«Оптика атмосферы и океана», **9**, N 6 (1996)

УДК 551.511.61:551.509.314

А.И. Бородулин, Б.М. Десятков, С.Р. Сарманаев

ФУНКЦИЯ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ПЛОЩАДИ «ПЯТЕН» АЭРОЗОЛЬНЫХ ОТЛОЖЕНИЙ НА ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

В развитие предложенного ранее метода определения математического ожидания и дисперсии площади «пятен» аэрозольных отложений на подстилающей поверхности выведена функция плотности вероятности указанной характеристики. Получено точное аналитическое решение уравнения Колмогорова для функции распределения площади «пятен». Приводится ряд примеров практического использования функции плотности вероятности площади «пятен» при изучении аэрозольных загрязнений над г. Новосибирском.

При решении ряда прикладных задач требуется определение плотности осадка аэрозолей на подстилающей поверхности. Геометрическая структура отложений такова, что зачастую зоны с различной плотностью осадка разделяются областями, практически свободными от него. Этот эффект получил название «пятнистости» [1]. Физическая природа этого эффекта связана со статистическим характером процесса распространения аэрозолей в атмосфере.

В [2] с использованием подхода, развитого в [3], описана методика определения математического ожидания и дисперсии площади пятен аэрозольных отложений на подстилающей поверхности. Более полную информацию о закономерностях распределения площади «пятен» можно получить на основании функции плотности вероятности (ФПВ). Так, например, если данная функция известна, то становится возможным определение вероятности того, что площадь «пятен» S превышает некоторое заданное значение. Целью работы является получение ФПВ площади «пятен» и исследование ряда ее характеристик.

Величину S в пределах некоторой области Ω можно найти следующим образом:

$$S = \iint_{\Omega} g(x, y, t)\, dxdy\ ; \quad g(x, y, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } q(x, y, t) \ge q_0 \\ 0, & \text{если } q(x, y, t) < q_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $q\ (x, y, t)$ – значение плотности осадка в точке подстилающей поверхности с координатами x и y в момент времени t, а q_0 – заданное пороговое значение плотности осадка. Диапазон изменения величины S составляет $0 \le S \le S_\Omega$, где S_Ω – площадь области Ω, а $t \ge 0$. Практически всегда можно выбрать такую область Ω, что S будет много меньше S_Ω. Тогда можно считать $S_\Omega = +\infty$. Временно зададим ненулевые начальные значения площади и момента времени $S_0 \le S < +\infty$; $t_0 \le t$.

При некоторых предложениях (см. [3, 4]) изменение концентрации аэрозолей в заданной точке пространства можно приближенно считать диффузионным марковским процессом. При тех же ограничениях [2, 3] изменение плотности осадка также можно описать с помощью диффузионного марковского процесса. Вследствие этого сделаем предположение о том, что и процесс изменения площади пятен аэрозольных отложений также является диффузионным марковским.

Уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова [5] для ФПВ перехода площади из начального состояния S_0, t_0 в конечное S, t (обозначим ФПВ следующим образом: $f(S, t; S_0, t_0)$) имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + V(t)\frac{\partial f}{\partial S} - Q(t)\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = 0\ , \tag{2}$$

где $V(t)$ – среднее значение локальной скорости изменения площади пятен, а умноженный на два коэффициент $Q(t)$ представляет собой локальную скорость изменения дисперсии приращения рассматриваемого марковского процесса [5].

В общем случае «частицы» статистического ансамбля площадей покидают границу $S = S_0$ в различные моменты времени. Поэтому существует ненулевая вероятность того, что при $t > 0$ доля «частиц» ансамбля находится на границе $S = S_0$. При $S > S_0$ ФПВ есть непрерывная и гладкая функция и с учетом [6] она должна иметь вид

$$f(S, t; S_0, t_0) = \gamma_0(t, t_0)\, \delta(S - S_0) + \theta(S - S_0)\, f_1(S, t; S_0, t_0) \,, \tag{3}$$

где γ_0 – вероятность наблюдения в заданном статистическом ансамбле значений $S = S_0$; σ – дельта-функция Дирака; θ – соответствующая ей единичная ступенчатая функция; f_1 – непрерывная составляющая ФПВ.

Начальное и граничное при $S = +\infty$ условия, очевидно, следующие:

$$f_1(S, t_0; S_0, t_0) = \delta(S - S_0) \;;\;\; f_1(+\infty, t; S_0, t_0) = 0 \,. \tag{4}$$

Для постановки граничного условия при $S = S_0$ и вывода выражения для γ_0 воспользуемся известным приемом [6]. Подставим (3) в (2), затем умножим на некоторую произвольную гладкую функцию $\psi(S)$ и проинтегрируем это выражение по S в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

Пользуясь произвольностью функции ψ, получим

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + V(t)\,\frac{\partial f1}{\partial S} - Q(t)\,\frac{\partial_2 f_1}{\partial S^2} = 0 \,,$$

$$\frac{\partial \gamma_0}{\partial t} - Q\,\frac{\partial f_1}{\partial S}\bigg|_{S = S_0} = 0 \;;\;\; f_1(S_0, t; S_0, t_0) = 0 \,, \tag{5}$$

что вместе с (5) формально определяет систему начального, граничных и дополнительного условия, предназначенного для определения вероятности γ_0.

