

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В АТМОСФЕРЕ И ОКЕАНЕ

УДК 530.182+535.15+53.043

Дифракционно-лучевая оптика филаментации: I. Формализм дифракционных лучей и световых трубок

Ю.Э. Гейнц, А.А. Землянов, О.В. Минина*

*Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634055, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1*

Поступила в редакцию 26.02.2018 г.

Представлена теоретическая концепция нестационарной дифракционно-лучевой оптики мощных фемтосекундных лазерных импульсов, в рамках которой мощность пучка распространяется по специфическим световым структурам — дифракционно-лучевым трубкам. Данные трубки не пересекаются в пространстве, не обмениваются энергией, но изменения их формы и сечения при распространении отражают действие физических процессов, происходящих с излучением в среде. Нестационарная теория дополняется эволюционными уравнениями для усредненных по времени дифракционных лучей и эффективных квадратов радиусов дифракционных трубок.

Ключевые слова: фемтосекундные лазерные импульсы, самофокусировка, филаментация, дифракционный луч, дифракционно-лучевая трубка; femtosecond laser pulses, self-focusing, filamentation, diffraction ray, diffraction-beam tube.

Введение

Распространение высокоинтенсивных ультракоротких лазерных импульсов в прозрачных средах характеризуется пространственно-временными модуляциями фазы и амплитуды светового поля. В оптических средах с кубичной нелинейностью (среды керровского типа) короткий световой импульс испытывает самофокусировку, в результате чего его пространственные размеры вдоль трассы резко уменьшаются, а интенсивность, наоборот, лавинообразно возрастает. Поперечный коллапс светового пучка сдерживается развитием многофотонного поглощения и образованием плазмы в среде при высоких интенсивностях поля ($> 10^{13}$ Вт/см²), а также процессами, связанными с нелинейностью высших порядков. Такое многофакторное действие приводит к образованию одного или нескольких нелинейных фокусов светового импульса. После нелинейной фокусировки (самофокусировки) формируется один или группа узких высокоинтенсивных световых каналов — филаментов. Угловая расходимость единичного канала оказывается значительно меньше, чем дифракционно-обусловленная расходимость всего пучка в линейной среде.

Высокая интенсивность света в филаментах вызывает ионизацию молекул среды и приводит к появлению сопутствующих излучению плазменных областей с характерной плотностью свободных электронов $\sim 10^{15} \div 10^{18}$ см⁻³ [1, 2], которые, в част-

ности, являются причиной свечения среды в канале пучка в видимом диапазоне длин волн [3]. Различным аспектам самофокусировки и филаментации лазерных импульсов в воздухе посвящено большое количество работ. Современное состояние проблемы филаментации лазерных импульсов представлено, например, в обзорах [1, 4, 5].

С появлением мощных фемтосекундных лазеров в практике физических исследований явление филаментации приобрело большое значение для различных областей нелинейной оптики и лазерной физики, например для фемтосекундного микроструктурирования различных сред, генерации сверхширокополосного излучения [4, 6], а также атмосферно-оптических приложений, связанных с созданием каналов проводимости в атмосфере, дистанционной диагностики окружающей среды и направленной передачи лазерной энергии [7–10].

Теоретические исследования филаментации мощных фемтосекундных лазерных импульсов в различных оптических средах при вариациях параметров излучения источника и разнообразных конфигурациях оптической трассы представлены во множестве работ. Для физической интерпретации филаментации лазерных импульсов и построения качественной картины этого явления был создан ряд теоретических моделей на основе численных исследований уравнений процесса и экспериментальных данных. Наиболее известны физические модели, в которых филамент представляется как: самонаведенный рефракционный волновод в среде [11, 12]; последовательность нелинейных движущихся (динамических) фокусов [13, 14]; пространственный оптический «солитон» [15], динамически

* Юрий Эльмарович Гейнц (ygeints@iao.ru); Александр Анатольевич Землянов (zaa@iao.ru); Ольга Владимировна Минина (mov@iao.ru).

восполняющей свою энергию области поля за счет окружающего ее «энергетического резервуара» периферийных зон пучка [6, 16]. Каждая физическая модель изначально опиралась на определенный набор экспериментальной информации и поэтому хорошо описывает какие-либо частные аспекты исследуемого процесса.

Как правило, экспериментальные исследования физики филаментации ведутся на основе анализа характеристик регистрируемых величин, таких как плотность энергии светового поля, электропроводность канала филамента, спектральная плотность энергии свечения лазерной плазмы, акустический отклик среды. По этой причине все вышеперечисленные теоретические модели филаментации используют представление результатов также в виде энергетических величин, которые связаны с интенсивностью поля. Вместе с тем фаза оптической волны является не менее информативной характеристикой, чем ее амплитуда, поскольку она также испытывает пространственную и временную модуляции в нелинейной среде. Кроме того, именно локальный наклон фазового фронта задает направление вектора Умова–Пойнтинга в различных областях лазерного пучка [17].

Примером применения амплитудно-фазового анализа к проблеме самовоздействия лазерного излучения служит методика построения лучевых эволюционных картин [17–21] для различных пространственных частей лазерного пучка. Эти картины представляют собой семейства геометрооптических или дифракционных лучей (ДЛ) [22], траектории которых подчиняются эволюционным законам, следующим из волнового уравнения распространения импульса [23]. Каждый ДЛ является пространственной траекторией, касательная к которой совпадает с направлением нормированного на интенсивность волны вектора Умова–Пойнтинга. Множество близкорасположенных дифракционных лучей образуют локализованную световую структуру, известную как дифракционно-лучевая трубка (ДЛТ) [24].

В отличие от бесконечно тонкого луча ДЛТ характеризуется конечным сечением и переносит определенное количество мощности излучения. Ее основополагающим свойством является постоянство мощности, протекающей через любое ее сечение, если в среде нет источников и стоков энергии. Таким образом, смысл использования методологии ДЛТ заключается в том, что профиль световой мощности в среде может быть представлен состоящим из отдельных частей, каждая из которых переносится лучевой трубкой. В фотометрии такое представление является мощным инструментом при анализе пространственного распределения освещенности при сложной конфигурации сцены [25]. В оптике фемтосекундных импульсов дифракционно-лучевой анализ был успешно применен для изучения закономерностей филаментации унимодальных пучков различного профиля [21, 22, 26], а также эволюции излучения на постфиламентационной стадии распространения [27].

