

В.Ф. Рапуга, А.И. Крылова

**ОПТИМИЗАЦИЯ УСЛОВИЙ НАБЛЮДЕНИЙ В ЗАДАЧЕ  
ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПРИЗЕМНОГО СЛОЯ АТМОСФЕРЫ**

Рассмотрена задача определения параметров приземного слоя атмосферы по данным градиентных наблюдений скорости ветра и температуры воздуха. Предложен численный метод анализа данных измерений и планирования эксперимента. Для температурно-стратифицированного приземного слоя проведено численное моделирование оптимальных уровней размещения градиентных наблюдений.

При определении характеристик турбулентного режима в приземном слое атмосферы: скорости трения  $u_*$ , вертикальных турбулентных потоков тепла  $\overline{w'T'}$  и влаги  $\overline{w'q'}$ , косвенными методами, например, по данным градиентных наблюдений, возникают погрешности, связанные с ошибками измерения средних значений метеорологических элементов. Используя модели, соответствующие физическим условиям наблюдения, для аппроксимации измеренных профилей скорости ветра и температуры, на основе метода наименьших квадратов (МНК) можно сформулировать различные критерии точности оценок параметров приземного слоя:  $u_*$ , масштаба температуры  $T_*$ , масштаба длины Монино–Обухова  $L$ . Поскольку измеряются величины различной физической природы, то возникает задача многокритериального оценивания параметров. В этом случае методики расчета оценок искомых параметров могут использовать для нахождения  $u_*$  только измерения скорости ветра, а для определения  $T_*$  только градиентные измерения температуры [1, 2]. В методе, представленном в данной работе, для оценки  $u_*$ ,  $T_*$ ,  $L$  используется единый компромиссный критерий, учитывающий в качестве весовых множителей дисперсии ошибок измерений скорости ветра и температуры [3].

С целью уменьшения влияния случайных ошибок измерения этих величин на качество оцениваемых параметров рассматривается вопрос выбора оптимального плана размещения градиентных наблюдений. Постановка задачи построения экспериментального плана формулируется, согласно [4], для случая одновременного измерения нескольких величин на одних и тех же уровнях.

**1. Постановка задачи оценивания параметров приземного слоя**

Рассмотрим стационарный, однородный по горизонтали стратифицированный приземный слой атмосферы. Тогда согласно теории подобия профили средних значений скорости ветра, потенциальной температуры, удельной влажности могут быть представлены в следующем виде [5–7]:

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{u_*}{\kappa} \left[ f_u \left( \frac{z}{L} \right) - f_u \left( \frac{z_0}{L} \right) \right]; \\ T(z) &= T_0 + T_* \left[ f_T \left( \frac{z}{L} \right) - f_T \left( \frac{z_0}{L} \right) \right]; \\ q(z) &= q_0 + q_* \left[ f_q \left( \frac{z}{L} \right) - f_q \left( \frac{z_0}{L} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $u$  – горизонтальная составляющая скорости ветра;  $T$  – потенциальная температура;  $q$  – удельная влажность;  $\kappa$  – постоянная Кармана;  $q_*$  – масштаб для измерения удельной влажно-

сти;  $f_u, f_T, f_q$  – непрерывные универсальные функции;  $z_0$  – высота шероховатости подстилающей поверхности. Масштаб длины Монино–Обухова  $L$  определяется формулой

$$L = u_*^2 / (\kappa^2 \lambda T_*), \quad (2)$$

где  $\lambda$  – параметр плавучести.

В дальнейшем, без ограничения общности, будем рассматривать задачу определения динамических и тепловых потоков. Пусть для определения неизвестного вектора параметров  $\theta = (u_*, T_*, L, T_0, z_0)^T$  имеются измерения скорости ветра и температуры на  $N$  уровнях:

$$y_i = u(z_i, \theta) + \xi_1^{(i)}, \quad T_i = T(z_i, \theta) + \xi_2^{(i)}, \quad z_i \in [\hat{z}, h], \quad (3)$$

$$E[\xi_j^{(i)}] = 0, \quad E[\xi_j^{(i)} \xi_j^{(i_1)}] = \delta_{ii_1} \sigma_j^2, \quad i, i_1 = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, 2},$$

где  $E$  – операция математического ожидания;  $\delta$  – символ Кронекера;  $\hat{z}$  – нижний уровень измерений;  $h$  – верхняя граница измерений.

