«Оптика атмосферы», 4, № 6 (1991)

УДК 535.36 : 537.874.301 : 551.501

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

В.П. Якубов

ЭНТРОПИЙНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ РАДИООПТИКИ

Рассматривается методика оценки параметра регуляризации решения обратных задач радиооптики, основанная на максимизации отношения энтропий энергетических спектров остаточного шума и выделяемого информационного процесса во входном сигнале. Приводится пример, иллюстрирующий применимость предлагаемой методики.

Одна из центральных проблем в регуляризации обратных задач радиооптики состоит в выборе принципа задания параметра регуляризации [1—3]. Наибольшее распространение здесь получил принцип невязки А.Н. Тихонова, когда параметр регуляризации a выбирается из условия согласования остаточной невязки и априорно известной погрешности исходных данных [1]. В настоящем сообщении в случае, когда уровень шума заранее неизвестен, предлагается выбирать α из условия оптимизации энтропийного функционала.

Многие обратные задачи радиооптики могут быть сведены к линейному уравнению

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{y}, \tag{1}$$

где $\mathbf{y} = \{y\}$ — M-мерный вектор измеряемых величин и $\mathbf{x} = \{x_1\}$ — N-мерный вектор неизвестных параметров, матрица A имеет размерность $M{\times}N$, $M \geq N$. Для решения уравнения (1) вводится регуляризирующий функционал А.Н. Тихонова [1], минимизация которого приводит к нормальному уравнению

$$(\mathbf{A}^{\tau}\mathbf{A}+\alpha)\mathbf{x}_{\alpha}=\mathbf{A}^{\tau}\mathbf{y}. \tag{2}$$

Здесь $x = \mathbf{x}_\alpha$ — регуляризованное решение; α — параметр регуляризации; «т» — означает операцию транспонирования. Можно показать (см. [4]), что решение нормального уравнения (2) совпадает с псевдорешением $\mathbf{x}_\alpha = B^{+}\mathbf{y}$ уравнения $B\mathbf{x} = \mathbf{y}$, где $B = A+\alpha(A^{+})^{\text{т}}$ и B^{+} означает псевдообратную матрицу [5, 6]. Приближенное решение $\mathbf{x}_\alpha$ при этом отличается от ожидаемого идеального решения $\mathbf{x}_0$ на значение [6]

$$\Delta\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\alpha}-\mathbf{x}_0=B^{+}[\Delta\mathbf{y}-(B\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0)],$$

где $\Delta\mathbf{y}$ — погрешность измеряемых исходных данных относительно идеально точных $\mathbf{y}_0 = A\mathbf{x}_0$. Отсюда для относительной погрешности решения по норме $d_x = \|\Delta\mathbf{x}\| / \|\mathbf{x}_0\|$ имеем $d_x \leq \varepsilon(\alpha)\operatorname{cond} A$, где $\operatorname{cond}A = \|A^{+}\|\cdot\|A\|$ — число обусловленности матрицы A и

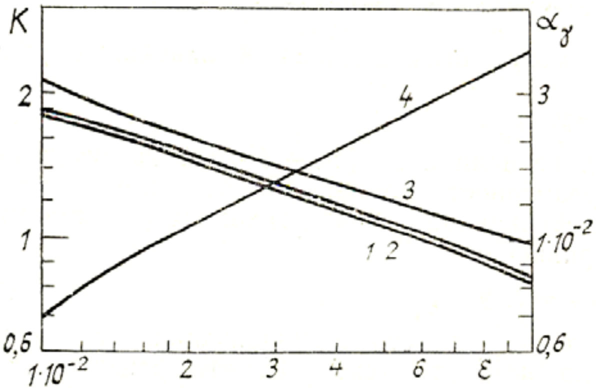
$$\varepsilon(\alpha)=\frac{\|B^{+}[\Delta\mathbf{y}-(B\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0)]\|}{\|A^{+}\|\cdot\|\mathbf{y}_0\|} \tag{3}$$

— величина эффективной погрешности исходных данных, которая должна уменьшиться по сравнению с изначальной погрешностью при $\alpha_0 = 0$: $\varepsilon(\alpha) < \varepsilon(0)$. Регуляризация производится тем успешней, чем точней невязка в изменении оператора, $(B\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0)$ в (3) компенсирует погрешность исходных данных $\Delta\mathbf{y}$. Параметр регуляризации α играет роль подстроенного параметра. Оптимальным будет то значение $\alpha = \alpha_0$, при котором $\varepsilon(\alpha)$ минимальна. Очевидно, что в общем случае α_0 зависит как от уровня ошибок $\Delta\mathbf{y}$, так и от вида решения $\mathbf{x}_0$ и матрицы А. При выборе α из принципа невязки проводится простое согласование уровня невязки $\delta = \|\mathrm{A}\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{y}\|$ и уровня погрешности исходных данных $\|\Delta\mathbf{y}\|$, который предполагается известным. Найденная из этого условия $\alpha = \alpha_0$ не учитывает вида точного решения x_0 и вида оператора А, а потому не является оптимальной.