В настоящей работе представлено дальнейшее теоретическое развитие концепции светового поля как упорядоченного множества пространственно-локализованных волновых структур, энергетически независимых друг от друга и одновременно находящихся в тесном дифракционном (полевом) взаимодействии через фазовый фронт волны. В качестве инструмента визуализации этих световых структур и интерпретации информации, содержащейся в фазе оптического импульса, предлагается математический аппарат дифракционно-лучевых трубок. Классическое определение ДЛТ для стационарного светового поля расширено на случай нестационарного распространения волнового пакета в нелинейно-диссипативной среде с частотной дисперсией.

1. Основные соотношения дифракционно-лучевой модели распространения импульса

Для получения уравнений дифракционно-лучевой оптики используем параболическое уравнение для медленно меняющейся комплексной амплитуды электрического поля $U(x, y, z; t)$ световой волны, связанной с его напряженностью $E(x, y, z; t)$ соотношением

$$E(x, y, z; t) = U(x, y, z; t) \exp(i\omega_0 t - ik_0 z).$$

Здесь x, y – координаты поперечного вектора \mathbf{r}_\perp ; z – продольная координата; t – время; $\omega_0, k_0 = n_0 \omega_0 / c$ – центральные частота и волновое число лазерного излучения, $n_0 = \sqrt{\epsilon_0}$ – показатель преломления невозмущенной среды, ϵ_0 – ее диэлектрическая проницаемость, c – скорость света в вакууме. В системе координат, движущейся с групповой скоростью импульса $v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{\omega_0}$, уравнение

для $U(x, y, z; t)$ имеет вид

$$\frac{\partial U(\mathbf{r}_\perp, z; t)}{\partial z} = \frac{i}{2k_0} \nabla_\perp^2 U - i \frac{k_\omega''}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{ik_0}{2\epsilon_0} \epsilon_N(\mathbf{r}_\perp, z; t) U - \frac{1}{2} \alpha_N(\mathbf{r}_\perp, z; t) U. \quad (1)$$

В (1) использована замена переменной $t \rightarrow t - z/v_g$. Другие обозначения имеют следующий смысл: $k = n_0 \omega / c$ – волновое число на частоте ω ;

$k_\omega'' = \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right)_{\omega_0}$ – коэффициент дисперсии групповой

скорости (ДГС); $\nabla_\perp^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – поперечный лапласиан. Нелинейная добавка ϵ_N к невозмущенной диэлектрической проницаемости среды ϵ_0 учитывает кубическую оптическую нелинейность ($j = 2$) (самофокусировка) и нелинейность более высоких порядков ($j > 2$):

$$\varepsilon_N = 2 \sum_{j=2}^J n_j(t) |U|^{2(j-1)} - \frac{\sigma_c \omega_0 \tau_c}{k_0} \rho_e. \quad (2a)$$

Нелинейный коэффициент поглощения α_N возникает за счет многофотонного поглощения излучения:

$$\alpha_N = \alpha_0 + \sigma_c \rho_e + \frac{W_I \Delta E_i}{I} (\rho_{nt} - \rho_e). \quad (2б)$$

В (2a) последнее слагаемое характеризует плазменную нелинейность, выражающуюся в рефракции волны. В (2a), (2б) σ_c и ΔE_i – сечение каскадной ионизации и потенциал ионизации молекулы соответственно; τ_c – характерное время столкновения свободных электронов с тяжелыми частицами; W_I – скорость (вероятность) фотоионизации среды; $I = \frac{c\sqrt{\varepsilon_0}}{8\pi} |U|^2$ – интенсивность излучения; ρ_{nt} – плотность нейтральных атомов (молекул); ρ_e – концентрация свободных электронов в канале пучка (плотность плазмы).

Перейдем от комплексного поля $U(\mathbf{r}_1, z, t)$ к его амплитудно-фазовому представлению, введя действительные амплитуду $A(\mathbf{r}_1, z, t)$ и фазу $\varphi(\mathbf{r}_1, z, t)$ волны: $U = Ae^{i\varphi}$. После подстановки этого выражения в (1) и разделения действительной и мнимой частей получим уравнения для амплитуды и фазы волны:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial z} = & -\frac{1}{2k_0} \left[A \nabla_{\perp}^2 \varphi + 2(\nabla_{\perp} \varphi)(\nabla_{\perp} A) \right] + \\ & + k_{\omega}'' \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2} A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] - \frac{\alpha_N}{2} A; \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\frac{2}{k_0} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{k_0^2} (\nabla_{\perp} \varphi)^2 - \frac{k_{\omega}''}{k_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 = \frac{\varepsilon_N}{\varepsilon_0} + \frac{\nabla_{\perp}^2 A}{k_0^2 A} - \frac{k_{\omega}''}{k_0 A} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}. \quad (3б)$$

1.1. Дифракционные лучи

Рассмотрим уравнение (3б) для фазы волны. Введем для правой части этого уравнения ряд обозначений: $\varepsilon_d = \frac{\varepsilon_0 \nabla_{\perp}^2 A}{k_0^2 A}$ – дифракционная, $\varepsilon_{dis} = -\frac{\varepsilon_0 k_{\omega}''}{k_0 A} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$ – дисперсионная составляющие эффективной диэлектрической проницаемости среды. Правая часть (3б) характеризует возмущение эффективной диэлектрической проницаемости среды ε_{ef} , нормированной на ее невозмущенное значение ε_0 : $\tilde{\varepsilon}_{ef} = \varepsilon_{ef} / \varepsilon_0 - 1$. Величина $\varepsilon_{ef} = \varepsilon_0 + \varepsilon_N + \varepsilon_d + \varepsilon_{dis}$, помимо невозмущенной диэлектрической постоянной ε_0 , содержит еще и полевую составляющую, возникающую вследствие нелинейности среды, дифракции и дисперсии волнового пакета.

