

**Т.В. Ярославцева**

**ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ОСАДКА  
АЭРОЗОЛЕЙ НА РАСТИТЕЛЬНОСТИ**

*Институт химической кинетики и горения СО РАН, г. Новосибирск*

Поступила в редакцию 03.03.99 г.

Принята к печати 30.03.99 г.

Представлен ряд моделей оценивания полей плотности осадка аэрозольных препаратов по данным измерений в ограниченном наборе точек. Приведены результаты численных экспериментов по восстановлению полей отложений и параметров аэрозольных обработок в приближениях легкой, моно- и полидисперсной примеси. Исследована чувствительность решений обратных задач в зависимости от размещения точек измерений.

**Введение**

В статье рассматривается задача восстановления плотности осадка препарата на растительности, создаваемого с помощью аэрозольного генератора регулируемой дисперсности (ГРД). В приближении моделей легкой примеси, моно- и полидисперсного аэрозоля обсуждаются постановки трех обратных задач оценивания параметров аэрозольных обработок и плотности осадка препарата по данным наблюдений на различных удалениях от линии хода ГРД. В качестве целевой функции принимается среднеквадратическое отклонение измеренной и вычисленной плотности осадка. В случае легкой и полидисперсной примеси определяемыми параметрами являются эффективная высота источника и коэффициент взаимодействия примеси с растительным покровом. В монодисперсном случае также подлежит определению средняя скорость оседания частиц аэрозоля.

Для описания процессов распространения аэрозольного облака использовалось полуэмпирическое уравнение переноса примеси применительно к мгновенному линейному источнику бесконечной протяженности. Скорость ветра и коэффициент вертикального турбулентного обмена описываются с помощью теории подобия Монина–Обухова. Основной входной информацией в моделях оценивания плотности осадка являются: расстояние точек отбора проб от источника, спектр размеров аэрозольных частиц, данные измерений плотности осадка на растительности и почве. В качестве дополнительной информации могут быть использованы величина скорости ветра, состояние устойчивости приземного слоя атмосферы и т.д.

**Постановка обратной задачи**

Процесс распространения аэрозольной примеси в атмосфере от мгновенного линейного источника высоты  $H$  описывается полуэмпирическим уравнением турбулентной диффузии [1]

$$u(z) \frac{\partial Q}{\partial x} - w \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} m(z) \frac{\partial Q}{\partial z} \tag{1}$$

с граничными и начальными условиями:

$$m(z) \left. \frac{\partial Q}{\partial z} \right|_{z=0, z=h} = 0, \quad u(z) Q \Big|_{x=0} = G\delta(z-H), \tag{2}$$

где  $x, z$  – горизонтальная и вертикальная координаты;  $Q(x, z)$  – импульс концентрации примеси;  $u(z)$  – скорость ветра (направление оси  $x$  совпадает с направлением ветра);  $m(z)$  – коэффициент вертикального турбулентного обмена;  $w$  – скорость гравитационного оседания частиц;  $h$  – высота приземного слоя атмосферы;  $\delta$  – дельта-функция;  $G$  – производительность непрерывного линейного источника, г/м.

Для описания метеорологических характеристик используется теория подобия Монина–Обухова. Поскольку аэрозольные эксперименты проводились в условиях устойчивого приземного слоя атмосферы (в ночное время), то в дальнейшем ограничимся лишь математическим описанием этого случая. Профили скорости ветра и коэффициент вертикального турбулентного обмена выразим зависимостями

$$u(z) = \frac{u_*}{\chi} \left( \ln \frac{z}{z_0} + \beta \frac{z-z_0}{L} \right), \quad m(z) = \frac{u_* z}{1 + \beta z/L}, \tag{3}$$

где  $u_*$  – динамическая скорость;  $z_0$  – параметр шероховатости;  $L$  – масштаб длины Монина–Обухова;  $\chi = 0,35$  – постоянная Кармана;  $\beta = 4,7$ .

