) к новым переменным интегрирования $\mathbf{a}_l$:

$$\boldsymbol{p}_j = \left(1 - \frac{j}{N}\right)\boldsymbol{p}_0 + \frac{j}{N}\,\boldsymbol{p} + \sum_{l=1}^{N\text{-}1} \mathbf{a}_l\, \varphi_l\!\left(\frac{j}{N}\,x\right).$$

Кроме того, для удобной записи выражения (3) осуществляется следующая замена:

$$\mathbf{a}_l = \frac{\sqrt{x}}{2N\,\sin(e\pi/2N)}\,\mathbf{b}_l\,.$$

В этом случае якобиан перехода от переменных интегрирования $\boldsymbol{p}_j$ к $\mathbf{b}_l$ есть N^{-N}, а суммирование по j можно заменить интегрированием по трассе. Тогда выражение для поля принимает вид

$$u(x,\boldsymbol{p},t) = \int_{\infty}^{-\infty} d^2\rho_0\, u_0(\boldsymbol{p}_0,t)\,\frac{k}{2\pi i x}\lim_{N\to\infty}\left(\frac{k}{2\pi i x}\right)^{N-l}\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdots\!\int d^2b_1\ldots d^2b_{N-1}\exp\left\{\frac{ik}{2x}\left[(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0)^2 + \sum_{l=1}^{N-1} b_l^2\right] +\right.$$

$$+\frac{ik}{2}\int_0^x dx'\left[\varepsilon_{\text{Д}}\left(x',\left(1-\frac{x'}{x}\right)\boldsymbol{p}_0 + \frac{x'}{x}\,\boldsymbol{p} + \sum_{l=1}^{N-1}\nu_l(x')\mathbf{b}_l,\,t\right)\right]\left[1 - \frac{T_{\text{сл}}\left(x',\left(1-\frac{x'}{x}\right)\boldsymbol{p}_0 + \frac{x'}{x}\,\boldsymbol{p} + \sum_{l=1}^{N\text{-}1}\nu_l(x')\mathbf{b}_l,\,t\right)}{T\left(x',\left(1-\frac{x'}{x}\right)\boldsymbol{p}_0 + \frac{x'}{x}\,\boldsymbol{p} + \sum_{l=1}^{N\text{-}1}\nu_l(x')\mathbf{b}_l,\,t\right)} -\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{T_{\text{нл}}\left(x',\left(1-\frac{x'}{x}\right)\boldsymbol{p}_0 + \frac{x'}{x}\,\boldsymbol{p} + \sum_{l=1}^{N\text{-}1}\nu_l(x')\mathbf{b}_l,\,t\right)}{T\left(x',\left(1-\frac{x'}{x}\right)\boldsymbol{p}_0 + \frac{x'}{x}\,\boldsymbol{p} + \sum_{l=1}^{N\text{-}1}n_l(x')\mathbf{b}_l,\,t\right)}\right] + i\varepsilon_0\left(x',\left(1-\frac{x'}{x}\right)\boldsymbol{p}_0 + \frac{x'}{x}\,\boldsymbol{p} + \sum_{l=1}^{N\text{-}1}\nu_l(x')\mathbf{b}_l,\,t\right)\right]\right\}, \tag{6}$$

где $\nu_l(x') = \sin(l\pi x'/x)/\sqrt{2}N\sin(l\pi/2N))$.

В связи с тем, что масштабы изменения $\varepsilon_{\text{д}}$, T и ε_0, как правило, превышают размеры лазерных пучков и $\varepsilon_{\text{д}}$, T, ε_0 — стационарны за время излучения, можно пренебречь зависимостью этих величин от поперечных координат и времени. Тогда

