

МЕТОДЫ И СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ.  
ОБРАБОТКА ДАННЫХ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

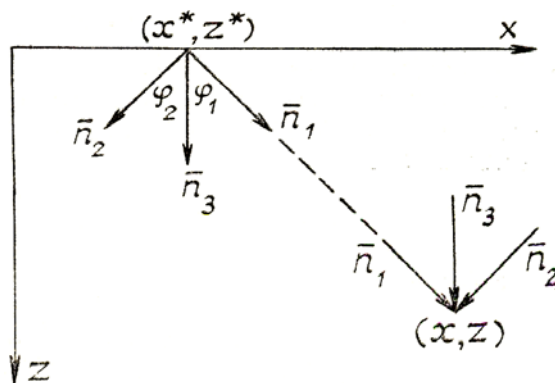
УДК 551.510.501 : 535.36

В.В. Веретенников

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ЛИДАРНОГО ТОМОГРАФИЧЕСКОГО  
ЗОНДИРОВАНИЯ АТМОСФЕРЫ

Рассмотрена задача восстановления двумерных пространственных распределений коэффициентов ослабления и обратного рассеяния при лидарном зондировании атмосферы с борта самолета по томографической схеме. Получены решения интегральных уравнений лидарного томографического зондирования для двух- и трехлучевых схем в аналитическом виде. Показано, что для рассмотренных условий определение коэффициентов ослабления и рассеяния назад не требует использования априорной дополнительной информации о функциональной связи между ними. Полученные решения служат основой для разработки новых вычислительных алгоритмов лазерного томографического зондирования атмосферы.

В настоящее время возрастает количество исследований, связанных с определением пространственного распределения аэрозольных и газовых составляющих атмосферы с использованием самолетных лидаров [1–3]. Для решения подобных задач при условии, что в процессе перемещения лидара относительно исследуемой области пространства зондирование осуществляется вдоль различных направлений, могут быть предложены новые перспективные методы интерпретации локационных данных, основанные на идеях реконструктивной томографии [4]. Такой подход был развит в работах [5, 6], где установлена взаимосвязь методов трансмиссионной томографии и лидарного зондирования, приведены численные алгоритмы лидарного томографического зондирования атмосферы с борта самолета для двух- и трехлучевых схем. В настоящей статье получены решения интегральных уравнений лидарного томографического зондирования атмосферы для двух- и трехлучевых схем в аналитическом виде, которые могут служить основой для разработки новых вычислительных алгоритмов.



**1. Постановка задачи.** Рассмотрим математическую формулировку проблемы лидарного томографического зондирования атмосферы с борта самолета. Анализ будет проведен для двумерной схемы наблюдений, аналогичной рассмотренной в [6] и представленной на рисунке. Плоскость рисунка совмещена с плоскостью зондирования, образованной направлением, вдоль которого перемещается лидар, и направлением зондирования. Определим в плоскости зондирования декартову систему координат  $(x, z)$  и совместим ось  $x$  с направлением движения лидара. Для определенности будем полагать, что лидар перемещается прямолинейно в горизонтальной плоскости, а зондирование осуществляется в направлении  $\mathbf{n} = (\sin\varphi, \cos\varphi)$ , характеризуемом полярным углом  $\varphi$  по отношению к направлению в надир. Предположим, что лидар находится в точке  $\mathbf{r}^* = (x^*, z^*)$ . Тогда локационный сигнал от рассеивающего объема с координатами в точке  $\mathbf{r} = (x, z)$  в приближении однократного рассеяния определяется выражением

$$S(\mathbf{r}^*, \rho, \mathbf{n}) = \beta(\mathbf{r}^* + \rho\mathbf{n}) \exp\left\{-2 \int_0^\rho \alpha(\mathbf{r}^* + \rho'\mathbf{n}) d\rho'\right\}, \tag{1}$$

в котором  $\rho$  – расстояние от лидара до рассеивающего объема,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}^* + \rho\mathbf{n}$ ;  $S(\mathbf{r}^*, \rho, \mathbf{n}) = P(\mathbf{r}^*, \rho, \mathbf{n})\rho^2/(P_0A)$ , где  $P_0$  и  $P(\mathbf{r}^*, \rho, \mathbf{n})$  – мощности излучаемого и принимаемого сигналов соответственно;  $A$  – аппаратная постоянная,  $\alpha(\mathbf{r})$  и  $\beta(\mathbf{r})$  – коэффициенты ослабления и рассеяния назад в точке  $\mathbf{r}$ . При перемещении лидара вдоль оси  $X$  зондирование осуществляется по различным направлениям  $\mathbf{n}$ . Задача состоит в том, чтобы из принимаемых в этих условиях лидарных сигналов (1) восстановить пространственное распределение полей оптических характеристик атмосферы  $\alpha(\mathbf{r})$  и  $\beta(\mathbf{r})$ . В [6] показано, что для решения поставленной задачи, в отличие от трансмиссионной томографии, достаточно проводить зондирование вдоль двух направлений. Кроме этого рассмотрен один из возможных численных алгоритмов томографической обработки локационных сигналов.

