

Методика расчета и свойства индикатрис рассеяния прозрачных шаров в приближении геометрической оптики

Н.П. Романов*

НПО «ТАЙФУН»
249038, г. Обнинск, Калужская обл., ул. Победы, 4

Поступила в редакцию 23.10.2008 г.

Дается систематическое изложение основных закономерностей рассеяния в рамках геометрической оптики с графическим представлением для показателя преломления $m = 4/3$ парциальных индикатрис рассеяния, представляющих лучи после p проходов внутри шара. Исследуется процедура расчета парциальных индикатрис в зависимости от угла рассеяния, которая представляет собой итерационную процедуру с использованием разложения обратной зависимости угла падения от угла рассеяния. Для ряда значений m от 1,1 до 1,8 приводятся графики суммарных индикатрис, полученные с использованием этой процедуры. Из анализа этих графиков следует, что с увеличением показателя преломления от 1,1 до 1,5 наблюдается увеличение угла, в котором сосредоточено 90% рассеянной энергии от ~ 20 до 90° . При росте значений $m > \sqrt{2}$ наблюдается резкое увеличение рассеяния в обратном направлении, обусловленное рассеянием парциального луча с $p = 2$ в эту область. В большом диапазоне углов рассеяния в передней полусфере и в отдельных поддиапазонах в задней полусфере значение суммарной индикатрисы рассеяния определяется суммой парциальных индикатрис с $p = 0$ и 1, для которых имеются аналитические выражения.

Ключевые слова: индикатриса рассеяния, показатель преломления, угловая зависимость, геометрическая оптика.

Введение

Изложение теории рассеяния сферических частиц в приближении геометрической оптики (ГО) имеется в ряде монографий [1–3]. Однако имеющиеся в них результаты расчета индикатрис рассеяния представлены в виде таблиц для показателей преломления $m = 4/3$, соответствующих водяным каплям. Отдельные результаты имеются в [4] для показателей преломления, близких к единице, относящихся к гидрозолям. Таким образом, отсутствует представление о систематических качественных изменениях закономерностей угловой зависимости интенсивности рассеяния с изменением показателя m . В то же время вероятность существенного отличия значения m в облачных каплях при низких температурах от показателя преломления жидкой воды при положительных температурах рассматривается в работе [5]. С другой стороны, табличные результаты трудно использовать в расчетных работах, хотя это и приходится делать при определении рассеяния на крупных облачных каплях. В частности, табличные данные работы [1] используются в качестве предельной индикатрисы при исследовании рассеяния на осциллирующих при падении дождевых каплях [6, 7].

При расчете индикатрис в приближении ГО возникает проблема определения углов падения на каплю при заданных углах рассеяния для парциальных индикатрис. Целью данной работы является построение алгоритмов этих расчетов. Для этого вначале дается изложение основных закономерностей рассеяния в рамках ГО с графическим представлением индикатрис. Затем исследуется процедура расчета парциальных индикатрис, которая представляет собой итерационную процедуру с использованием разложения обратной зависимости угла падения от угла рассеяния. С использованием этой процедуры проводятся расчет суммарных индикатрис рассеяния для нескольких показателей преломления в диапазоне 1,1–1,8 и анализ закономерностей их поведения.

1. Основные соотношения

Изложение картины рассеяния и необходимые для расчетов формулы имеются в [1–3]. Однако приведенные там соотношения различаются ввиду различия принятых обозначений, поэтому ниже мы приведем изложение соотношений в форме, которая, по нашему мнению, обеспечивает достаточно ясную для понимания картину получаемых соотношений. Схема хода лучей согласно законам геометрической оптики представлена на рис. 1.

Угол между направлением падающего на шар света и нормалью к его поверхности обозначается

* Николай Петрович Романов (vernik@typhoon.obninsk.ru).