$$u(x,\boldsymbol{p},t) = \frac{k}{2\pi i x}\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x dx'\alpha(x') + \frac{ik}{2}\int_0^x dx'\varepsilon_{\text{Д}}(x')\right\}\int_{-\infty}^{\infty} d^2\boldsymbol{p}_0 u_0(\boldsymbol{p}_0,t)\exp\left\{\frac{ik}{2x}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0)^2\right\}\lim_{N\to\infty}\left(\frac{k}{2\pi i x}\right)^{N-1}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdots\!\int d^2b_1\ldots d^2b_{N\text{-}1}\exp\left\{\frac{ik}{2x}\sum_{l=1}^{N\text{-}1} b_l^2 + \frac{ik}{2}\int_0^x dx'\varepsilon_2(x')\left[T_{\text{сл}}\left(x',\left(1-\frac{x'}{x}\right)\boldsymbol{p}_0 + \frac{x'}{x}\,\boldsymbol{p} + \sum_{l=1}^{N-1}\nu_l(x')\mathbf{b}_l,\,t\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,T_{\text{нл}}\left(x',\left(1-\frac{x'}{x}\right)\boldsymbol{p}_0 + \frac{x'}{x}\,\boldsymbol{p} + \sum_{l=1}^{N-1}\nu_l(x')\mathbf{b}_l,\,t\right)\right]\right\}, \tag{7}$$

где $\alpha(x') = \kappa\varepsilon_0(x')$ — коэффициент молекулярного поглощения, $\varepsilon_2(x') = -\varepsilon_{\text{д}}(x')/T(x')$. Для диапазона длин волн $\lambda = 0{,}2\div20$ мкм можно воспользоваться следующей приближенной формулой [15]: $\varepsilon_{\text{д}}(x') = 2\cdot10^{-6}\dfrac{P(x')}{T(x')}(77{,}6 + 0{,}584\lambda^{-2})$. Для стандартных условий $P(x') = 1013{,}25$ мб, $T(x') = 288$°К

$$\varepsilon_2 = \begin{cases} -2.25 \cdot 10^{-6}\,\dfrac{1}{\text{K}} \text{ для } \lambda = 0.2 \text{ мкм} \\ -1.89 \cdot 10^{-6}\,\dfrac{1}{\text{K}} \text{ для } \lambda = 20 \text{ мкм} \end{cases}.$$

Обычно ε_2 принимается равной $-\ 2 \cdot 10^{-6}\,\dfrac{1}{K}$. Величина

$$\varepsilon_2(x')T_{\text{сл}}\left(x',\ \left(1 - \frac{x'}{x}\right)\boldsymbol{\rho}_0 + \frac{x'}{x}\,\boldsymbol{\rho} + \sum_{l=1}^{N-1} \nu_l(x')\mathbf{b}_l,\ t\right) = \varepsilon_1 T_{\text{сл}}\left(x',\ \left(1 - \frac{x'}{x}\right)\boldsymbol{\rho}_0 + \frac{x'}{x}\,\boldsymbol{\rho} + \sum_{l=1}^{N-1} \nu_l(x')\mathbf{b}_l,\ t\right)$$

описывает флуктуации диэлектрической проницаемости среды из-за ее случайной неоднородности. Если в (7) пренебречь интегрированием по амплитудам гармоник $\mathbf{b}_l$, то получается выражение

$$u(x,\ \boldsymbol{\rho},\ t) = \frac{k}{2\pi i x}\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x dx'\alpha(x') + \frac{ik}{2}\int_0^x \mathrm{d}x'\varepsilon_{\text{Д}}(x')\right\}\int_{-\infty}^{\infty} d^2\boldsymbol{\rho}_0\ u_0(\boldsymbol{\rho}_0,\ t)\exp\left\{\frac{ik}{2x}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0)^2 + \frac{ik}{2}\int_0^x dx'\ \times\right.$$

$$\left.\times\left[\varepsilon_1\left(x',\ \left(1 - \frac{x'}{x}\right)\boldsymbol{\rho}_0 + \frac{x'}{x}\,\boldsymbol{\rho}\ ,t\right) + \varepsilon_2(x')\ T_{\text{нл}}\left(x',\ \left(1 - \frac{x'}{x}\right)\boldsymbol{\rho}_0 + \frac{x'}{x}\,\boldsymbol{\rho},\ t\right)\right]\right\}, \tag{8}$$

совпадающее с ранее известным выражением для поля в фазовом приближении метода Гюйгенса-Кирхгофа [16], Из физических соображений понятно, что основной вклад в интеграл (7) дают первые низкочастотные гармоники. Поэтому, с одной стороны, для расчетов можно использовать небольшое число гармоник, а с другой — определять точность принятых ограничений.