Применим операцию поперечного градиента (∇_{\perp}) к левой и правой частям уравнения (3б). Вве-

дем вектор $\mathbf{s}_{\perp} = 1/k_0 (\nabla_{\perp} \varphi)$, который указывает направление потока плотности энергии, нормированной на интенсивность волны, через боковую поверхность единичного объема среды. В другой формулировке этот вектор представляет собой нормированную поперечную составляющую вектора Умова–Пойнтинга \mathbf{S}_{\perp} [17]: $\mathbf{s}_{\perp} = \mathbf{S}_{\perp} / I$. В результате для вектора \mathbf{s}_{\perp} получим уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{s}_{\perp}}{\partial z} + \mathbf{s}_{\perp} \operatorname{div}(\mathbf{s}_{\perp}) - k_{\omega}'' \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{s}_{\perp}}{\partial t} = \frac{1}{2} \nabla_{\perp} \tilde{\varepsilon}_{ef}. \quad (4)$$

Запишем систему характеристических дифференциальных уравнений для переменных $\mathbf{R}_d, z, \tau_{dis}$ на основе (4):

$$\frac{dz}{dz'} = 1, \quad \frac{d\mathbf{R}_d}{dz'} = \mathbf{s}_{\perp}, \quad \frac{d\tau_{dis}}{dz'} = -k_{\omega}'' \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \frac{d\mathbf{s}_{\perp}}{dz'} = \frac{1}{2} \nabla_{\perp} \tilde{\varepsilon}_{ef}. \quad (5)$$

Уравнение

$$\frac{d\mathbf{R}_d}{dz} = \mathbf{s}_{\perp} = \frac{\nabla_{\perp} \varphi(\mathbf{R}_d, z; \tau_{dis})}{k_0} \quad (6a)$$

является уравнением дифракционного луча;

$$\frac{d\tau_{dis}}{dz} = -k_{\omega}'' \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{R}_d, z; \tau_{dis}), \quad (6б)$$

– уравнением «временного» луча (ВЛ). Траектории ДЛ находятся по известному профилю фазы волны $\varphi(\mathbf{r}_1, z, t)$ путем совместного решения системы (6a), (6б) и показывают направление тока плотности лучевой мощности (вектора \mathbf{s}_{\perp}) внутри пучка (по поперечной координате) вдоль дистанции распространения импульса. Локальный наклон ДЛ в каждой точке трассы вычисляется в общем случае в различные моменты времени τ_{dis} , которые изменяются в соответствии с частотным свипингом (фазовая модуляция), возникающим за счет ДГС.

Используя соотношения (5), можно также записать уравнение ДЛ через возмущение эффективной диэлектрической проницаемости среды $\tilde{\varepsilon}_{ef}$:

$$\frac{d^2 \mathbf{R}_d}{dz^2} = \frac{1}{2} \nabla_{\perp} \tilde{\varepsilon}_{ef}(\mathbf{R}_d, z; \tau_{dis}). \quad (6в)$$

Уравнение (6в) указывает на то, что ДЛ стремятся к оптической оси, когда $\nabla_{\perp} \tilde{\varepsilon}_{ef} < 0$ (кривизна луча отрицательна), и в противоположную сторону, если $\nabla_{\perp} \tilde{\varepsilon}_{ef} > 0$. Следовательно, области среды распространения с отрицательными значениями градиента эффективной диэлектрической проницаемости можно считать зонами фокусировки ДЛ, а области с $\nabla_{\perp} \tilde{\varepsilon}_{ef} > 0$ – зонами дефокусировки.

В бездисперсионной среде ($k_{\omega}'' = 0$) ВЛ представляют собой прямолинейные траектории в координатах (t, z) , идущие параллельно оси распространения импульса. Если среда имеет частотную дисперсию, то даже при линейном распространении импульса у ВЛ появляется наклон к продольной

оси распространения на угол, задаваемый уравнением (6б). В зависимости от знака дисперсионного коэффициента k''_0 импульс будет расплываться ($k''_0 > 0$) или же фокусироваться во времени ($k''_0 < 0$).

1.2. Уравнения эволюции интенсивности, мощности, энергии и плотности энергии в лазерном пучке. Дифракционно-лучевые трубки

Запишем уравнение на основе характеристик для интенсивности импульса. Для этого умножим обе части (3а) на коэффициент $2A$. В результате для интенсивности поля I получим:

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -\frac{I\nabla_{\perp}^2\varphi}{k_0} - \frac{\nabla_{\perp}\varphi}{k_0}\nabla_{\perp}I + k''_0\frac{\partial}{\partial t}\left(I\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) - \alpha_N I. \quad (7a)$$

Если учесть, что $\frac{\nabla\varphi}{k_0} = \mathbf{s}_{\perp}$ и ввести в рассмотрение

функцию источника $S_t = k''_0 I \frac{\partial\varphi}{\partial t}$, характеризующую изменение вдоль дистанции плотности потока энергии, запасенной за счет дисперсии в предыдущих временных слоях импульса, выражение (7а) может быть представлено в следующих вариантах:

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -\nabla_{\perp}\mathbf{s}_{\perp}I - \mathbf{s}_{\perp}\nabla_{\perp}I + \frac{\partial S_t}{\partial t} - \alpha_N I \quad (7б)$$

или

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -\nabla_{\perp}\mathbf{s}_{\perp}I - \mathbf{s}_{\perp}\nabla_{\perp}I + k''_0\frac{\partial I}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + k''_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}I - \alpha_N I. \quad (7в)$$

На характеристиках \mathbf{R}_d , \mathbf{s}_{\perp} , τ_{dis} уравнение для интенсивности волны будет иметь вид

$$\frac{dI}{dz} = -\nabla_{\perp}\mathbf{s}_{\perp}I + k''_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}I - \alpha_N I. \quad (8)$$

Уравнение (8) указывает на то, что изменение интенсивности в точке оптической трассы в момент времени t определяется не только потерями на поглощение в среде и потоком энергии из соседних пространственных областей пучка, но также и энергообменом, происходящим между текущим и предшествующим временными слоями светового импульса.