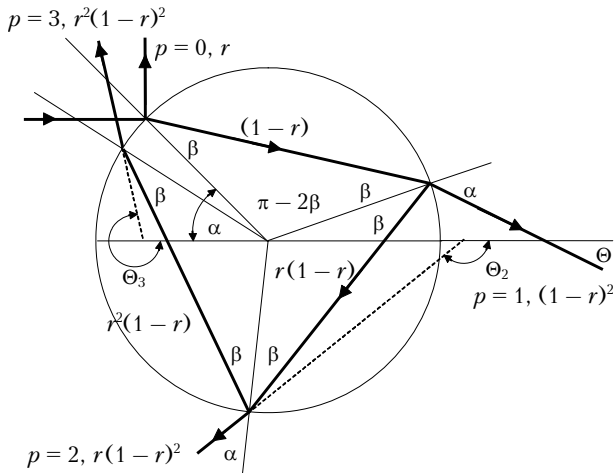


Рис. 1. Схема рассеяния света на шаре

через α , а после преломления — через β . Процесс рассеяния в приближении ГО состоит из отражения света на поверхности шара (луч с номером $p = 0$), а также при выходе из шара лучей, циркулирующих внутри его (лучи с $p \geq 1$). Здесь p — число проходов луча внутри капли с изменением направления. Полный угол поворота рассеянного излучения для соответствующего луча обозначим через Θ_p , при этом для падающих выше оси шара лучей положительным считается поворот рассеянного луча в направлении часовой стрелки. Из рис. 1 видно, что первый луч отражается в направлении $\Theta_0 = (-\pi + 2\alpha)$, а каждый последующий поворачивается относительно предыдущего на угол $(\pi - 2\beta)$. Поэтому

$$\Theta_p = p(\pi - 2\beta) + 2\alpha - \pi. \quad (1)$$

Соотношение между углами α и β определяется известным законом преломления

$$\sin \alpha = m \sin \beta. \quad (2)$$

Получаемые по формуле (1) углы превышают диапазон от 0 до π , имеющий физический смысл. Углы рассеяния, приведенные в этот диапазон, будем обозначать через θ и использовать для этого стандартную функцию $\theta = \arccos(\cos \Theta)$.

Соотношения (1) и (2) между углами не зависят от поляризации света. В то же время коэффициенты отражения зависят от поляризации и определяются коэффициентами Френеля [8], которые запишем в приведенном в [1] виде, не допускающем неопределенности при $\alpha = 0$:

$$r_1 = \left[\frac{\sqrt{m^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha}{\sqrt{m^2 - \sin^2 \alpha} + \cos \alpha} \right]^2, \quad (3)$$

$$r_2 = \left[\frac{\sqrt{m^2 - \sin^2 \alpha} - m^2 \cos \alpha}{\sqrt{m^2 - \sin^2 \alpha} + m^2 \cos \alpha} \right]^2.$$

Здесь коэффициент отражения r_1 относится к перпендикулярной, а r_2 к параллельной поляризации (электрический вектор перпендикулярен и па-

раллелен плоскости падения соответственно). Формулы (3) справедливы и для лучей, отраженных при падении на поверхность изнутри шара.

Из приведенной на рис. 1 схемы следует, что относительная интенсивность рассеянных лучей определяется соотношениями

$$\varepsilon_{pk} = \begin{cases} r, & p = 0 \\ r_k^{p-1} (1 - r_k)^2, & p \geq 1 \end{cases}, \quad k = 1, 2. \quad (4)$$

Ввиду зависимости ε_p от поляризации логично рассмотреть вначале рассеяние линейно-поляризованного света. Для этого рассмотрим ситуацию, когда на шар радиусом a вдоль оси z падает линейно поляризованный световой поток интенсивностью I_0 , перпендикулярной поляризации относительно вертикально расположенной плоскости xz . Угол между этой и рассматриваемой плоскостями обозначим через φ . Индикатриса рассеяния капли определяется как отношение потока энергии в луче dW , рассеянной в пространственный угол $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$, к величине этого угла и потоку энергии, падающей на поперечное сечение шара площадью πa^2 :

$$\gamma(\theta, \varphi) = \frac{dW}{d\Omega} \frac{1}{I_0 \pi a^2}. \quad (5)$$

Учитывая, что поток энергии на элемент поверхности шара равен $dW = I_0 a^2 \sin \alpha d\alpha d\varphi$, а рассеянный поток энергии составляет величину ε_p от падающего потока, имеем выражение для парциальной индикатрисы рассеяния:

$$\gamma_{pk}(\Theta, \varphi) = \frac{\varepsilon_{pk}(\alpha)}{\pi} D_p(\alpha, \Theta) \left\{ \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} \right\} d\varphi, \quad (6)$$

где

$$D_p(\alpha, \Theta) = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin \theta \left| \Theta'_p \right|}. \quad (7)$$

Множители в фигурных скобках отражают разложение по поляризациям для плоскостей с углом $\varphi > 0$.