Записанное выражение (7) для поля лазерного излучения в случае линейного ($T_{\text{нл}} = 0$) и нелинейного взаимодействия как с неподвижной, так и с движущейся случайно-неоднородной средой позволяет исследовать широкий класс задач на прямых и локационных трассах.

Возможность использования (7) можно продемонстрировать на примере получения выражений для пространственно-временной корреляционной функции флуктуаций интенсивности B_I в турбулентной атмосфере при $T_{\text{нл}} = 0$

$$B_I(x,\ \boldsymbol{\rho}_1,\ \boldsymbol{\rho}_2,\ \tau) = \langle I(x,\ \boldsymbol{\rho}_1,\ t)\rangle - \langle I(x,\ \boldsymbol{\rho}_2,\ t + \tau)\rangle - \langle I(x,\ \boldsymbol{\rho}_1,\ t)\rangle\,\langle I(x,\ \boldsymbol{\rho}_2,\ t + \tau)\rangle\ , \tag{9}$$

где $I(x,\ \boldsymbol{\rho},\ t) = u(x,\ p,\ t)u^*(x,\ p,\ t)$ — интенсивность лазерного излучения; скобки $\langle\ldots\rangle$ означают статистическое среднее по ансамблю реализаций диэлектрической проницаемости среды ε_1. В дальнейшем предполагается использовать Гауссов закон распределения и δ-коррелированность флуктуаций ε_1 и применять гипотезу о «замороженности» турбулентности [17]. В этом случае с учетом (7) можно записать следующие общие выражения:

$$\langle I(x,\ \boldsymbol{\rho},\ t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d^4\rho_0 R \left\langle u_0\left(\mathbf{R} + \frac{\boldsymbol{\rho}_0}{2}\ ,\ t\right)\ u_0^*\left(\mathbf{R} - \frac{\boldsymbol{\rho}_0}{2}\ ,\ t\right)\right\rangle_S \left\langle G\left(0,\ \mathbf{R} + \frac{\boldsymbol{\rho}_0}{2}\ ;\ x,\ \boldsymbol{\rho},\ t\right)\ G^*\left(0,\ \mathbf{R} - \frac{\boldsymbol{\rho}_0}{2}\ ;\ x,\ \boldsymbol{\rho},\ t\right)\right\rangle\ ; \tag{10}$$

$$\langle I(x,\ \boldsymbol{\rho}_1,\ t)\ I(x,\ \boldsymbol{\rho}_2,\ t + \tau)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d^8 R_1,\ R_2,\ R_3,\ R_4 \left\langle u_0\left(\frac{1}{2}(R_1 + R_2 + R_3 + R_4),\ t\right)\right. \times$$

$$\times\ u_0^*\left(\frac{1}{2}(R_1 + R_2 - R_3 - R_4),\ t\right)\ u_0\left(\frac{1}{2}(R_1 - R_2 - R_3 + R_4),\ t\right)\ u_0^*\left(\frac{1}{2}(R_1 - R_2 + R_3 - R_4),\ t\right)\Big\rangle_S\ \times$$

$$\times \left\langle G\left(0,\ \frac{1}{2}(R_1 + R_2 + R_3 + R_4);\ x,\ \boldsymbol{\rho}_1,\ t\right)\ G^*\left(0,\ \frac{1}{2}(R_1 + R_2 - R_3 - R_4);\ x,\ \boldsymbol{\rho}_1,\ t\right)\right. \times$$

$$\left.\times\ G\left(0,\ \frac{1}{2}(R_1 - R_2 - R_3 + R_4);\ x,\ \boldsymbol{\rho}_2,\ t + \tau\right)\ G^*\left(0,\ \frac{1}{2}(R_1 - R_2 + R_3 - R_4);\ x,\ \boldsymbol{\rho}_2,\ t + \tau\right)\right\rangle\ . \tag{11}$$