Для случая устойчивого приземного слоя (ночное время) выполняется эмпирическое соотношение [2]:

$$L = B u_*^2, \tag{4}$$

где  $B \approx 1100 \text{ с}^2/\text{м}$ .

Импульс концентрации  $Q(x, z)$  связан с плотностью осадка выражением

$$\psi(x, C, H, w) = C Q(x, z, H, w) \Big|_{z=h_0}, \tag{5}$$

где  $C$  – коэффициент взаимодействия примеси с подстилающей поверхностью;  $h_0$  – высота растительности.

В задаче (1)–(5) неизвестными параметрами являются скорость гравитационного оседания частиц  $w$ , высота источника  $H$  и коэффициент  $C$  взаимодействия с подстилающей поверхностью. Требуется также по данным измерений

в точках  $x_k$  плотности осадка аэрозольного препарата вещества  $p_k$ ,  $k = 1, \dots, N$  определить непрерывную картину его распределения по мере удаления от источника.

Введем следующие обозначения для оцениваемых параметров:

$$S_1 = C, \quad S_2 = H, \quad S_3 = w, \quad \mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3).$$

Под решением задачи (1)–(5) будем понимать оценку вектора  $\mathbf{S}$ , доставляющую минимум следующему квадратичному функционалу:

$$J(\mathbf{S}) = \sum_{k=1}^N [\psi(x_k, \mathbf{S}) - p_k]^2 \rightarrow \min_{\mathbf{S} \in \Omega},$$

где  $\Omega = \{C > 0; 0,5 < H \leq 10 \text{ м}; 0 \leq w \leq 0,1 \text{ м/с}\}.$  (6)

### Методы решения

#### Использование сопряженных уравнений переноса примеси

Решение задачи (1)–(6) оценивания вектора параметров  $\mathbf{S}$  можно получить способом, основанным на возможности двойственного представления линейных функционалов от концентрации через решения прямых и сопряженных задач переноса примеси [3]. Справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} Q(x_k, S_2, S_3) &= \int_0^h \int_0^X Q(x, z) \delta(z - z_k) \delta(x - x_k) dx dz = \\ &= \int_0^h \int_0^X Q(x, z) L^* Q_k^* dx dz = \\ &= \int_0^h \int_0^X Q_k^*(x, z, S_3) L Q(x, z) dx dz = \\ &= \int_0^h \int_0^X Q_k^*(x, z, S_3) \delta(z - S_2) \delta(x) dx dz = \\ &= Q_k^*(0, S_2, S_3), \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $x_k < X$ ;  $Q_k^*$  – решения следующего набора сопряженных задач в области  $0 < z < h, x < X$ :

$$\begin{aligned} L^* Q_k^* &\equiv -u(z) \frac{\partial Q_k^*}{\partial x} + w \frac{\partial Q_k^*}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} m(z) \frac{\partial Q_k^*}{\partial z} = \\ &= \delta(x - x_k) \delta(z - z_k), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\left( m(z) \frac{\partial Q_k^*}{\partial z} - w Q_k^* \right) \Big|_{z=0, z=h} = 0, \quad Q_k^* \Big|_{x=X} = 0.$$

С учетом (7) функционал (6) примет вид

$$J_N(\mathbf{S}) = \sum_{k=1}^N [S_1 Q_k^*(x_k, z, S_2, S_3) \Big|_{z=h_0} - p_k]^2. \quad (9)$$

Следует отметить, что в случае легкой и полидисперсной примесей решение обратной задачи существенно упрощается, поскольку функция (9) задается в явном виде. Для этого достаточно решить  $N$  сопряженных задач (8).

### Метод сеток

Поскольку точность наблюдений, используемых в рассматриваемой обратной задаче, невысока (погрешности измерений плотности осадка могут составлять 10–15%), то отпадает необходимость их решения с очень высокой точностью. Следует также учесть малые размерности поставленных задач и некоторую нечеткость задания функции источника. Отсюда вытекает целесообразность применения метода сеток, суть которого состоит в расчете функционала (6) или (9) на дискретном множестве  $\Omega_1 \subset \Omega$  и поиске минимального значения функции  $J(\mathbf{S})$  на этом множестве.