Для кольцевой области после интегрирования по φ имеем

$$\gamma_{pk}(\Theta) = \varepsilon_{pk}(\alpha) D_p(\alpha, \Theta). \quad (8)$$

В случае, когда полному диапазону углов Θ соответствует несколько диапазонов приведенного угла θ , для получения $\gamma_{pk}(\theta)$ необходимо проводить суммирование по этим поддиапазнам. При этом полная индикатриса $\gamma_k(\theta)$ является функцией приведенного угла и определяется суммой

$$\gamma_k(\theta) = \sum_{p=0}^{\infty} \gamma_{pk}(\theta), \quad (9)$$

а для суммарного потока рассеянной энергии индикатриса определяется суммой

$$\gamma(\theta) = \gamma_1(\theta) + \gamma_2(\theta). \quad (10)$$

Отметим, что аналогичное (8) выражение имеется в [2], где величина D называется расходимостью. Там же указывается, что определенные формулами (9) индикатрисы рассеяния для кольцевых областей совпадают с вычисляемыми по теории Ми величинами i_1 и i_2 , деленными на квадрат параметра Ми x . Отметим, что в монографии Шифрина [1] в выражении (5) берется отношение не к полному потоку падающего на сечение капли излучения, а только к потоку соответствующей поляризации. В результате используемая там величина $\tau_{pk}(\theta)$ в 4 раза больше величины $\gamma_{pk}(\theta)$.

Для случая геометрической оптики при отсутствии поглощения полный рассеянный поток равен потоку, падающему на поперечное сечение шара. Следовательно, интеграл $\gamma(\theta)$ по всем углам рассеяния обязан быть равным единице, а из независимости процессов рассеяния от направления поляризации следует, что для $\gamma_k(\theta)$ этот интеграл равен $1/2$, т.е. имеют место соотношения

$$\int_0^\pi \gamma_k(\theta) \sin(\theta) d\theta = 1/2, \quad \int_0^\pi \gamma(\theta) \sin(\theta) d\theta = 1. \quad (11)$$

Естественный свет может быть представлен в виде суммы двух некогерентных (независимых) потоков взаимно перпендикулярной поляризации с половинной интенсивностью [8]. В этом случае в выражении (6) множители в фигурных скобках заменяются на одинаковый для обеих поляризаций множитель, равный $1/2$. После интегрирования по ϕ зависимость $\gamma(\theta)$ опять принимает вид (10).

2. Анализ особенностей парциальных индикатрис

Приведенные выше соотношения, несмотря на их простоту, приводят к достаточно сложной зависимости индикатрис от угла рассеяния. Для понимания особенностей поведения $\gamma(m, \theta)$ проведем вначале обычное исследование парциальных индикатрис методом математического анализа [9], в основе которого лежит изучение поведения производных от функции по ее аргументам.

Выражения для производных получаются последовательным дифференцированием правой части соотношения (1) и с использованием (2) принимают вид

$$\Theta'_p = \frac{d\Theta_p}{d\alpha} = 2 \left[1 - \frac{p \cos \alpha}{\sqrt{m^2 - \sin^2 \alpha}} \right], \quad (12)$$

$$\Theta''_p = \frac{d^2\Theta_p}{d\alpha^2} = 2p \frac{\sin \alpha (m^2 - 1)}{\sqrt{(m^2 - \sin^2 \alpha)^3}}, \quad (13)$$

$$\Theta'''_p = \frac{d^3\Theta_p}{d\alpha^3} = 2p(m^2 - 1) \cos \alpha \frac{m^2 + 2\sin^2 \alpha}{\sqrt{(m^2 - \sin^2 \alpha)^5}}. \quad (14)$$