Скобки $\langle\ldots\rangle$ означают усреднение по флуктуациям источника; $G(0,\ \mathbf{R};\ x,\ \boldsymbol{\rho},\ t)$ — функция Грина;

$$<G\left(0,\ \mathbf{R}+\frac{\boldsymbol{p}_0}{2};\ x,\ \boldsymbol{p},\ t\right) G^*\left(0,\ \mathbf{R}-\frac{\boldsymbol{p}_0}{2};\ x,\ \boldsymbol{p},\ t\right)>=\left(\frac{k}{2\pi x}\right)^2 \exp\left\{\frac{ik}{x}\boldsymbol{p}_0(\mathbf{R}-\boldsymbol{p})-\frac{\pi k^2}{4}\int\limits_0^x \mathrm{d}x'\ H\left(\left(1-\frac{x'}{x}\right)\boldsymbol{p}_0\right)\right\} \quad (12)$$

$$<G\left(0,\ \frac{1}{2}(R_1+R_2+R_3+R_4);\ x,\ \boldsymbol{p}_1,\ t\right)G^*\left(0,\ \frac{1}{2}(R_1+R_2-R_3-R_4);\ x,\ \boldsymbol{p}_1,\ t\right)\times$$

$$\times G\left(0,\ \frac{1}{2}(R_1-R_2-R_3+R_4);\ x,\ \boldsymbol{p}_2,\ t+\tau\right) G^*\left(0,\ \frac{1}{2}(R_1-R_2+R_3-R_4);\ x, \boldsymbol{p}_2,\ t+\tau\right)> =$$

$$=\left(\frac{k}{2\pi x}\right)^4 \exp\left\{\frac{ik}{x}[\mathbf{R}_1\mathbf{R}_4+\mathbf{R}_2\mathbf{R}_3-\boldsymbol{p}_1(\mathbf{R}_3+\mathbf{R}_4)+\boldsymbol{p}_2(\mathbf{R}_3-\mathbf{R}_4)]\right\} f(\mathbf{R}_2,\ \mathbf{R}_3,\ \mathbf{R}_4,\ x,\ \boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \tau); \quad (13)$$

$$H(\boldsymbol{p}) = 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2\varkappa\ \ \Phi_\varepsilon(\varkappa)\,[1-\mathrm{e}^{\pm i\varkappa \boldsymbol{p}}]; \quad (14)$$

$\Phi_\varepsilon(\varkappa)$ — трехмерный пространственный спектр флуктуаций диэлектрической проницаемости;

$$f(\mathbf{R}_2,\ \mathbf{R}_3,\ \mathbf{R}_4,\ x,\ \boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \tau)=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{k}{2\pi ix}\right)^{2(N-1)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^{2(N-1)}b_1,\ \ldots,\ b_{N-1},\ B_1,\ \ldots,\ B_{N-1}\exp\left\{\frac{ik}{x}\sum_{l=1}^{N-1} b_l\mathbf{B}_l\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\pi k^2}{4}\int\limits_0^x dx'\left[H\left(\left(1-\frac{x'}{x}\right)(\mathbf{R}_3+\mathbf{R}_4)+\sum_{l=1}^{N-1}\nu_l(x')\mathbf{B}_l\right)-H\left(\left(1-\frac{x'}{x}\right)(\mathbf{R}_2+\mathbf{R}_3)+\right.\right.\right.$$

$$\left.+\frac{x}{x'}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)+\sum_{l=1}^{N-1}\nu_l(x')(\mathbf{b}_l+\mathbf{B}_l)+\mathbf{v}(x')\,\tau\right)+H\left(\left(1-\frac{x'}{x}\right)(\mathbf{R}_2+\mathbf{R}_4)+\right.$$

$$\left.+\frac{x}{x'}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)+\sum_{l=1}^{N-1}\nu_l(x')\mathbf{b}_l+\mathbf{v}(x')\,\tau\right)+H\left(\left(1-\frac{x'}{x}\right)(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_4)+\frac{x}{x'}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)\sum_{l=1}^{N-1}\nu_l(x')\mathbf{b}_l+\mathbf{v}(x')\,\tau\right)-$$