Оценка вектора параметров  $\theta$  определяется из условия минимума квадратичного функционала

$$I(\theta) = \sum_{i=1}^N [\sigma_1^{-2} [u_i - u(\hat{z}) - u(z_i, \theta) + u(\hat{z}, \theta)]^2 + \sigma_2^{-2} [T_i - T(\hat{z}) - T(z_i, \theta) + T(\hat{z}, \theta)]^2], \quad (4)$$

где весовые множители  $\sigma_1, \sigma_2$  являются среднеквадратическими ошибками измерения соответственно скорости ветра и температуры.

Для нахождения минимума функции (4) перепишем соотношения (1) в следующем виде:

$$u(z) = \omega_1 f_u\left(\frac{z}{L}\right) + \omega_2, \quad T(z) = \omega_3 f_T\left(\frac{z}{L}\right) + \omega_4; \\ \omega_1 = \frac{u_*}{\kappa}, \quad \omega_2 = -\frac{u_*}{\kappa} f_u\left(\frac{z_0}{L}\right), \quad \omega_3 = T_*, \quad \omega_4 = T_0 - T_* f_T\left(\frac{z_0}{L}\right). \quad (5)$$

Используя линейность функций (5) относительно  $\omega_i, i = \overline{1, 4}$ , и учитывая необходимые условия минимума функционала (4), несложно получить явное представление коэффициентов  $\omega_i$  при фиксированном значении  $L$ . Подставив найденные выражения для  $u_*(L)$  и  $T_*(L)$  в соотношение (2), находим из полученного уравнения  $L$  методом деления пополам. Затем по известному значению  $L$  вычисляются остальные параметры.

## 2. Планирование градиентных наблюдений

Рассмотрим задачу оптимального размещения градиентных измерений скорости ветра и температуры, т.е. построение экспериментальных планов согласно некоторому критерию оптимальности. В качестве последнего используем критерий  $D$ -оптимальности, т.к.  $D$ -оптимальный план минимизирует значение определителя соответствующей ему ковариационной матрицы оценок искомых параметров и в силу теоремы эквивалентности [4] оказывается одновременно  $G$ -оптимальным, т.е. минимизирует максимальную дисперсию значения функции отклика.

В силу нелинейной зависимости регрессионных функций (1) от  $\theta$  априорное построение оптимального плана, вообще говоря, невозможно. Наиболее удобным является использование последовательной процедуры анализа и планирования наблюдений для случая одновременного измерения нескольких величин [4]. Такая постановка задачи планирования целесообразна для стационарных процессов на достаточно большом временном интервале.

Построение локально  $D$ -оптимальных планов осуществляется согласно итерационной процедуре.

1. Выбирается произвольный начальный план  $\varepsilon_0$  из условия невырожденности информационной матрицы

$$|M(\varepsilon_0, \theta)| = \left| \sum_{i=1}^{N_0} F(z_i, \theta) F^T(z_i, \theta) \right| \neq 0,$$

где

$$F(z_i, \theta) = \|\mathbf{f}_1(z_i, \theta), \mathbf{f}_2(z_i, \theta)\|,$$

$$\mathbf{f}_1^T = \left( \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial u}{\partial u_*}, \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial u}{\partial L} \right), \mathbf{f}_2^T = \left( \frac{1}{\sigma_2} \frac{\partial T}{\partial u_*}, \frac{1}{\sigma_2} \frac{\partial T}{\partial L} \right).$$

2. Вычисляются МНК-оценка  $\hat{\theta}_0$  и матрица  $M(\varepsilon_0, \hat{\theta}_0)$ .
3. Определяется точка  $z^*$ , соответствующая

$$\max_{z \in [\hat{z}, h]} = \text{Sp } d(z, \varepsilon_0, \hat{\theta}_0),$$

где

$$d(z, \varepsilon_0, \theta) = F^T(z, \theta) M^{-1}(\varepsilon_0, \theta) F(z, \theta).$$

4. Строится план

$$\varepsilon = \varepsilon_{N_0+1} = \left( 1 - \frac{1}{N_0 + 1} \right) \varepsilon_0 + \frac{1}{N_0 + 1} \varepsilon_1(z^*),$$

согласно которому повторяются операции 2–3.

Циклическое выполнение операций 2–4 продолжается до тех пор, пока

$$|M^{-1}(\varepsilon_N, \hat{\theta}_N)| / N$$

не станет меньше некоторой заранее заданной величины.