Производные обратной функции $\alpha(\Theta)$ определяются через производные от прямой функции $\Theta(\alpha)$ посредством соотношений [9]:

$$\alpha' = \frac{1}{\Theta'}, \quad \alpha'' = \frac{-\Theta''}{(\Theta')^3}, \quad \alpha''' = \frac{3(\Theta'')^2 - \Theta' \Theta'''}{(\Theta')^5}. \quad (15)$$

Из выражения (13) следует положительность второй производной для $m > 1$ на всем интервале изменения угла α от 0 до $\pi/2$, что определяет монотонный рост первой производной на этом интервале. А поскольку, как видно из выражения (12), $\Theta'(\alpha)$ положительна для $p < m$ при $\alpha = 0$, то она положительна и на всем интервале углов α . Следовательно, при $p < m$ угол Θ постоянно растет, т.е. отсутствуют точки поворота луча. Предполагая в настоящей работе исследование показателей преломления $m \leq 2$, отметим, что случай $p < m$ соответствует $p = 0$ и 1. И как видно из соотношения (1), для $p = 0$ угол Θ растет от $-\pi$ до 0, а для $p = 1$ от 0 до $\pi - 2\arcsin(1/m)$ с увеличением α от 0 до $\pi/2$.

2.1. Диапазоны углов рассеяния при $p > m$

При $p > m$ первая производная, как следует из соотношения (12), отрицательна в начале интервала изменения угла α . Следовательно, в отличие от указанного выше роста угла Θ для $p = 0$ и 1, при $p > m$ в начале интервала имеет место уменьшение угла Θ с ростом угла α . Из указанной выше монотонности роста первой производной следует, что она может достичь нулевого значения. Из выражения (12) следует, что условием обращения в нуль первой производной (условие появления радуги) является соотношение

$$\sin^2 \alpha_{pr} = \frac{p^2 - m^2}{p^2 - 1}; \quad \Theta'(\alpha_{pr}) = 0. \quad (16)$$

При этом для каждого p имеется только один нуль первой производной, что следует из положительности второй производной на всем интервале углов падения α от 0 до $\pi/2$. Естественно, что угол радуги Θ_{pr} с использованием (1), (2) будет определяться соотношением

$$\Theta_{pr} = \pi(p - 1) - 2 \left(p \arcsin \sqrt{\frac{p^2 - m^2}{m^2(p^2 - 1)}} - \arcsin \sqrt{\frac{p^2 - m^2}{p^2 - 1}} \right). \quad (17)$$

Отметим, что соотношение (16) и таблицы значений приведенных углов θ_{pr} для водных капель имеются во многих публикациях, например [1–3]. Однако для понимания качественных зависимостей более удобно графическое представление результатов, поэтому рис. 2 иллюстрирует кривые зависимости углов радуги, приведенных к диапазону от 0 до π , от показателя преломления для различных значений p .

Из рис. 2 видно, что угол наступления главной радуги ($p = 2$) монотонно увеличивается с ростом показателя преломления и при $m = 2$ проявляется в направлении точно назад. Угол радуги с $p = 3$

для $m > 1,18$ монотонно уменьшается с ростом показателя преломления и при $m = 1,312$ совпадает с углом главной радуги $\theta_r = 134,8^\circ$. Можно отметить совпадение углов радуг с $p = 4$ и 5 при $m = 1,331$ и $\theta_r = 42,6^\circ$ и радуг с $p = 6$ и 7 при $m = 1,349$ и $\theta = 137,2^\circ$. Познавательность рис. 2 состоит и в том, что читатель, знающий об увеличении показателя преломления воды с уменьшением длины волны света, может сразу понять переход цвета от красного к фиолетовому при увеличении угла рассеяния в основной ($p = 2$) и обратное расположение цветов в дополнительной ($p = 3$) радугах.