В случае неизвестного уровня $\|\Delta\mathbf{y}\|$ применение принципа. невязки невозможно и необходимо привлечение какой-либо дополнительной информации, например, о форме спектра шума. Выбор параметра регуляризации α и получаемое при этом решение эквивалентны разбиению исходного сигнала $\mathbf{y}$ на информационный процесс $\mathbf{y}_\alpha = \mathrm{A}\mathbf{x}$ и на шум $\Delta\mathbf{y}_\alpha = \mathbf{y} - \mathbf{y}_\alpha$. Выдвигаемый нами принцип выбора α основан, на предположении, что энергетический спектр шума $\Delta\mathbf{y}$ значительно более равномерен, чем энергетический спектр информационного процесса $\mathbf{y}_0$. В качестве меры контрастности этих спектров предлагается использовать энтропийный функционал $\gamma(\alpha) = H[\Delta\mathbf{y}_\alpha] / H[\mathbf{y}_\alpha]$, где $H(\mathbf{z}) = -\sum_j p_j \ln p_j$ — средняя энтропия нормированного Энергетического спектра $p_j(\sum_j p_j = 1)$ для шума $\mathbf{z} = \Delta\mathbf{y}_\alpha$ и сигнала $\mathbf{z} = \mathbf{y}_\alpha$. Потребовав, чтобы функционал $\gamma(\alpha)$ имел максимальное значение, мы найдем $\alpha = \alpha_\gamma$, оптимальное в смысле принципа максимальной энтропии (ПМЭ). Подчеркнем, что ПМЭ хотя и подобен в чем-то, но тем не менее отличается от известного метода максимальной энтропии, который широко используется для оценки энергетических спектров сигналов в авторегрессионных моделях [7].

Для получения псевдообратной матрицы и псевдорешения удобно воспользоваться сингулярным разложением матрицы $\mathrm{A}=\mathrm{U}^{\mathrm{T}}\mathrm{CV}$, где U и V — ортогональные матрицы; C — квазидиагональная матрица с элементами c_i ($i = 1, \ldots, N$), называемыми сингулярными числами [4, 5]. Псевдообратная матрица B^+ вычисляется как произведение $\mathrm{B}^+ = \mathrm{V}^{\mathrm{T}}\mathrm{SU}$, где элементами квазидиагональной матрицы S являются числа $s_i=[c_i+\alpha/c_i]^{-1}$. При $\alpha = 0$ числа $s_i = c_i$ и $\mathrm{B}^+ = \mathrm{A}^+$, а выбор $\alpha \neq 0$ означает возмущение сингулярных чисел матрицы A. Для расчета энергетических спектров могут быть использованы традиционные методы, в том числе алгоритмы быстрого преобразования Фурье, Уолша и т.д.

В качестве тестового примера был выбран дискретный аналог интегрального уравнения Фредгольма 1 рода типа свертки (см. стр. 109 в [2]), на котором обычно проверяются регуляризирующие процедуры. При $M = 41$ и $N = 13$ число обусловленности равнялось $\mathrm{cond}\, A = \max c_i / \min c_i = 285$. Без регуляризации ($\alpha = 0$) погрешность решения превышала 100% уже при уровне шума $\varepsilon = \|\Delta\mathbf{y}\| / \|\mathbf{y}_0\| \geq 10^{-2}$, а в результате регуляризации ($\alpha \neq 0$) погрешность стала менее 9%. На рисунке изображена зависимость реальной обусловленности задачи $K = d_x/\varepsilon$ от уровня шума ε при оптимальном выборе $\alpha = \alpha_0$ (кривая *1*), при выборе из принципа невязки $\alpha = \alpha_\sigma$ (кривая *3*) и при предлагаемом в работе выборе $\alpha = \alpha_\gamma$ (кривая *2*).



Зависимость реальной обусловленности модельной обратной задачи после регуляризации (кривые *1—3*) и параметра регуляризации (кривая *4*) от погрешности задания исходных данных

Из рисунка видно, что несмотря на отсутствие априорной информации об уровне шума выбор $\alpha = \alpha_\gamma$ не уступает по точности принципу невязки $\alpha = \alpha_\sigma$ и даже ближе его к оптимальному выбору $\alpha = \alpha_0$. Кривая *4* представляет найденную зависимость $\alpha = \alpha_\gamma$ от уровня шума и может быть аппроксимирована формулой $\alpha_\gamma = [6 \cdot 10^{-3}\, \varepsilon]^{1/2}$.

Приведенный тестовый пример подтверждает эффективность предлагаемой оценки параметра регуляризации. Применимость этого подхода проверена на решении плохообусловленной обратной задачи атмосферной рефракции [6]. Предложенный нами энтропийный функционал был с успехом применен для разделения доплеровской и шумовой частей спектра реальных сигналов в городских условиях и для определения на этой основе скорости движения передатчика. Оптимизация этого функционала может найти применение в адаптивных методах обработки изображений.

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
2. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983. 200 с.
3. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. 199 с.

4. Л о у с о н Ч . , Х е н с о н Р . Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука, 1986. 232 с.
5. Ф о р с а й т Д ж . , М а л ь к о л ь м М . , М о у л е р Ж . Машинные методы математических вычислений. М.: Мир. 1980. 279 с.
6. С и м а к о в а Н . А . , Я к у б о в В . П . //Радиотехника и электроника. 1989. Т. 34. Вып. 7. С. 1329—1336.
7. Робинсон Э.А. //ТИИЭР. 1982. Т. 70. № 9. С. 6—33.

Сибирский физико-технический институт
при Томском госуниверситете

Поступила в редакцию
6 декабря 1990 г.

V . P . Y a k u b o v . **The Entropy Estimate of the Regularization Parameter in Radio-Optics Inverse Problems.**

The method of estimation of the regularization parameter of the radio-optics inverse problem solution is considered. The method is based on seeking for maximum of the ratio of en1.ergy spectra of the residual noise and information process in an output signal. An example illustrating the applicability of the proposed method is presented.