Формально можно записать решение уравнения (8) в виде

$$I(\mathbf{R}_d, z, t) = I(\mathbf{R}_d(0), z, \tau_{dis}(0)) \times \exp\left\{-\int_0^z \left[\operatorname{div}[\mathbf{s}_{\perp}(\mathbf{R}_d(z'), z', \tau_{dis}(z'))] - k''_0 \frac{\partial^2\varphi(\mathbf{R}_d(z'), z', \tau_{dis}(z'))}{\partial t^2} + \alpha_N(\mathbf{R}_d(z'), z', \tau_{dis}(z')) \right] dz'\right\}. \quad (8a)$$

Из (8а) следует, что условие стабильно высокой интенсивности при филаментации задается неравенством

$$D = \int_0^z \left[\operatorname{div}(\mathbf{s}_{\perp}) - k''_0 \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \alpha_N \right] dz' < 0.$$

Если рассмотреть стационарный случай в не-дисперсионной среде с кубической фокусирующей нелинейностью, то условие бездифракционного распространения световой волны будет следующим: $\operatorname{div}(\mathbf{s}_{\perp}) = 0$, или $\mathbf{s}_{\perp} = \text{const}$. Это эквивалентно равенствам $\nabla_{\perp}\tilde{\epsilon}_{ef} = 0$, $\tilde{\epsilon}_{ef} = \text{const}$. Записывая $\tilde{\epsilon}_{ef}$ для цилиндрической симметрии, получим известное уравнение для амплитуды таунсовой моды [1].

Особый интерес в теории самофокусировки представляет мощность излучения, поскольку именно она определяет всю динамику филаментации импульса. Уравнение для мощности

$$P(z; t) = \int_{\sigma} I d\mathbf{r}_{\perp},$$

протекающей через некоторую выделенную площадку σ в поперечном сечении лазерного пучка, получим в рамках осевой симметрии задачи. Рассмотрим два важных случая: 1) сечение с некоторым постоянным радиусом r_c является частью цилиндрического объема, расположенного вдоль оптической оси пучка, 2) сечение представляет собой сечение ДЛТ, т.е. осесимметричного объема, ограниченного ДЛТ с переменным радиусом $R_d(\mathbf{r}_{\perp}, z; t)$. Во втором случае площадь рассматриваемого сечения также переменная вдоль направления распространения, поскольку граница ДЛТ варьирует в пространстве-времени.

Интегрируя уравнение (8) по круговой площадке с постоянным радиусом r_c , получим

$$\frac{\partial P_c}{\partial z} + 2\pi \int_0^{r_c} \operatorname{div}(\mathbf{S}_{\perp}) r dr = 2\pi \int_0^{r_c} \frac{\partial S_t}{\partial t} r dr - \langle \alpha_N \rangle_{\sigma} P_c.$$

Здесь

$$P_c = 2\pi \int_0^{r_c} I r dr = \int_0^{r_c} I d\mathbf{r}_{\perp}$$

— мощность излучения в сечении цилиндра;

$$\langle \alpha_N \rangle_{\sigma} = \frac{2\pi}{P_c} \int_0^{r_c} \alpha_N I r dr$$

— усредненный по σ коэффициент поглощения. Учтем, что для цилиндрической симметрии, согласно формуле Остроградского—Гаусса,

$$\int_0^{r_c} \operatorname{div}(\mathbf{S}_{\perp}) r dr = r_c (\mathbf{r}_{\perp} \mathbf{S}_{\perp}(r_c)) = r_c \mathbf{S}_{\perp}(r_c).$$

Тогда изменение мощности P_c внутри цилиндрического объема постоянного сечения задается уравнением

$$\frac{\partial P_c}{\partial z} = -2\pi r_c S_{\perp}(r_c) + \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^{r_c} S_t dr_{\perp} \right] - \langle \alpha_N \rangle_{\sigma} P_c. \quad (9)$$

Теперь рассмотрим лучевую трубку. Поскольку ее радиус изменяется по трассе, дифференцирование в левой части (8) необходимо также проводить и по пределу интегрирования (формула Лейбница). С учетом уравнения (6а) для произвольного сечения ДЛТ имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \left[\int_0^{R_d(z)} I(z) r dr \right] = \\ & = \left(\frac{dR_d}{dz} \right) R_d I(R_d) + \int_0^{R_d(z)} \frac{\partial I}{\partial z} r dr = S_{\perp} R_d + \frac{\partial P_d}{\partial z}. \end{aligned}$$

Подставляя это соотношение в уравнение (8), получим закон сохранения мощности P_d в ДЛТ:

$$\frac{\partial P_d}{\partial z} = \left[\int_0^{R_d(z,t)} \frac{\partial}{\partial t} S_t dr_{\perp} \right] - \langle \alpha_N \rangle_{\sigma} P_d. \quad (10)$$

В отличие от цилиндра постоянного сечения в уравнении (10) отсутствует поток световой энергии через боковую поверхность трубки (слагаемое с S_{\perp}). Другими словами, соседние ДЛТ не обмениваются энергией, а изменение мощности в трубке может происходить только вследствие потерь на создание плазмы и перераспределения энергии внутри импульса. Это означает, что мощность внутри ДЛТ в рассматриваемый момент времени, несмотря на потери, может восполняться за счет притока энергии из предшествующих временных слоев импульса. По такому сценарию в трубке может восстанавливаться (или устанавливаться) мгновенный баланс сил фокусирующей и дефокусирующей нелинейностей, поддерживая (или инициируя) филаментацию.