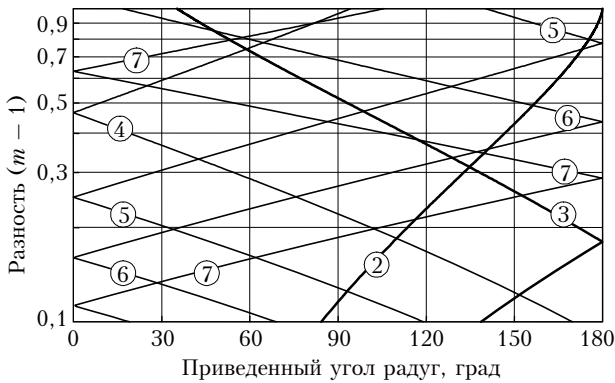


Рис. 2. Зависимость приведенных углов радуги с $p = 2 \div 7$ от показателя преломления. Номера кривых соответствуют значениям p

Из курса математического анализа [9] следует, что точка нуля первой производной функции при положительности второй производной является минимумом самой функции, т.е. $\min \Theta_p = \Theta_{pr}$. Из этого следует, что при $p > m$ угол рассеяния начинает уменьшаться с ростом α от начального значения $\Theta_{pn} = \Theta_p(\alpha = 0) = \pi(p - 1)$ до минимального значения, равного Θ_{pr} . Назовем этот диапазон углов рассеяния $\Delta\Theta_p^n = \Theta_{pn} - \Theta_{pr}$ нижней ветвью с использованием индекса n , поскольку он относится к углам $\alpha < \alpha_{pr}$. После соответствующих подстановок получаем для этого диапазона следующее соотношение:

$$\Delta\Theta_p^n = 2 \left[p \arcsin \sqrt{\frac{p^2 - m^2}{m^2(p^2 - 1)}} - \arcsin \sqrt{\frac{p^2 - m^2}{p^2 - 1}} \right]. \quad (18)$$

При увеличении угла $\alpha > \alpha_{pr}$ угол рассеяния начинает увеличиваться и достигает своего предельного значения $\Theta_{pk} = \Theta_p(\alpha = \pi/2)$. Соответствующий диапазон углов рассеяния $\Delta\Theta_p^v = \Theta_{pr} - \Theta_{pk}$ будем называть верхней ветвью с использованием индекса v . После соответствующих подстановок выражение для $\Delta\Theta_p^v$ приобретает вид

$$\Delta\Theta_p^v = \pi - 2p \left(\arcsin \frac{1}{m} - \arcsin \sqrt{\frac{p^2 - m^2}{m^2(p^2 - 1)}} \right) - 2 \arcsin \sqrt{\frac{p^2 - m^2}{p^2 - 1}}. \quad (19)$$

Выражения (18) и (19) достаточно сложны для анализа качественных закономерностей, поэтому на рис. 3 представлена зависимость диапазонов $\Delta\Theta_p^n$ и $\Delta\Theta_p^v$ от показателя преломления и частичного номера в графическом виде.

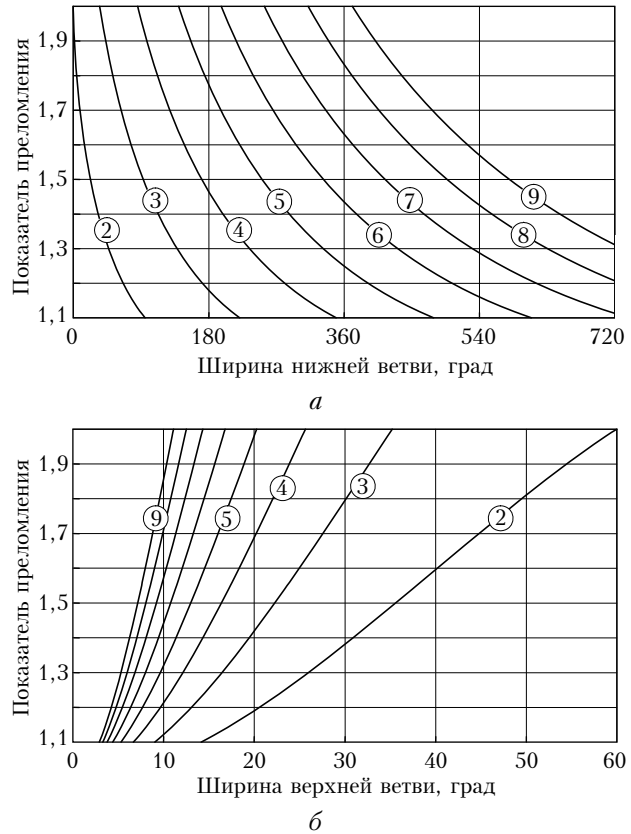


Рис. 3. Зависимость нижнего (а) и верхнего (б) диапазонов углов рассеяния от показателя преломления. Номера кривых соответствуют значениям p