$$\left.\left.\left.-H\left(\left(1-\frac{x'}{x}\right)(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_3)+\frac{x}{x'}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)+\sum_{l=1}^{N-1}\nu_l(x')(\mathbf{b}_l-\mathbf{B}_l)+\mathbf{v}(x')\tau\right)+H\left(\left(1-\frac{x'}{x}\right)(\mathbf{R}_3-\mathbf{R}_4)+\sum_{l=1}^{N-1}\nu_l(x')\mathbf{B}_l\right)\right]\right\}; \quad (15)$$

$\mathbf{v}(x')$ — вектор скорости ветра. Как правило, исследования флуктуационных характеристик, определяемых с помощью выражения (9) при различных значениях $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, τ, проводится в области слабых ($\beta_0^2<1$) и сильных ($\beta_0^2\gg 1$) (флуктуаций интенсивности. Здесь $\beta_0^2=0{,}31C_\varepsilon^2\kappa^{7/6}x^{11/6}$ — эффективный параметр, определяющий интенсивность турбулентности на трассе. C_ε^2 — структурная характеристика флуктуаций диэлектрической проницаемости. В связи с тем, что функция H пропорциональна параметру β_0^2, вторую экспоненту в (15) при $\beta_0^2<1$ можно представить в виде $e^x\approx 1+x$. В этом случае удается проинтегрировать по переменным $\mathbf{b}_l$, $\mathbf{B}_l$ и определить предел:

$$f(\mathbf{R}_2,\ \mathbf{R}_3,\ \mathbf{R}_4,\ x,\ \boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \tau)\approx 1-\frac{\pi k^2}{2}\int\limits_0^x dx'\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2\varkappa\,\Phi_\varepsilon(\varkappa)$$

$$\left[2-\exp\left\{i\left(1-\frac{x'}{x}\right)\varkappa(\mathbf{R}_3+\mathbf{R}_4)\right\}-\exp\left\{i\left(1-\frac{x'}{x}\right)\varkappa(\mathbf{R}_3-\mathbf{R}_4)\right\}\right]-$$

$$-\exp\left\{i\varkappa\left[\left(1-\frac{x'}{x}\right)(\mathbf{R}_2+\mathbf{R}_4)+\frac{x'}{x}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)+\mathbf{v}(x')\,\tau\right]\right\}-$$

$$-\exp\left\{i\varkappa\left[\left(1-\frac{x'}{x}\right)(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_4)+\frac{x'}{x}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)+\mathbf{v}(x')\,\tau\right]\right\}+$$

$$+\exp\left\{-i\,\frac{x'}{k}\left(1-\frac{x'}{x}\right)\varkappa^2+i\varkappa\left[\left(1-\frac{x'}{x}\right)(\mathbf{R}_2+\mathbf{R}_3)+\frac{x'}{x}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)+\mathbf{v}(x')\,\tau\right]\right\}+\exp\left\{i\,\frac{x'}{k}\left(1-\frac{x'}{x}\right)\varkappa^2+\right.$$

$$\left.+\,i\varkappa\left[\left(1-\frac{x'}{x}\right)(\mathbf{R}_2+\mathbf{R}_3)+\frac{x'}{x}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)+\mathbf{v}(x')\,\tau\right]\right\}. \tag{16}$$

В области сильных флуктуаций интенсивности ($\beta_0^2 \gg 1$) можно воспользоваться асимптотическим разложением, описанным в [5, 6], позволяющим провести интегрирование по $\mathbf{b}_l$, $\mathbf{B}_l$ в выражении (15) и найти предел:

$$f(\mathbf{R}_2,\,\mathbf{R}_3,\,\mathbf{R}_4,\,x,\,\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\tau)\approx\exp\left\{-\frac{\pi k^2}{4}\int_0^x dx'\left[H\left(\left(1-\frac{x'}{x}\right)(\mathbf{R}_2+\mathbf{R}_4)+\frac{x'}{x}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)+\mathbf{v}(x')\,\tau\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,H\left(\left(1-\frac{x'}{x}\right)(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_4)+\frac{x'}{x}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)+\mathbf{v}(x')\,\tau\right)\right]\right\}+\pi k^2\int_0^x dx'\int_{-\infty}^{\infty}d^2\varkappa\,\Phi_\varepsilon(x'',\varkappa)\exp\left\{i\varkappa\left(1-\frac{x''}{x}\right)\mathbf{R}_3\right\}\times$$