Для построения аналитического решения уравнения (1) перейдем к дифференциальной форме записи исходного уравнения. С этой целью прологарифмируем левую и правую части (1), а затем возьмем производные от обеих частей по направлению  $\mathbf{n}$ , в результате получим

$$\frac{\partial \ln S(\mathbf{r}^*, \rho, \mathbf{n})}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \ln \beta(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} - 2\alpha(\mathbf{r}). \quad (2)$$

С учетом того, что для произвольной дифференцируемой функции  $f(x, z)$ , заданной на плоскости, производная по направлению  $\mathbf{n}$  имеет вид

$$\frac{\partial f(x, z)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial f}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \varphi,$$

окончательно будем иметь

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}^*, \rho, \mathbf{n})}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial L(x, z)}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial L(x, z)}{\partial z} \cos \varphi - 2\alpha(x, z), \quad (3)$$

где

$$G(\mathbf{r}^*, \rho, \mathbf{n}) = \ln S(\mathbf{r}^*, \rho, \mathbf{n}); L(x, z) = \ln \beta(\mathbf{r}).$$

Уравнение (3) представляет собой основное уравнение лидарного томографического зондирования в дифференциальной форме. По отношению к коэффициенту обратного рассеяния  $\beta(x, z)$  уравнение (3) является при каждом фиксированном значении полярного угла  $\varphi$  уравнением в частных производных первого порядка, решение которого может быть получено стандартными методами. Особенность уравнения (3) заключается в том, что оно содержит также еще одну неизвестную функцию – коэффициент ослабления  $\alpha(\mathbf{r})$ . Поэтому для решения (3) относительно пары неизвестных функций  $\alpha(\mathbf{r})$  и  $\beta(\mathbf{r})$  следует исходить из того, что выражение (3) описывает семейство уравнений, параметрически зависящих от полярного угла  $\varphi$ . При этом разнообразие и сложность вычислительных систем томографической обработки лидарных сигналов будет зависеть от количества и величины полярных углов  $\varphi_i$ . В простейшем случае достаточно заданий двух полярных углов  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2$ ). Рассмотрим этот случай более подробно.

**2. Двухлучевая схема.** В рассматриваемом случае каждая точка  $\mathbf{r} = (x, z)$  исследуемой области пространства зондируется с двух направлений  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$ , характеризуемых зенитными углами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  при двух положениях лидара  $\mathbf{r}_i^* = \mathbf{r} - \rho\mathbf{n}_i$  ( $i = 1, 2$ ). Соответствующая система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial L(x, z)}{\partial x} \sin \varphi_i + \frac{\partial L(x, z)}{\partial z} \cos \varphi_i - 2\alpha(x, z) = \frac{\partial G_i}{\partial \mathbf{n}_i}, \quad (4)$$

где  $G_i = G(\mathbf{r}_i^*, \rho, \mathbf{n}_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

Исключая из системы уравнений (4) неизвестную функцию  $\alpha(x, z)$ , можно получить уравнение в частных производных относительно функции  $L(x, z)$

$$a \frac{\partial L(x, z)}{\partial x} + b \frac{\partial L(x, z)}{\partial z} = f(x, z) \quad (5)$$

с правой частью

$$f(x, z) = \frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}_1} - \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}_2} \quad (6)$$

и коэффициентами

$$a = \sin \varphi_1 - \sin \varphi_2; \quad b = \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2. \quad (7)$$