Из приведенных на рис. 3, а кривых следует, что для нижней ветви диапазон углов может значительно превышать диапазон от 0 до π . Это означает, что при изменении угла падения α от 0 до α_{pr} один и тот же приведенный угол рассеяния может повторяться несколько раз. Следовательно, можно говорить о нескольких ветвях рассеяния для каждого конкретного значения $p > 2$, количество которых определяется отношением $s = \Delta\Theta_p^n / \pi$. В дальнейшем будем называть ветви с целыми значениями s дополнительными и нумеровать их по мере возрастания угла падения. Количество дополнительных ветвей для каждого p определяется целой частью s . Ветвь, в которой находится радуга, будем называть главной ветвью.

Из рис. 3, а видно, что для $m = 1,1$ количество дополнительных ветвей может меняться от нуля при $p = 2$ до 5 при $p = 9$. Для диапазона $m = 1,32 - 1,4$ пары лучей с $p = 4,5$; $6,7$ и $7,8$ имеют 1, 2 и 3 дополнительные ветви соответственно. В общем случае кривые рис. 3, а полезны при составлении программ суммирования общей интенсивности рассеяния шаром.

Для понимания поведения приведенной величины θ отметим, что для целых значений n при $2n\pi \leq \Theta \leq (2n + 1)\pi$ приведенная величина θ растет с ростом Θ и уменьшается при $(2n - 1)\pi \leq \Theta \leq 2n\pi$.

Из данных рис. 3, б видно, что диапазон углов рассеяния верхней ветви намного меньше π и быстро уменьшается с ростом p и уменьшением m . Характер поведения приведенного угла рассеяния после прохождения угла радуги определяется приведенными выше соотношениями. А именно: при прохождении точки Θ , кратной целому числу π (если это случается), рост угла θ меняется на его уменьшение и наоборот.

2.2. Характерные особенности поведения парциальных индикатрис

Основные особенности поведения парциальных индикатрис рассеяния (8) определяются поведением расходимости D_p , знаменатель выражения которого (7) может обращаться в нуль в точках радуг и при углах рассеяния, кратных π ($\sin\theta = 0$). Анализ поведения индикатрис рассеяния в районе радуг требует достаточно сложных выкладок, которыми мы в рамках данной статьи заниматься не будем. В данном разделе остановимся на случае, в котором различаются две ситуации. Первая относится к стремлению $\sin\theta$ к нулю для приосевых лучей ($\alpha \approx 0$), при этом множитель $\sin\alpha$ в числителе также стремится к нулю, т.е. имеет место неопределенность вида $0/0$. Для раскрытия этой неопределенности заменяем отношение $\sin\alpha/\sin\theta$ на $d\alpha/d\theta$ и, используя выражения (3), (4), (8) и (12), получаем

$$\gamma_{p,1}(0,\pi) = \gamma_{p,2}(0,\pi) = \frac{4m^4}{(m+1)^4(m-p)^2} \times \begin{cases} \theta = 0, p = 1, 3, 5, \dots \\ \theta = \pi, p = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (20)$$

Особый случай имеет место при $p = 0$, для которого соответствующие выкладки приводят к соотношениям

$$\gamma_{0,1}(\pi) = \gamma_{0,2}(\pi) = \frac{1}{4} \left(\frac{m-1}{m+1} \right)^2, \quad \gamma_{0,1}(0) = \gamma_{0,2}(0) = \frac{1}{4}. \quad (21)$$

Отметим, что в этой ситуации вклад приосевых лучей в суммарное рассеяние стремится к нулю из-за множителя $\sin\theta$ в интеграле (11).