Однако приступить к решению задачи (4), (5) не представляется возможным. Заметим, что производная γ_0 по t, при монотонном росте площади пятен, всегда отрицательна, а производная от f_1 по S при $S = S_0$ всегда положительна, что создает неразрешимое противоречие. В такой ситуации вместо (2) можно обратиться к обратному уравнению Колмогорова [5], которое соответствует (2) и отнесено к начальному состоянию S_0, t_0:

$$\frac{\partial f}{\partial t_0} + V(t_0)\,\frac{\partial f}{\partial S_0} + Q(t_0)\,\frac{\partial^2 f}{\partial S_0^2} = 0 \,. \tag{6}$$

С помощью процедуры, использованной при выводе (5), получим

$$\frac{\partial f_1}{\partial t_0} + V(t_0)\,\frac{\partial f_1}{\partial S_0} + Q(t_0)\,\frac{\partial f_1^2}{\partial S_0^2} = 0 \;;\;\; (S_0 \le S,\, t_0 \le t) \;;$$

$$\frac{\partial \gamma_0}{\partial t_0} - Q\,\frac{\partial f_1}{\partial S_0}\bigg|_{S_0 = S} = 0 \;;\;\; f_1(S_0, t; S_0, t_0) = 0 \,. \tag{7}$$

В ее корректности при $S_0 = t_0 = 0$ мы убедимся, решив задачи, а сейчас отметим, что начальное и граничное условия для $S_0 = S$ являются несогласованными в начальный момент времени. Это неудобство можно устранить переходом от ФПВ $f(S, t; S_0, t_0)$ к функции распределения площади $F(S, t; S_0, t_0)$, которая получается интегрированием (3) по S в пределах от $-\infty$ до S. Структура функции F имеет вид $F(S, t; S_0, t_0) = \theta(S - S_0)\, F_1(S, t; S_0, t_0)$. Итак, запишем задачу следующим образом:

$$\frac{\partial F}{\partial t_0} + V(t_0)\,\frac{\partial F}{\partial S_0} + Q(t_0)\,\frac{\partial^2 F}{\partial S_0^2} = 0 \;;$$

$$F(+\infty, t; S_0, t_0) = 1 \;;\;\; F(S, t_0; S_0, t_0) = \begin{cases} 1, & S > S_0 \\ 0, & S < S_0 \end{cases}. \tag{8}$$

Еще одно граничное условие для F определяет нормировку ФПВ, но мы его пока фиксировать не будем. Следующее соотношение:

$$F_1 = 1 + \frac{1}{2}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{S - S_0 - \beta_1'}{\beta_2'}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{S + S_0 + \beta_1'}{\beta_2'}\right)\right];$$

$$\beta_1' = \int_{t_0}^{t} V(t_1)dt_1\,; \quad \beta_2' = 2\left[\int_{t_0}^{t} Q(t_1)dt_1\right]^{1/2}, \qquad (9)$$

где erf – интеграл вероятности, является точным решением (8), а функция F удовлетворяет начальному и граничному условиям (8).

Дифференцированием F по S получим соотношение для ФПВ площади

$$f(S,t) = \left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)\right]\delta(S) + \theta(S) f_1(S,t)\,; \qquad (10)$$

$$f_1(S,t) = \frac{1}{\pi^{1/2}\beta_2}\left\{\exp\left[-\left(\frac{S-\beta_1}{\beta_2}\right)^2\right] - \exp\left[-\left(\frac{S+\beta_1}{\beta_2}\right)^2\right]\right\};$$

$$\beta_1 = \int_0^t V(t_1)dt_1\,; \quad \beta_2 = 2\left[\int_0^t Q(t_1)dt_1\right]^{1/2}.$$

Рассмотрим некоторые свойства этого решения. Нетрудно убедиться, что ФПВ (10) нормирована на единицу. Параметр β_1 является математическим ожиданием площади пятен. Его, как и дисперсию площади пятен, можно получить согласно [2]. Для практического использования ФПВ (10) свяжем значение Q, а значит, и параметра β_2 с дисперсией площади пятен σ^2. Выкладки приводят к выражению [3]

$$\frac{\sigma^2}{\beta_1^2} = \frac{1-\gamma_0}{2\beta_0^2} - \gamma_0 + \frac{1}{\pi^{1/2}\beta_0}\exp(-\beta_0^2)\,; \quad \beta_0 = \frac{\beta_1}{\beta_2}. \qquad (11)$$

В случае, когда β_0 стремится к бесконечности (практически это уже выполняется при $\beta_0 > 2$, см. [3]), вероятность γ_0 становится равной нулю, а ФПВ по форме – очень близкой к нормальному распределению и $2^{1/2}\,\sigma = \beta_2$. При $\beta_0 = 0$ ФПВ вырождается в дельта-функцию.