$$\times\left[\cos\left(\left(1-\frac{x''}{x}\right)\varkappa\mathbf{R}_4\right)-\cos\left[\varkappa\left[\left(1-\frac{x''}{x}\right)\mathbf{R}_2+\frac{x''}{x}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)-\frac{x''}{k}\left(1-\frac{x''}{x}\right)\varkappa+\mathbf{v}(x'')\,\tau\right]\right]\right]\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\pi k^2}{4}\int_0^x \mathrm{d}x'\left[H\left(\left(1-\frac{x'}{x}\right)(\mathbf{R}_2+\mathbf{R}_4)+\frac{x'}{x}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)-\frac{x'}{k}\left(1-\frac{x''}{x}\right)\varkappa+\mathbf{v}(x')\,\tau\right)+H\left(\left(1-\frac{x'}{x}\right)\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\times(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_4)+\frac{x'}{x}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)-\frac{x'}{k}\left(1-\frac{x''}{x}\right)\varkappa+\mathbf{v}(x')\,\tau\right)\Bigg]+\int_{x''}^x \mathrm{d}x'\left[H\left(\left(1-\frac{x'}{x}\right)(\mathbf{R}_2+\mathbf{R}_4)+\frac{x'}{x}+(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{x''}{k}\left(1-\frac{x'}{x}\right)\varkappa+\mathbf{v}(x')\,\tau\right)+H\left(\left(1-\frac{x'}{x}\right)(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_4)+\frac{x'}{x}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)-\frac{x''}{k}\left(1-\frac{x'}{x}\right)\varkappa+\mathbf{v}(x')\,\tau\right)\right]\Bigg\}+$$

$$+\exp\left\{-\frac{\pi k^2}{4}\int_0^x \mathrm{d}x'\left[H\left(\left(1-\frac{x'}{x}\right)(\mathbf{R}_3+\mathbf{R}_4)\right)+H\left(\left(1-\frac{x'}{x}\right)(\mathbf{R}_3-\mathbf{R}_4)\right)\right]\right\}+\pi k^2\int_0^x dx''\int_{-\infty}^{\infty}d^2\varkappa\,\Phi_\varepsilon(x'',\varkappa)\times$$

$$\times\exp\left\{i\varkappa\left[\left(1-\frac{x''}{x}\right)\mathbf{R}_2+\frac{x''}{x}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)+\mathbf{v}(x'')\,\tau\right]\right\}\left[\cos\left(\left(1-\frac{x''}{x}\right)\varkappa\mathbf{R}_4\right)-\cos\left(\varkappa\left[\left(1-\frac{x''}{x}\right)\mathbf{R}_3-\frac{x''}{k}\left(1-\frac{x''}{k}\right)\varkappa\right]\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\pi k^2}{4}\int_0^x \mathrm{d}x'\left[H\left(\left(1-\frac{x'}{x}\right)(\mathbf{R}_3+\mathbf{R}_4)-\frac{x'}{k}\left(1-\frac{x''}{x}\right)\varkappa\right)+H\left(\left(1-\frac{x'}{x}\right)(\mathbf{R}_3-\mathbf{R}_4)-\frac{x'}{k}\left(1-\frac{x''}{x}\right)\varkappa\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\int_{x''}^x \mathrm{d}x'\left[H\left(\left(1-\frac{x'}{x}\right)(\mathbf{R}_3+\mathbf{R}_4)-\frac{x''}{k}\left(1-\frac{x'}{x}\right)\varkappa\right)+H\left(\left(1-\frac{x'}{x}\right)(\mathbf{R}_3-\mathbf{R}_4)-\frac{x''}{k}\left(1-\frac{x'}{x}\right)\varkappa\right)\right]\right\}. \tag{17}$$

Фазовое приближение метода Гюйгенса—Кирхгофа не описывает флуктуации интенсивности сферической волны и некогерентного источника. Для полученных выше выражений подобные ограничения отсутствуют.