Простота численной реализации задачи (1)–(6), а также возможность нахождения всех локальных минимумов функционалов (6), (9) являются достоинствами предлагаемого подхода.

### Численные эксперименты

Измерения плотности осадка проводились на различных удалениях  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$  от источника, указанных в табл. 1, при следующих значениях величин: параметр шероховатости  $z_0 = 0,05$  м, производительность источника  $G = 20$  г/м, скорость ветра  $u = 0,8$  м/с (на высоте 2 м). Динамическая скорость  $u^*$  определялась из эмпирической зависимости, справедливой в условиях устойчивого приземного слоя.

#### Приближение легкой примеси

Положим скорость гравитационного оседания аэрозольных частиц равной нулю. В этом случае требуется определить два неизвестных параметра: эффективную высоту источника  $H$  и коэффициент  $C$  взаимодействия с растительностью.

Для оценивания указанных параметров выбирались различные пары опорных точек наблюдений из указанного диапазона расстояний.

На рис. 1,  $a$  и в табл. 1 представлены результаты восстановления плотности осадка препарата по точкам  $x_1$  и  $x_2$ . Анализ результатов численного моделирования показывает систематическое отклонение вверх расчетной зависимости от измеренных значений  $p_k$  в точках  $x_3$ – $x_8$ , что объясняется отсутствием эффектов оседания в модели переноса примеси. Отметим также рост относительного отклонения расчета от наблюдений по мере удаления от линии источника.

Рассчитанная эффективная высота источника составила 0,8 м и оказалась существенно меньше реальной, которая соответствует 6–8 м [4].

В целом результат восстановления плотности осадка следует признать удовлетворительным, и данное приближение может быть использовано для оценки сверху плотностей отложений.

Для сравнения точности восстановления представленные результаты моделирования плотности осадка на основе опорных точек  $x_1$  и  $x_8$ . Как показывает анализ, такой выбор плана не совсем удачен и указывает на более высокую чувствительность восстановления к погрешностям наблюдений в этих точках [5].

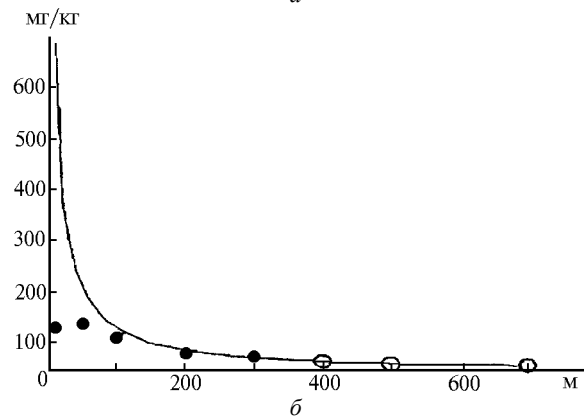
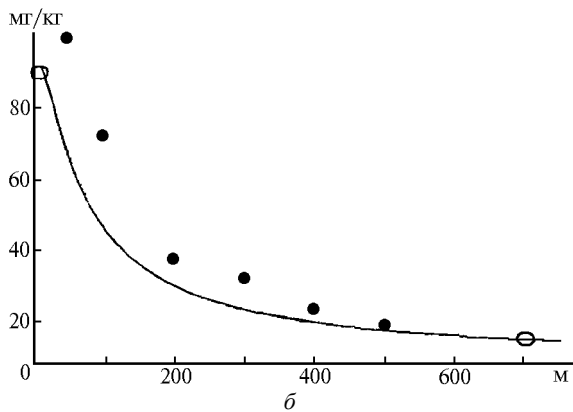
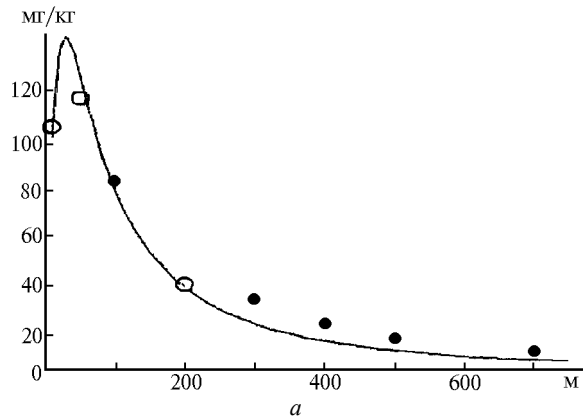
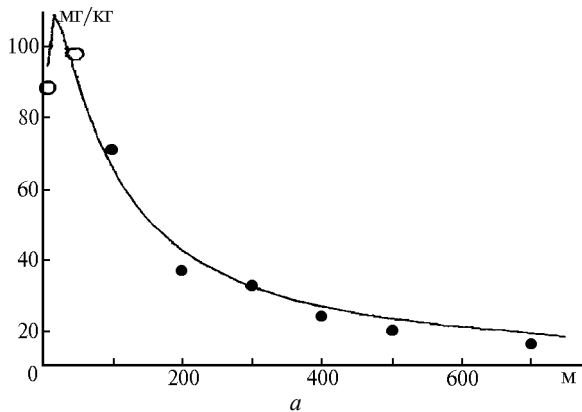