Для получения единственного решения уравнения (5), его необходимо дополнить краевыми условиями. Наиболее естественным будет задание функции  $L(x, z)$  на верхней границе зондируемой области ( $z = 0$ ):

$$L(x, z=0) = L_0(x). \quad (8)$$

При этом функцию  $L_0(x)$  легко определить экспериментально, поскольку она однозначно связана с величиной лидарного сигнала от верхней кромки области:  $L_0 = G(\mathbf{r}^*, 0, \mathbf{n})$ . Решение уравнения (5) методом характеристик при граничном условии (8) имеет вид

$$L(x, z) = L_0\left(x - \frac{a}{b}z\right) + \frac{1}{b} \int_0^z f\left(x - \frac{a}{b}\zeta, z - \zeta\right) d\zeta. \quad (9)$$

или, переходя к коэффициенту обратного рассеяния:

$$\beta(x, z) = \beta_0\left(x - \frac{a}{b}z\right) \exp\left\{\frac{1}{b} \int_0^z f\left(x - \frac{a}{b}\zeta, z - \zeta\right) d\zeta\right\}. \quad (10)$$

Формулы (9), (10) справедливы при условии  $\cos \varphi_1 \neq \cos \varphi_2$ . Подынтегральная функция  $f(x, z)$  в формулах (9), (10) определяется выражением

$$f(x, z) = \frac{\partial}{\partial x} [G_1 \sin \varphi_1 - G_2 \sin \varphi_2] + \frac{\partial}{\partial z} [G_1 \cos \varphi_1 - G_2 \cos \varphi_2], \quad (11)$$

в котором сделана замена аргументов  $x$  и  $z$  на

$$\begin{aligned} p &= x - \frac{a}{b}\zeta; \\ q &= z - \zeta, \end{aligned} \quad (12)$$

а для функций  $G_1 = G_1(x, z)$  и  $G_2 = G_2(x, z)$ , представленных в зависимости от декартовых координат  $(x, z)$ , сохранены прежние обозначения. Необходимо отметить, что частные производные функций  $G_i(p, q)$  ( $i = 1, 2$ ) связаны соотношением

$$\frac{\partial G_i}{\partial p} = -\frac{b}{a} \left( \frac{\partial G_i}{\partial \zeta} + \frac{\partial G_i}{\partial q} \right), \quad i = 1, 2. \quad (13)$$

Подставляя выражение (11) в формулу (9), с учетом соотношений (12), (13) можно показать, что

$$L(x, z) = \kappa_1 G_1(x, z) - \kappa_2 G_2(x, z) - c \int_0^z \frac{\partial \Omega(p, q)}{\partial q} d\zeta, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2}, \quad \kappa_2 = \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2}, \\ c &= \operatorname{ctg} \left( \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right) / \sin(\varphi_1 + \varphi_2), \\ \Omega(p, q) &= (G_1(p, q) - G_2(p, q)). \end{aligned}$$

Из (14) следует окончательное выражение для решения задачи томографического зондирования атмосферы по двухлучевой схеме относительно коэффициента рассеяния назад

$$\beta(x, z) = \frac{S_1^{\kappa_1}(x, z)}{S_2^{\kappa_2}(x, z)} \exp \left\{ -c \int_0^z \frac{\partial \Omega(p, q)}{\partial q} d\zeta \right\}. \quad (15)$$

Подставляя функцию  $\beta(x, z)$  (15) в первое уравнение системы (4), после очевидных преобразований можно получить решение для коэффициента ослабления

$$\alpha(x, z) = \left\{ \nu \frac{\partial \Omega(x, z)}{\partial x} + \eta \frac{\partial \Omega(x, z)}{\partial z} + \tau(x, z) \right\} / 2, \quad (16)$$

где

$$\nu = \frac{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2}{\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2}, \quad \eta = \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2},$$

$$\tau(x, z) = \frac{1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{b \sin(\varphi_1 + \varphi_2)} \int_0^z \frac{\partial^2 \Omega(p, q)}{\partial p \partial q} d\zeta,$$

а функция  $\Omega(x, z) = \ln[S_1(x, z)/S_2(x, z)]$  определяется из отношения измеряемых лидарных сигналов, приходящих от точки  $\mathbf{r} = (x, z)$  с двух различных направлений  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$ .