В качестве примера можно получить относительную дисперсию флуктуаций интенсивности сферической волны $\sigma_I^2 = B_I(x,0,0,0)/\langle I(x,0,t)\rangle^2$. Для расчетов воспользуемся колмогоровским спектром флуктуаций диэлектрической проницаемости $\Phi_\varepsilon(\varkappa)=0{,}033C_\varepsilon^2\varkappa^{-11/3}$. Для сферической волны $u_0(\boldsymbol{p},t)=u_0\dfrac{2\pi}{\kappa^2}\delta(\boldsymbol{p})$, $\langle I(x,0,t)\rangle=(u_0/\kappa x)^2$. Используя выражения (9), (11), (13), (16), в области слабых флуктуаций интенсивности ($\beta_0^2 < 1$) имеем

$$\sigma_I^2 = 0.4\beta_0^2 + 0(\beta_0^4) , \tag{18}$$

а в области сильных флуктуаций интенсивности ($\beta_0^2 \gg 1$) (используются формулы (9), (11), (13), (17)) —

$$\sigma_I^2 = 1 + 2.73\beta_0^{-4/5} + 0(\beta_0^{-8/5}) . \tag{19}$$

Полученные выражения (18) и (19) совпадают с известными ранее результатами [17, 6].

1. Гельфанд И.М., Яглом А.М. //Успехи мат. наук. 1956. Т. (II) Вып. 1 (67). С. 77–114.
2. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968.
3. Кляцкин В.И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М.: Наука, 1975. 239 с.
4. Татарский В.И. //Сборник научных трудов. Методы Монте-Карло в вычислительной математике и математической физике. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1976. С. 75–90.
5. Заворотный В.У., Кляцкин В.И., Татарский В.И. //ЖЭТФ. 1977. Т. 73. Вып. 2 (8). С. 481–497.
6. Чарноцкий М.Н. //V Всесоюз. симпозиум по распространению лазерного излучения в атмосфере. (Тезисы докл.). Томск, 1979. Ч. 2. С. 74–78.
7. Tatarskii V.I., Zavorotnyi V.U. //In.: Proceeding of Society of Photo-Instruments Engineers. 1986. V. 642. P. 276–281.
8. Бакут П.А. //X Всесоюз. симпозиум по распространению лазерного излучения в атмосфере. (Тезисы докл.). Томск, 1989. С. 17–20.
9. Алмаев Р.Х., Суворов А.А. //Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 52. Вып. 2. С. 718–722.
10. Маслов В.П. Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана (для нелинейных уравнении). М.: Наука, 1976. 192 с.
11. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 19711 С. 552.
12. Чиркин А.С., Юсубов Ф.М. //Квантовая электроника. 1983. Т. 10. № 9. С. 1833–1842.
13. Чиркин А.С., Юсубов Ф.М. //Вестник московского университета. Сер. 3. Физика. Астрономия. 1985. Т. 26. № 4. С. 57–62.
14. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.
15. Справочник по геофизике. М.: Наука, 1965.
16. Банах В.А., Булдаков В.М., Миронов В.Л. //Квантовая электроника. 1986. Т. 13. № 6. С. 1220–1226.
17. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.

Институт оптики атмосферы СО АН СССР,
Томск

Поступила в редакцию
14 января 1991 г.

V.M. Buldakov. **Use of Continuous Integral in Studies of Laser Beam Propagation Through Randomly Inhomogeneous Media.**

The use of ordinary integration over the harmonics amplitudes is suggested instead of the integration over trajectories. This allowed us to derive an analytical expression for the light field well applicable to solution of a wide class of problems on laser beam propagation both in linear and nonlinear randomly inhomogeneous media. Based on the use of this expression for light field a general expression has been derived for the spatio-temporal correlation function of arbitrary fluctuations of intensity in the turbulent atmosphere.