### 3. Численные эксперименты

Рассмотрим примеры численного построения локально  $D$ -оптимальных планов при переменной верхней границе измерения и известном векторе параметров  $\theta$ , который определяет различные условия стратификации приземного слоя. Масштаб длины Мони́на–Обухова  $L$  выбирался в диапазоне значений от  $-50$  до  $-10$  и от  $10$  до  $50$ , которые характеризуют два качественно различных режима турбулентных движений. Скорость трения  $u_*$  принималась равной  $0,5$  м/с как для устойчивой, так и для неустойчивой стратификации. Тем самым подчеркивается существенная роль температурного фактора при анализе турбулентности в приземном слое. Поскольку аппроксимация профилей скорости ветра и температуры согласно формулам (1), (2) предполагает наличие начального уровня измерений  $\hat{z}$  (толщина слоя вытеснения), то при расчетах  $\hat{z}$  полагалось равным  $1$  м для неустойчивой стратификации, что соответствует, например, уровню травостоя пшеничного поля [8], а для случая устойчиво-стратифицированного приземного слоя  $\hat{z} = 0,5$  м.

После применения итерационной процедуры 1–4 были получены оптимальные планы измерений, представленные в таблице. Анализ случая неустойчивой стратификации ( $L < 0$ ) показывает, что с ростом неустойчивости турбулентного режима для определения оценок параметров предпочтительными оказываются трехточечные оптимальные планы измерений с высотами  $\hat{z} = 1$  м,  $z_1 \approx 2$  м,  $z_2 = 4$  м. Причем вес средней точки плана снижается с уменьшением параметра  $L$ . При увеличении верхней границы градиентных измерений до  $10$  м план также остается трехточечным со средним уровнем  $z_1 \approx 3$  м. При слабой неустойчивости количество точек плана может сократиться до двух в зависимости от высоты верхней границы наблюдений. Это же характерно и для слабой устойчивости. Таким образом, в условиях, приближающихся к нейтральной стратификации, определение оценок параметров достаточно проводить на двух уровнях. Для условий сильной и умеренной устойчивости полученные трехточечные оптимальные планы имеют следующий вид:  $\hat{z} = 0,5$  м,  $z_1 \approx 1$  м,  $z_2 = 2$  м.

**Локально D-оптимальные планы градиентных измерений скорости ветра и температуры**

Масштаб длины М-О $L$ , м	Динамическая скорость $u_*$ , м/с	Уровень измерения $\hat{z}$ , м	Точки плана	
			$z_1/P_1$	$z_2/P_2$
- 10	0,5	1	1,96/0,5	4/0,5
			2,62/0,45	10/0,55
- 30	0,5	1	2,14/0,29	4/0,71
			2,98/0,42	10/0,58
- 50	0,5	1	3,7/0,26	4/1
				10/0,74
- 50	0,5	0,5		2/1
- 30	0,5	0,5	1,13/0,5	2/0,5
- 10	0,5	0,5	1,07/0,5	2/0,5

Проведенное численное моделирование оптимальных планов показывает, что для оценки параметров температурно-неоднородного приземного слоя требуется несколько избыточное число уровней. Это обстоятельство, по-видимому, не является случайным, поскольку построенные оптимальные планы размещения уровней наблюдений соответствуют также рекомендациям, приведенным в работах [8, 9].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 95-05-15575).

1. Paulson C. A. // J. Appl. Meteorol. 1970. V. 9. P. 857–861.
2. Зилитинкевич С. С. Динамика пограничного слоя атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1970. 290 с.
3. Nieuwstadt F. // Boundary-Layer Meteorology. 1978. V. 14. P. 235–246.
4. Федоров В. В. Теория оптимального эксперимента. М.: Наука. 1971. 312 с.
5. Монин А. С., Обухов А. М. // Труды Геофизич. ин-та АН СССР. 1954. N 24 (151). С. 163–187.
6. Казаков А. П., Лазриев Г. Л. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1978. Т. 14. N 3. С. 257–266.
7. Businger J. A., Wyngaard J. C., Izumi Y. and Bradley E. F. // J. Atmospheric Sci. 1971. V. 28. P. 181–189.
8. Обухов А. М. Турбулентность и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1988. 413 с.
9. Матвеев Л. Т. Курс общей метеорологии. Л.: Гидрометеиздат, 1984. 752 с.

Вычислительный центр СО РАН,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
16 января 1997 г.

V. F. Raputa, A. I. Krylova. **Optimization of Observations in the Problem of Estimation of the Atmospheric Surface Layer Parameters.**

The problem of estimating the parameters of the atmospheric surface layer from the data of gradient observations of wind velocity and temperature is considered. The numerical method of analysis of the measurements and sequential design of the experiment is proposed. For the temperature-stratified surface layer the numerical calculations of optimal location of observations are carried out.