**3. Симметричная двухлучевая схема.** Как уже отмечалось, решение (15) для  $\beta(x, z)$  получено при условии  $\cos \varphi_1 \neq \cos \varphi_2$ . Частный случай равенства  $\cos \varphi_1 = \cos \varphi_2$  требует отдельного рассмотрения. Положим  $\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi$ . При этом в левой части уравнения (5) останется одно слагаемое:

$$2 \sin \varphi \frac{\partial L}{\partial x} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} (G_1 + G_2) + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} (G_1 - G_2). \quad (17)$$

Интегрирование уравнения (17) с краевым условием  $L(x = 0, z) = L_0(z)$  дает следующее решение:

$$\beta(x, z) = \beta(0, z) \left[ \frac{S_1(x, z) S_2(x, z)}{S_1(0, z) S_2(0, z)} \right]^{1/2} \exp \left\{ \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{2} \int_0^x \frac{\partial \Omega(x', z)}{\partial z} dx' \right\}. \quad (18)$$

Коэффициент ослабления  $\alpha(x, z)$  определяется из уравнения

$$2 \cos \varphi \frac{\partial L}{\partial z} - 4\alpha = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} (G_1 + G_2) + \sin \varphi \frac{\partial \Omega}{\partial x}. \quad (19)$$

В результате, определяя частную производную  $\partial L / \partial z = \partial \ln \beta / \partial z$  из (18), находим

$$\alpha(x, z) = \frac{1}{4} \left\{ \cos \varphi \frac{dR(z)}{dz} - \sin \varphi \frac{\partial \Omega(x, z)}{\partial x} + D(x, z) \right\}, \quad (20)$$

$$D(x, z) = \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} \int_0^x \frac{\partial^2 \Omega(x', z)}{\partial z^2} dx'.$$

$$R(z) = 2L_0(z) - [G_1(0, z) + G_2(0, z)].$$

Выражения (18), (20) полностью определяют решение задачи лидарного зондирования атмосферы для симметричной томографической схемы ( $\varphi_1 = -\varphi_2$ ). Следует обратить внимание, что для восстановления решения при зондировании по симметричной схеме необходимо знать профиль коэффициента обратного рассеяния  $\beta(x, z)$  на прямой  $x = 0$ . Практическая ситуация для таких условий может реализоваться в случае, когда исследуемая область аномальной замутненности атмосферы, образованная, например, вследствие промышленного выброса загрязняющего атмосферу аэрозоля, либо газа, расположена правее оси  $Z$ , так что оптическое состояние атмосферы вне этой области может быть описано некоторой стандартной моделью.

**4. Трехлучевая схема.** В трехлучевой схеме зондирования каждая точка исследуемой области пространства зондируется с трех направлений  $\mathbf{n}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), определяемых полярными углами  $\varphi_i$

( $i = 1, 2, 3$ ). Обратная задача описывается тремя уравнениями в частных производных вида (4), которые можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений

$$Ay = g \quad (21)$$

относительно неизвестных

$$y_1 = \partial L(x, z) / \partial x, \quad y_2 = \partial L(x, z) / \partial z, \quad y_3 = \alpha(x, z) \quad (22)$$

с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & -2 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & -2 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & -2 \end{pmatrix} \quad (23)$$

и вектором правой части

$$g = (\partial G_1 / \partial \mathbf{n}_1, \partial G_2 / \partial \mathbf{n}_2, \partial G_3 / \partial \mathbf{n}_3)'. \quad (24)$$

Обращая алгебраическую систему уравнений (21), можно определить коэффициент ослабления  $\alpha(x, z)$  и логарифмические частные производные от коэффициента рассеяния назад  $\beta(x, z)$ . Наиболее простой вид полученные решения имеют для симметричной схемы зондирования, в которой векторы  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  ориентированы симметрично относительно вектора  $\mathbf{n}_3$ , направленного в надир (см. рисунок). При этом полярные углы задаются следующим образом:  $\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi$ ,  $\varphi_3 = 0$ . Легко показать, что в этих условиях коэффициент ослабления определяется формулой

$$\alpha(x, z) = \frac{1}{4(1 - \cos \varphi)} \left[ 2 \cos \varphi \frac{\partial G_3}{\partial \mathbf{n}_3} - \left( \frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}_1} + \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}_2} \right) \right]. \quad (25)$$

Как видно из выражения (25), при зондировании по трехлучевой симметричной схеме коэффициент ослабления  $\alpha(x, z)$  определяется линейной комбинацией логарифмических производных лидарных сигналов по направлениям зондирования.