Нетрудно показать, что как (9), так и (10) после интегрирования по времени приводят к одной и той же форме закона сохранения полной энергии световой волны W в любом выделенном сечении среды σ :

$$\frac{\partial W}{\partial z} = - \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_N I d\mathbf{r}_{\perp} dt. \quad (11)$$

Интегрируя (7б) по времени (в бесконечных пределах) и учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial S_t}{\partial t} dt \propto \left(I \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{\infty} - \left(I \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{-\infty} = 0,$$

получим закон сохранения плотности энергии световой волны $w(\mathbf{r}_{\perp}, z) = \int_{-\infty}^{\infty} I dt$ (аналог теоремы Умова–Пойнтинга для электромагнитного поля):

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \text{div}(\mathbf{S}_w) = - \langle \alpha_N \rangle_t w. \quad (12)$$

Здесь введены интегральные переменные, имеющие смысл вектора поперечного энергообмена

$$\mathbf{S}_w = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}_{\perp} dt$$

$$\text{и среднего по времени коэффициента поглощения } \langle \alpha_N \rangle_t = w^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_N I dt.$$

Рассматривая уравнение для плотности энергии излучения (12), заметим, что вектор \mathbf{S}_w связан с градиентом фазы, усредненным за время импульса с весом интенсивности волны соотношением

$$\mathbf{S}_w = \int_{-\infty}^{\infty} I dt \int \frac{I(\nabla_{\perp} \Phi)}{w} dt = w \langle \nabla_{\perp} \Phi \rangle_t.$$

Это позволяет при анализе распространения лазерного импульса рассматривать не только картину «мгновенных» ДЛ, но и их средних по времени значений.

Действительно, если ввести усредненную координату ДЛ $\mathbf{R}_{dw} = w^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}_d(t) I dt$, то аналогично (6)

можно записать уравнение для среднего по времени ДЛ:

$$\frac{d^2 \mathbf{R}_{dw}}{dz^2} = \frac{1}{2} \langle \nabla_{\perp} \tilde{\epsilon}_{ef} \rangle_t, \quad (13)$$

где $\langle \nabla_{\perp} \tilde{\epsilon}_{ef} \rangle_t = \frac{1}{w} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla_{\perp} \tilde{\epsilon}_{ef} I dt$. Средние ДЛ, таким

образом, связаны не с интенсивностью оптической волны, а с ее плотностью энергии (флюэнсом) и визуализируют направление тока плотности энергии, представляемое как изменение координаты «энергетического» луча \mathbf{R}_{dw} .

2. Усредненное описание дифракционно-лучевых трубок

Основным преимуществом использования аппарата ДЛТ при анализе распространения пучка излучения является то, что лучевые трубки разграничивают внутри пучка отдельные потоки световой энергии. Поскольку эти энергетические потоки изолированы друг от друга (ДЛТ не пересекаются), то каждый из них может трактоваться как отдельный *субпучок* со своими собственными поперечным размером и угловой расходимостью. В пределах каждого субпучка выполняется закон сохранения энергии. Поэтому, как и в случае обычных пучков, для описания эволюции ДЛТ можно использовать усредненные (эффективные) характеристики [28, 29].

Рассмотрим для определенности задачу распространения пучка излучения при выполнении условий радиальной симметрии. Сопоставим каждой дифракционно-лучевой трубке эффективный

луч (ЭЛ) $\langle R_{\text{ед}}(z) \rangle$, квадрат поперечной координаты которого находится как усредненный по времени момент 2-го порядка по интенсивности поля I в пределах сечения ДЛТ:

$$\langle R_{\text{ед}}(z) \rangle^2 = W^{-1} \int \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbf{R}_d(z,t)} [r_{\perp}^2 I(\mathbf{r}_{\perp}, z; t)] d\mathbf{r}_{\perp} dt, \quad (14)$$

где $d\mathbf{r}_{\perp} = r dr d\theta$ — элементарная площадка, θ — азимутальный угол; $W = \int \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbf{R}_d(z,t)} I d\mathbf{r}_{\perp} dt$ — запасенная в лучевой трубке энергия, подчиняющаяся закону сохранения (11). Подчеркнем, что, по своему определению, ЭЛ не совпадает с реальной границей ДЛТ, определяемой соответствующим ДЛ, а указывает размер области преимущественной локализации энергии оптического поля внутри световой трубки в каждой точке трассы. При $R_d \rightarrow \infty$ эффективный луч трубки совпадает с классическим определением среднеквадратичного радиуса всего пучка.

Получим эволюционное уравнение для $\langle R_{\text{ед}}(z) \rangle^2$. Для этого продифференцируем (14) по z и учтем, что

$$\frac{d}{dz} (\langle R_{\text{ед}} \rangle^2 W) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbf{R}_d} \frac{d}{dz} (r_{\perp}^2 I) d\mathbf{r}_{\perp} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \left[R_d^2 I(R_d) \frac{dR_d}{dz} \right] dt. \quad (15)$$

Выпишем подынтегральное выражение в первом слагаемом правой части (15) и используем соотношения (6а) и (8). Тогда

$$\frac{d}{dz} (r_{\perp}^2 I) = r_{\perp}^2 \left(-\text{div}(I \mathbf{s}_{\perp}) + \frac{\partial S_t}{\partial t} - \alpha_N I \right).$$

После интегрирования с учетом теоремы о дивергенции, закона сохранения энергии в трубке (11) и определения функции S_t получим:

$$\frac{d \langle R_{\text{ед}} \rangle^2}{dz} = \frac{2}{k_0} \langle |\nabla_{\perp} \phi| R_{\text{ед}} \rangle - \left[\langle \alpha_N R_{\text{ед}}^2 \rangle - \langle \alpha_N \rangle \langle R_{\text{ед}} \rangle^2 \right], \quad (16)$$

где

$$\langle |\nabla_{\perp} \phi| R_{\text{ед}} \rangle = W^{-1} \int \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbf{R}_d} (\nabla_{\perp} \phi \mathbf{r}_{\perp}) I d\mathbf{r}_{\perp} dt$$

— градиент фазы волны;

$$\langle \alpha_N R_{\text{ед}}^2 \rangle = W^{-1} \int \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbf{R}_d} \alpha_N r_{\perp}^2 I d\mathbf{r}_{\perp} dt$$

— показатель поглощения;

$$\langle \alpha_N \rangle = W^{-1} \int \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbf{R}_d} \alpha_N I d\mathbf{r}_{\perp} dt$$

— коэффициент поглощения, усредненные по времени и сечению ДЛТ. Сравнивая (16) и (6а), видим, что, в отличие от уравнения ДЛ, уравнение для эффективного радиуса (16) учитывает поглощение энергии в лучевой трубке.