В общем случае вместе с осаждением частиц может идти процесс их ветрового подъема. Этот процесс наблюдается, например, при сдувании ветром аэрозолей, содержащих радиоактивные нуклиды с подстилающей поверхности. Указанные процессы являются конкурирующими. Если осаждение преобладает над подъемом, то β_1 растет. В противном случае β_1 падает. Нетрудно убедиться, что ФПВ (10) адекватно описывает данный процесс. Особо следует отметить, что приведенное решение справедливо лишь тогда, когда значение S_0 равно нулю. Решения для S_0, не равного нулю, пока не получено, что не исключает применения приближенных численных методов решения поставленной выше задачи в общем случае.

Для иллюстрации практического применения предложенных алгоритмов и получения реальных оценок характеристик загрязнения в типичных метеорологических условиях была проведена серия расчетов по распространению золы, выбрасываемой электростанцией ТЭС-2 г. Новосибирска. Часть полученных результатов, относящихся к теме данной работы, приведена в таблице.

Рассчитанные значения вероятностей P_1 ($\beta_1 > S$) для $S = 1{,}5\cdot10^8$; $8{,}3\cdot10^7$; $1{,}4\cdot10^7$; $4{,}0\cdot10^6$ м^2

q_0, г/м^2	β_1, м^2	σ, м^2	P_1	P_2	P_3	P_4
$1{,}0\cdot10^{-6}$	$1{,}5\cdot10^8$	$4{,}0\cdot10^7$	0,50	0,95	1,00	1,00
$2{,}0\cdot10^{-6}$	$1{,}3\cdot10^8$	$8{,}5\cdot10^7$	0,41	0,70	0,86	0,86
$5{,}0\cdot10^{-6}$	$8{,}3\cdot10^7$	$3{,}9\cdot10^7$	0,04	0,50	0,95	0,96
$1{,}0\cdot10^{-5}$	$5{,}4\cdot10^7$	$3{,}6\cdot10^7$	0,00	0,22	0,83	0,85
$2{,}5\cdot10^{-5}$	$1{,}4\cdot10^7$	$4{,}6\cdot10^7$	0,04	0,08	0,11	0,11
$4{,}1\cdot10^{-5}$	$4{,}0\cdot10^6$	$8{,}5\cdot10^5$	0,00	0,00	0,00	0,50

Был рассмотрен гипотетический пример мгновенного выброса 32 кг золы в 15 ч дня 1 июня при скорости ветра на уровне 2 м, равной 2 м/с. Используемые в таблице обозначения следующие: P_i – вероятность того, что на рассматриваемой территории математическое ожидание площади пятен β_1 со стандартным отклонением σ превышает площадь S, на которой плотность выпавшего осадка больше предельного значения q_0; вероятности P_i для $i = 1, 2, 3, 4$ получены для $S = 1{,}5\cdot10^8$; $8{,}3\cdot10^7$; $1{,}4\cdot10^7$; $4{,}0\cdot10^6$ м^2; соответствующие значения q_0 (г/м^2) равны $1{,}0\cdot10^{-6}$; $5{,}0\cdot10^{-6}$; $5\cdot10^{-5}$; $4{,}1\cdot10^{-5}$. Видно, что уменьшение S увеличивает значение P_i. Уменьшение β_1 уменьшает P_i. Расчеты также показывают, что уменьшение стандартного отклонения площади «пятен» σ при неизменном значении β_1 приводит к увеличению вероятности P_i. При $S = \beta_1$ вероятности P_i равны 0,5. Значения вероятностей P_i и зависимость их от параметров являются вполне разумными, что дополнительно подтверждает справедливость полученных в работе результатов.

1. Буйков М.В. // Метеорология и гидрология. 1990. N 9. С. 64–72.
2. Бородулин А.И. // Метеорология и гидрология. 1994. N 6. С. 31–38.
3. Бородулин А.И., Майстренко Г.М., Чалдин Б.М. Статистическое описание распространения аэрозолей в атмосфере. Метод и приложения. 1992. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 124 с.
4. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч I. М.: Наука, 1965. 640 с.
5. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Советское радио, 1982. 488 с.
6. Кузнецов В.Р., Сабельников В.А. Турбулентность и горение. М.: Наука, 1986. 288 с.
7. Десятков Б.М. // Труды Западно-Сибирского регионального научно-исследовательского института. 1986. Вып. 77. С. 68–75.
8. Роди В. // Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984. С. 227–322.
9. Теверовский Е.Н., Дмитриев Е.С. Перенос аэрозольных частиц турбулентными потоками. М.: Энергоатомиздат, 1988. 160 с.

ГНЦ ВБ «Вектор», НИИ аэробиологии,
Новосибирская область

Поступила в редакцию
26 января 1996 г.

A.I. Borodulin, B.M. Desyatkov, S.R. Sarmanaev. **Probability Density Function of an Aerosol Deposition «Spots» Area on the Underlying Surface.**

The paper deals with a development of the early early presented method of mean value and standard deviation of the aerosol deposition «spots» area on the underlying surface. The probability density function of the aerosol deposition «spots» area on the underlying surface was obtained as an exact analytical solution of Kolmogorov equation. For study of the aerosol pollution in the air over Novosibirsk, some examples of the practical application of the probability density function are discussed.