Рис. 1. Восстановленные и измеренные плотности осадка аэрозолей в случае легкой примеси для планов наблюдений:  $a-(x_1, x_2)$ ;  $b-(x_1, x_8)$ . — — расчетная кривая,  $\circ$  — измерения в опорных точках,  $\bullet$  — контрольные точки измерений

Рис. 2. Оценка плотности осадка препарата для случая монодисперсного аэрозоля на планах:  $a-(x_1, x_2, x_4)$ ;  $b-(x_6, x_7, x_8)$

#### Монодисперсный аэрозоль

Для этого варианта модели необходимо определить кроме  $H$  и  $C$  также среднюю скорость  $w$  оседания частиц из аэрозольного облака.

Оценивание рассматриваемых параметров требует использования не менее трех опорных точек (точек плана наблюдений). Расчеты проводились по двум планам:  $(x_1, x_2, x_4)$  и  $(x_6, x_7, x_8)$ . Результаты восстановления искомым параметрам и плотности осадка приведены в табл. 1 и на рис. 2.

Расчеты показывают, что учет эффекта гравитационного осаждения аэрозольных частиц приводит к увеличению эффективной высоты источника до 2 м. С другой стороны, учет механизма осаждения примеси приводит к более быстрому убыванию плотности осадка по сравнению с экспериментальными данными. Это обстоятельство позволяет использовать рассматриваемую модель для оценки снизу возможных отложений препарата.

На рис. 2,  $b$  приведен пример неудачного выбора опорных точек. Относительная и абсолютная погрешности в контрольных точках  $x_1-x_5$  достигают очень больших величин, что связано с существенной неоптимальностью выбранного плана наблюдений [4].

Таблица 1

Восстановленные и измеренные значения плотности осадка на пшенице, мг/кг

Модель восстановления	Расстояние от источника, м							
	$x_1 = 10$	$x_2 = 50$	$x_3 = 100$	$x_4 = 200$	$x_5 = 300$	$x_6 = 400$	$x_7 = 500$	$x_8 = 700$
Легкая примесь	84,6*	82,1*	56,5	32,8	22,4	17,3	13,1	9,1
Монодисперсный аэрозоль	76,4*	95,2*	58,3	26,1*	14,2	9,4	6,5	3,5
Полидисперсный аэрозоль	81,3*	88,1*	59,4	33,2	22,0	16,1	12,0	8,4
Данные измерений	78,5	88	61	27	22,5	14,3	9,5	5,5

\* Соответствует измерениям плотности осадка в точках плана.