Полезно получить уравнение для ЭЛ, выраженное через эффективную диэлектрическую проницаемость среды $\tilde{\epsilon}_{\text{ef}}$, как и для случая с обычным дифракционным лучом (см. (6в)). Для этого сначала выведем уравнение для поперечной компоненты вектора Умова—Пойнтинга $\mathbf{S}_{\perp} = \mathbf{s}_{\perp} I$. Запишем формально производную вектора \mathbf{S}_{\perp} по продольной координате z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathbf{s}_{\perp} I)}{\partial z} &= I \frac{\partial \mathbf{s}_{\perp}}{\partial z} + \mathbf{s}_{\perp} \frac{\partial I}{\partial z} = -\mathbf{s}_{\perp} I [\text{div}(\mathbf{s}_{\perp})] + k_0'' \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial (\mathbf{s}_{\perp} I)}{\partial t} + \\ &+ \frac{1}{2} I \nabla_{\perp} \tilde{\epsilon}_{\text{ef}} - \mathbf{s}_{\perp} \text{div}(\mathbf{s}_{\perp} I) + \mathbf{s}_{\perp} \frac{\partial S_t}{\partial t} - \mathbf{s}_{\perp} I \alpha_N. \end{aligned}$$

Поскольку $\mathbf{s}_{\perp} \text{div}(\mathbf{s}_{\perp} I) + (\mathbf{s}_{\perp} I) \text{div}(\mathbf{s}_{\perp}) = \nabla_{\perp} ((\mathbf{s}_{\perp} I) \mathbf{s}_{\perp})$, то

$$\frac{\partial \mathbf{S}_{\perp}}{\partial z} + \frac{1}{k_0} \nabla_{\perp} (\mathbf{S}_{\perp} (\nabla_{\perp} \phi)) - \frac{\partial}{\partial t} \left(k_0'' \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{S}_{\perp} \right) = \frac{I}{2} \nabla_{\perp} \tilde{\epsilon}_{\text{ef}} - \alpha_N \mathbf{S}_{\perp}. \quad (17)$$

Уравнение (17) и есть искомое уравнение для поперечной компоненты вектора Умова—Пойнтинга.

Умножим (17) скалярно на вектор \mathbf{r}_{\perp} и аналогично (14) проведем усреднение по сечению ДЛТ и времени. В итоге после несложных, но достаточно громоздких вычислений, получим

$$\frac{d \langle s_{\perp} R_{\text{ед}} \rangle}{dz} = \frac{1}{2} \langle |\nabla_{\perp} \tilde{\epsilon}_{\text{ef}}| R_{\text{ед}} \rangle - \left[\langle \alpha_N s_{\perp} R_{\text{ед}} \rangle - \langle \alpha_N \rangle \langle s_{\perp} R_{\text{ед}} \rangle \right]. \quad (18)$$

Здесь

$$\langle s_{\perp} R_{\text{ед}} \rangle = W^{-1} \int \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbf{R}_d} (s_{\perp} \mathbf{r}_{\perp}) I d\mathbf{r}_{\perp} dt$$

— средний градиент фазы волны;

$$\langle |\nabla_{\perp} \tilde{\epsilon}_{\text{ef}}| R_{\text{ед}} \rangle = W^{-1} \int \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbf{R}_d} (\nabla_{\perp} \tilde{\epsilon}_{\text{ef}} \mathbf{r}_{\perp}) I d\mathbf{r}_{\perp} dt \quad (19)$$

— средний градиент эффективной диэлектрической проницаемости;

$$\langle \alpha_N s_{\perp} R_{\text{ед}} \rangle = W^{-1} \int \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbf{R}_d} \alpha_N (s_{\perp} \mathbf{r}_{\perp}) I d\mathbf{r}_{\perp} dt$$

– средний показатель поглощения в направлении градиента фазы волны.

Продифференцируем (16) по z и с учетом (18), получим уравнение для квадрата эффективного радиуса лучевой трубки:

$$\frac{d^2 \langle R_{\text{ед}} \rangle^2}{dz^2} = \langle \nabla_{\perp} \tilde{\epsilon}_{\text{ef}} | R_{\text{ед}} \rangle - 2 \left[\langle \alpha_N s_{\perp} R_{\text{ед}} \rangle - \langle \alpha_N \rangle \langle s_{\perp} R_{\text{ед}} \rangle \right] - \frac{d}{dz} \left[\langle \alpha_N R_{\text{ед}}^2 \rangle - \langle \alpha_N \rangle \langle R_{\text{ед}}^2 \rangle \right]. \quad (20)$$

Видно, что если α_N не зависит от поперечных координат и времени, как, например, в линейной однородной среде, то (20) трансформируется к виду

$$\frac{d^2 \langle R_{\text{ед}} \rangle^2}{dz^2} = \langle \nabla_{\perp} \tilde{\epsilon}_{\text{ef}} | R_{\text{ед}} \rangle. \quad (21)$$

В качестве иллюстрации на рисунке построены границы ДЛТ и траектории эффективных радиусов трубок для случая филаментации в воздухе гауссовского пучка (радиус и длительность по уровню e^{-1} , $R_0 = 2$ мм и $t_p = 100$ фс) с различной приведенной мощностью $\eta = P_0/P_{\text{cr}}$ (P_0 – начальная мощность пучка; P_{cr} – критическая мощность самофокусировки излучения [1]; для воздуха $P_{\text{cr}} = 3,2$ ГВт). Дистанция распространения на рисунке нормирована на длину Релея $L_R = k_0 R_0^2 / 2$. Здесь же в виде тонового изображения показан профиль нормированной плотности энергии $w(r, z) / w_0$. Рассматривалось распространение излучения в цилиндрически-симметричной конфигурации. В этих условиях каждая световая трубка представляет собой пространственную область, об-

разованную вращением граничного ДЛ вокруг оси пучка.