Подставляя полученное выражение для  $\alpha(x, z)$  (25) в третье уравнение системы (21), которое при  $\varphi = 0$  содержит только одну частную производную  $\partial L / \partial z$ , получим после интегрирования следующее решение для коэффициента обратного рассеяния:

$$\beta(x, z) = \left[ \frac{S_3(x, z)^2}{S_1(x, z) S_2(x, z)} \right]^\kappa (S_1(x, z) S_2(x, z))^{1/2} T(x, z), \quad (26)$$

$$T(x, z) = \exp \left\{ -\kappa \sin \varphi \int_0^z \frac{\partial \Omega(x, z')}{\partial x} dz' \right\},$$

где  $\kappa = 1/4 \sin^2(\varphi/2)$ . Из сравнения решений задачи томографического зондирования для симметричных двух- (18), (20) и трехлучевых (25), (26) схем видно, что за счет введения дополнительного канала зондирования в направлении  $\mathbf{n}_3$  существенно упрощается процедура обработки лидарных сигналов при восстановлении пространственного распределения коэффициента ослабления  $\alpha(x, z)$ . Понятно, что это достигается за счет усложнения схемы эксперимента. Решения для коэффициента обратного рассеяния  $\beta(x, z)$  в обоих случаях имеют сходную структуру.

Анализ полученных результатов показывает, что важным этапом при построении решений является вычисление логарифмических производных от лидарных сигналов по различным направлениям. Поскольку логарифмическая производная функции не меняется при умножении ее на константу, то применительно к обработке лидарных сигналов для восстановления коэффициента ослабления данная процедура не требует их абсолютной калибровки. Кроме того, дифференцирование экспериментально измеренных функций является некорректно поставленной задачей [7] вследствие присутствия ошибок в измерениях. Поэтому при разработке практических методов интерпретации лидарных сигналов на основании полученных формул требуется использование регуляризирующих алгоритмов численного дифференцирования, обеспечивающих устойчивость вычисления производных.

**5. Заключение.** В работе сформулированы обратные задачи лидарного томографического зондирования атмосферы с борта самолета и получены аналитические решения для двух- и трехлучевых

схем. В отличие от традиционных задач лазерного зондирования методика восстановления двумерного пространственного распределения коэффициентов обратного рассеяния и ослабления не требует привлечения дополнительной априорной информации о функциональной взаимосвязи между оптическими характеристиками атмосферы, либо об их пространственной структуре. Поэтому применение методов лидарного зондирования с борта самолета по томографической схеме целесообразно прежде всего для оптически плотных сред с высокой неопределенностью и изменчивостью лидарного отношения. Примерами таких сред могут служить области повышенной концентрации аэрозолей и поглощающих газов, образующихся в результате выбросов промышленных предприятий, пожаров, вулканической деятельности. Дальнейшие исследования должны быть направлены на разработку вычислительных алгоритмов решения обратных задач лидарного томографического зондирования на основе полученных в работе аналитических решений с учетом дискретного характера реальной измерительной информации. Наконец, на основе разработанных алгоритмов методами математического моделирования необходимо оценить пространственное разрешение и точностные характеристики решения обратных задач, выработать рекомендаций по оптимальному выбору полярных углов зондирования для различных оптических состояний атмосферы.

1. McElroy J.L., Smith T.B. // *Atmos. Environ.* 1986. V. 20. P. 1555.
2. Spinhirne J.D., Bufton J.L., Cavanaugh J.F., Chudamani S. // 15 International laser radar conference. (Abstracts of paper. Part 1). July. 23–27. 1970. Tomsk. USSR. P. 34.
3. Pelon J., Flamant P., Meissonnier M. // 15 International laser radar conference. (Abstracts of paper. Part 1). July. 23–27. 1990. Tomsk. USSR. P. 36.
4. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям: Основы реконструктивной томографии. М.: Мир, 1983. 325 с.
5. Weinman J.A. // *Appl. Opt.* 1984. V. 23. № 21. P. 3882.
6. Веретенников В.В. // *Оптика атмосферы.* 1989. Т. 2. № 8. С. 851.
7. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 286 с.

Институт оптики атмосферы СО АН СССР,  
Томск

Поступила в редакцию  
7 марта 1991 г.

V.V. Veretennikov. **Solution of the Lidar Equations in the Case of Tomographic Scheme of Sensing.**

The problem of restoration of two-dimensional distributions of the extinction and backscattering coefficients from the data of airborne lidar sensing of the atmosphere made using tomographic scheme is considered. Solutions of integral equations of tomographic lidar sensing for the dual beam and triple beam scheme have been obtained in analytical form. It is shown that in this case there is no need for a priori information on the relationship between the extinction and backscattering coefficients to restore the fields of these parameters. The solutions obtained in this paper made the basis for making new calculational algorithms for laser tomographic sensing of the atmosphere.