#### Полидисперсный аэрозоль

При проведении опытов контролировался дисперсный состав аэрозольных частиц, который с достаточно

высокой точностью аппроксимируется логарифмически нормальным законом распределения с медианно-массовым диаметром  $d_m = 12,7$  мкм и среднегеометрическим отклонением  $\sigma_g = 2,6$ .

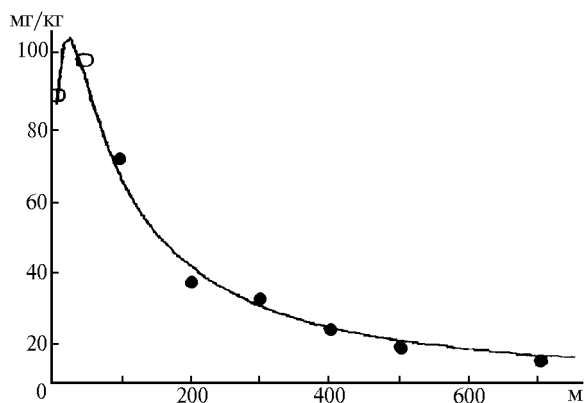


Рис. 3. Восстановленные плотности осадка аэрозолей на растительности в полидисперсном приближении

Таблица 2

Оценки параметров обратных задач

Модель восстановления	Высота источника, м	Скорость оседания аэрозольных фракций, см/с	Коэффициент взаимодействия с подстилающей поверхностью, кг/м <sup>2</sup>
Легкая примесь	0,8	0	134,6
Монодисперсный аэрозоль	2	0,7	138,5
Полидисперсный аэрозоль	3	0,01	37,4
		0,06	
		0,13	
		0,23	
		0,37	
		0,6	
		1	

На рис. 3 и в табл. 1, 2 приведены результаты восстановления плотности осадка аэрозоля и неизвестных параметров.

*T.V. Jaroslavtseva. Inverse Problem of Reconstruction Density of Aerosols Fallout on Vegetation.*

A number of models for estimating the sediment density fields of aerosols using the measurements of a small number of observational points are considered. The results of numerical experiments on the reconstruction of sediment fields and aerosol parameters in the approximation of lightweight, mono- and polydispersed pollutants are shown. The sensitivity of the inverse problems solutions with respect to the observation points distribution is investigated.

Анализ результатов показывает, что произошло увеличение эффективной высоты источника до 3 м, что объясняется присутствием в спектре размеров аэрозольных частиц тяжелых и легких фракций. Вследствие этого соответствие расчета наблюдениям плотности осадка препарата оказалось вполне удовлетворительным в контрольных точках  $x_3-x_8$ .

Следует также отметить, что по мере удаления от линии источника практически не происходит нарастания относительной погрешности.

### Заключение

Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы:

Для случаев легкой, моно- и полидисперсной примеси по ограниченному числу точек проведены оценивание текущих параметров опыта и восстановление плотности осадка аэрозоля на растительности.

Использование набора моделей восстановления позволило провести последовательное уточнение параметров аэрозольного источника и характеристик взаимодействия аэрозольной примеси с растительностью, оценить верхнюю и нижнюю границу возможной плотности осадка препарата.

Проведено численное исследование чувствительности восстановления плотности осадка в зависимости от выбора расположения опорных точек.

1. Дунский В.Ф., Никитин Н.В., Соколов М.С. Пестицидные аэрозоли. М.: Наука, 1982. 287 с.
2. Атмосферная турбулентность и моделирование распространения примесей / Под редакцией Ф. Ньюиштада и Х. Ван Допа. Л.: Гидрометеоздат, 1985. 351 с.
3. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 320 с.
4. Абраменко В.В., Алоян А.Е., Анкилов А.Н. и др. Численное моделирование распространения аэрозолей в пограничном слое атмосферы над растительностью. Новосибирск, 1985. 30 с. (Препринт / ВЦ СО АН СССР, N 584).
5. Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1971. 312 с.