Видно, что вследствие изначальной унимодальности поперечного распределения интенсивности излучения эффективные размеры ДЛТ значительно меньше, чем реальные границы. При этом ЭЛ полностью воспроизводят все стадии филаментации излучения с точки зрения динамики энергопотоков: поперечное сжатие пучка при его самофокусировке, «самоканалирование» энергии вдоль оси распространения в области филаментации и дифракционное уширение пучка на постфиламентационной стадии в условиях действия кубичной нелинейности среды.

Заключение

В работе представлена концепция нестационарной дифракционно-лучевой оптики мощного лазерного импульса, в рамках которой мощность пучка распространяется по специфическим световым структурам – лучевым трубкам. Траектория этих трубок в каждой точке оптического пути совпадает с направлением поперечной компоненты вектора Умова–Пойнтинга. Сами лучевые трубки не пересекаются в пространстве, не обмениваются энергией, но их форма и сечение при распространении могут варьировать, отражая действие физических процессов, происходящих с излучением в среде. Получены уравнения для усредненных по времени дифракционных лучей и эффективных квадратов радиусов дифракционных трубок.

Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФ (соглашение № 16-17-10128).

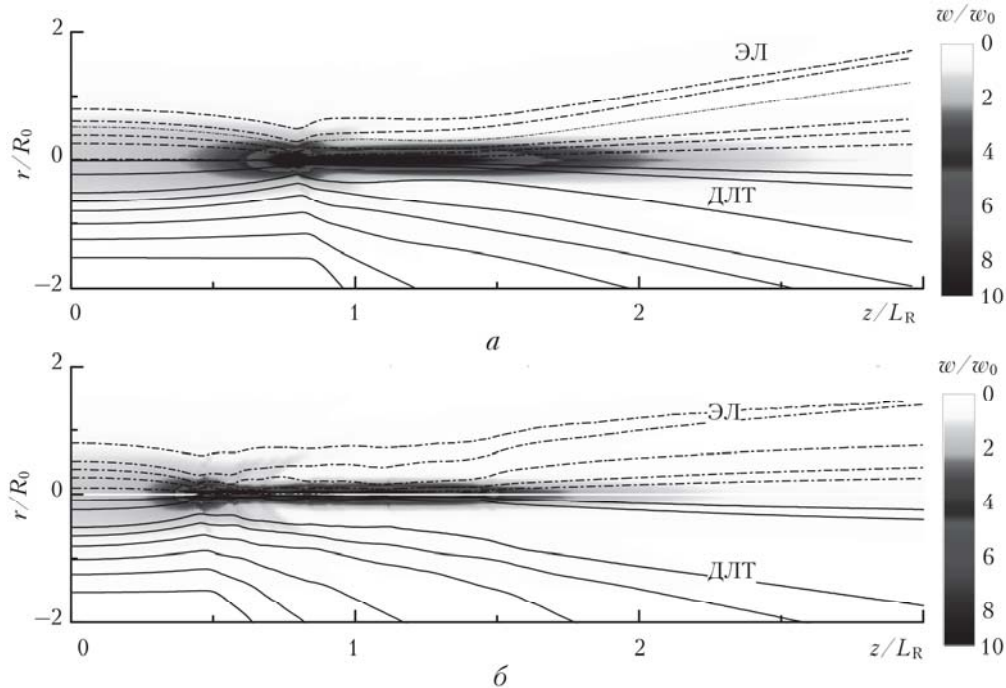


Рис. 1. ДЛТ (сплошные линии) и ЭЛ (штрихпунктирные линии) при филаментации в воздухе гауссовского пучка с $\eta = 3$ (а) и 6 (б)

1. *Self-focusing: Past and Present. Fundamentals and prospects* // Topics in Applied Physics / R.W. Boyd, S.G. Lukishova, Y.R. Shen. (eds.). Berlin: Springer, 2009. 605 p.
2. *Tzortzakis S., Prade B., Franco M., Mysyrowicz A.* Time-evolution of the plasma channel at the trail of a self-guided IR femtosecond laser pulse in air // Opt. Commun. 2000. V. 181. P. 123–127.
3. *Ilyin A.A., Golik S.S., Shmirko K.A.* Absorption and emission characteristics of femtosecond laser plasma filaments in the air // Spectrochim. Acta. B. 2015. V. 112. P. 16–22.
4. *Couairon A., Mysyrowicz A.* Femtosecond filamentation in transparent media // Phys. Rep. 2007. V. 441, N 2–4. P. 47–189.
5. *Чекалин С.В., Кандидов В.П.* От самофокусировки световых пучков к филаментации лазерных импульсов // Успехи физ. наук. 2013. Т. 183, № 2. С. 133–152.
6. *Kandidov V.P., Kosareva O.G., Golubtsov I.S., Liu W., Becker A., Akozbek N., Bowden C.M., Chin S.L.* Self-transformation of a powerful femtosecond laser pulse into a white-light laser pulse in bulk optical media (or supercontinuum generation) // Appl. Phys. B. 2003. V. 77, N 2–3. P. 149–166.
7. *Woste L., Wedekind C., Wille H., Rairoux P., Stein B., Nikolov S., Werner Ch., Niedermeier S., Schillinger H., Sauerbrey R.* Femtosecond atmospheric lamp // Laser Optoelektron. 1997. V. 29. P. 51–53.
8. *Rodriguez M., Bourayou R., Méjean G., Kasparian J., Salmon J., Yu E., Scholz A., Stecklum B., Eislöffel J., Laux U., Hatzes A.P., Sauerbrey R., Wöste L., Wolf J.-P.* Kilometer-range non-linear propagation of femtosecond laser pulses // Phys. Rev. E. 2004. V. 69. P. 036607-1–036607-7.
9. *Ackermann R., Méchain G., Méjean G., Bourayou R., Rodriguez M., Stelmasczyk K., Kasparian J., Salmon J., Yu E., Tzortzakis S., André Y.-B., Bourrillon J.-F., Tamin L., Cascelli J.-P., Campo C., Davoise C., Mysyrowicz A., Sauerbrey R., Wöste L., Wolf J.-P.* Influence of negative leader propagation on the triggering and guiding of high voltage discharges by laser filaments // Appl. Phys. B. 2006. V. 82. P. 561–566.
10. *Durand M., Houard A., Prade B., Mysyrowicz A., Durécu A., Moreau B., Fleury D., Vasseur O., Borchert H., Diener K., Schmitt R., Théberge F., Chateaufneuf M., Daigle J.-F., Dubois J.* Kilometer range filamentation // Opt. Express. 2013. V. 21. P. 26836–26845.
11. *Braun A., Korn G., Liu X., Du D., Squier J., Mourou G.* Self-channeling of high-peak-power femtosecond laser pulses in air // Opt. Lett. 1995. V. 20, iss. 1. P. 73–75.
12. *Nibbering E.T.J., Curley P.F., Grillon G., Prade B.S., Franco M.A., Salin F., Mysyrowicz A.* Conical emission from self-guided femtosecond pulses in air // Opt. Lett. V. 21, iss. 1. P. 62–64.
13. *Lugovoi V.N., Prokhorov A.M.* A possible explanation of the small-scale self-focusing filaments // JETP Lett. 1968. V. 7. P. 117–119.
14. *Brodeur A., Chien C.Y., Ilkov F.A., Chin S.L., Kosareva O.G., Kandidov V.P.* Moving focus in the propagation of ultrashort laser pulses in air // Opt. Lett. 1997. V. 22, iss. 5. P. 304–306.
15. *Ciao R.Y., Garmiere E., Towns C.H.* Self-trapping of optical beams // Phys. Rev. Lett. 1964. V. 13. P. 479–482.
16. *Mlejnek M., Wright E.M., Moloney J.V.* Dynamic spatial replenishment of femtosecond pulses propagating in air // Opt. Lett. 1998. V. 23. P. 382–384.
17. *Lotti A., Couairon A., Faccio D., Di Trapani P.* Energy-flux characterization of conical and space-time coupled wave packets // Phys. Rev. A. 2010. V. 81. P. 023810-1–023810-14.
18. *Grow T.D., Ishaaya A.A., Vuong L.T., Gaeta A.L., Gavish N., Fibich G.* Collapse dynamics of super-gaussian beams // Opt. Express. 2006. V. 14. P. 5468–5475.
19. *Xi T.-T., Lu X., Zhang J.* Spatiotemporal moving focus of long femtosecond-laser filaments in air // Phys. Rev. E. 2008. V. 78. P. 055401-1–055401-4.
20. *Землянов А.А., Бульгин А.Д., Гейнц Ю.Э.* Дифракционная оптика светового филамента, образованного при самофокусировке фемтосекундного лазерного импульса в воздухе // Оптика атмосф. и океана. 2011. Т. 24, № 10. С. 839–847; *Zemlyanov A.A., Bulygin A.D., Geints Yu.E.* Diffraction optics of a light filament generated during self-focusing of a femtosecond laser pulse in air // Atmos. Ocean. Opt. 2012. V. 25, N 2. P. 97–105.
21. *Землянов А.А., Бульгин А.Д., Гейнц Ю.Э.* Энергетические световые структуры при филаментации фемтосекундного лазерного излучения в воздухе // Оптика атмосф. и океана. 2013. Т. 26. № 5. С. 350–362; *Zemlyanov A.A., Bulygin A.D., Geints Yu.E.* Energy light structures during femtosecond laser radiation filamentation in air. To the 50th anniversary of the first paper about light self-focusing // Atmos. Ocean. Opt. 2014. V. 27, N 6. P. 463–475.
22. *Keller J.B.* Geometrical theory of diffraction // J. Opt. Soc. Am. 1962. V. 52, iss. 2. P. 116–130.
23. *Таланов В.И.* О самофокусировке волновых пучков в нелинейных средах // Письма в ЖЭТФ. 1965. Т. 2. С. 218–222.
24. *Раутиан С.Г.* Квазилучевые трубки // Оптика и спектроскопия. 1999. Т. 87, № 3. С. 494–496.
25. *Гершун А.А.* Избранные труды по фотометрии и светотехнике. М.: Физматгиз, 1958. 548 с.
26. *Geints Yu.E., Zemlyanov A.A.* Ring-Gaussian laser pulse filamentation in a self-induced diffraction waveguide // J. Opt. 2017. V. 19. P. 105502-1–105502-10.
27. *Землянов А.А., Бульгин А.Д., Гейнц Ю.Э., Минина О.В.* Динамика световых структур при филаментации ультракоротких лазерных импульсов в воздухе // Оптика атмосф. и океана. 2016. Т. 29, № 5. С. 359–368; *Zemlyanov A.A., Bulygin A.D., Geints Yu.E., Minina O.V.* Dynamics of light structures during filamentation of femtosecond laser pulses in air // Atmos. Ocean. Opt. 2016. V. 29, N 5. P. 395–404.
28. *Siegman A.E.* Defining and Measuring Laser Beam Quality // Solid State Lasers: New Developments and Applications. New York: Plenum Press, 1994. P. 13–28.
29. *Geints Yu.E., Zemlyanov A.A.* On the focusing limit of high-power femtosecond laser pulse propagation in air // Eur. Phys. J. D. 2009. V. 55. P. 745–754.

Yu.E. Geints, A.A. Zemlyanov, O.V. Minina. **Diffraction-beam optics of filamentation. I. Formalism of diffraction beams and light tubes.**

The concept of non-stationary diffraction-beam optics of powerful femtosecond laser pulses is presented. According to the concept the power of a beam propagates along specific light structures – diffraction-beam tubes. These tubes do not intersect, do not exchange energy, but changes in their shape and cross sections during propagation reflect the effect of physical processes that occur with radiation in the medium. The non-stationary theory is supplemented with evolutionary equations for time averaged diffraction beams and effective squared radii of diffraction tubes.