Вторая ситуация относится к рассеянию излучения в направлении точно вперед или точно назад от падающих лучей с промежуточным значением α . Из данных рис. 3, а видно, что для нижней ветви при $m \geq 1,1$ эта ситуация может наступать для лучей с $p \geq 3$. В этом случае значение множителя D_p стремится к бесконечности. Физически это явление можно объяснить тем, что в данной ситуации вместо рассеяния в конус идет сбор в направлении вперед или назад всех падающих под одним углом α лучей с различными азимутальными углами ϕ . Вклад таких лучей в наблюдаемое в природе явление глории, достаточно однозначной интерпретации

которого к настоящему времени не существует, обсуждается в работе [10].

Для иллюстрации характера зависимости $\gamma_{pk}(\theta)$ на рис. 4 приводится их графическое представление для $m = 4/3$ в прямоугольных координатах, построенное с шагом $0,125^\circ$ по углу θ . Номера кривых совпадают со значениями p , а стрелки указывают на направление изменения θ с ростом α .

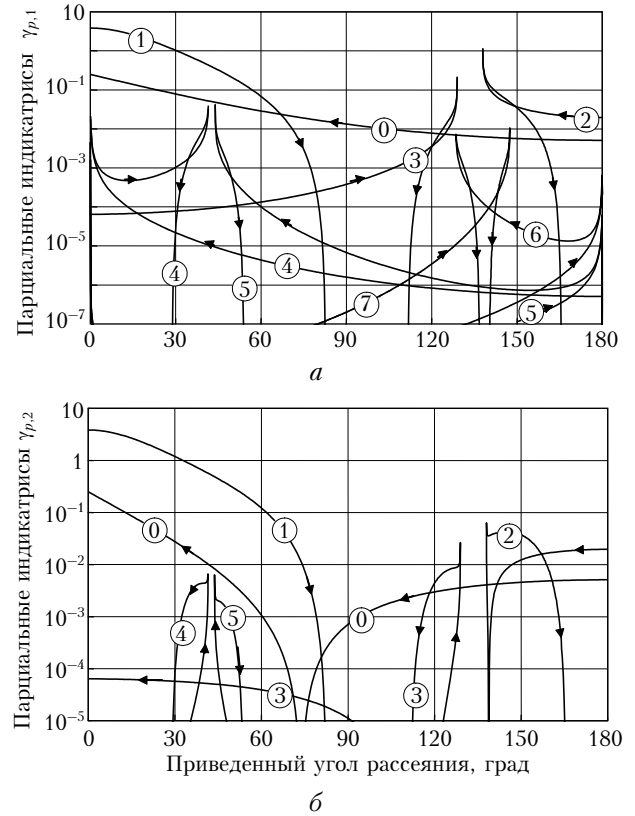


Рис. 4. Зависимость парциальных индикатрис $\gamma_{p,1}$ (а) и $\gamma_{p,2}$ (б) от приведенного угла рассеяния для $m = 4/3$

Из рис. 4 видно, что для углов меньше 70° основной вклад в рассеяние дают лучи с $p = 1$. В диапазоне углов рассеяния от 80 до 110° и при $\theta_{3,r} < \theta < \theta_{2,r}$ (темная полоса «Александера» [3]) основной вклад в рассеяние дает непосредственное отражение от поверхности капли ($p = 0$). В рассеяние в заднюю полу-сферу при $\theta \geq \theta_{2,r}$ основной вклад дают лучи с $p = 2$, а в интервале углов шириной $\sim 10^\circ$ при $\theta \leq \theta_{2,r}$ — лучи с $p = 3$. Лучи с $p = 4$ и 5 дают заметный вклад только в области соответствующих углов радуги. Этим и оправдывается приведенное выше деление нижней ветви на дополнительные и главную ветви.

Нулевая интенсивность для $p = 0$ при $\theta = 73,74^\circ$, наблюдающаяся на рис. 4, б, обусловлена углом Брюстера $\alpha_B = 53,13^\circ$, определяемым соотношением $\text{tg}\alpha_B = m$, при котором отражение от поверхности равно нулю [8]. В этом случае $\epsilon_2(\alpha_B)$ равно 1 для $p = 1$ и 0 для всех остальных $p \neq 1$. Влияние углов Брюстера объясняет и сложность поведения индикатрис вблизи углов радуг, следующую из на рис. 4, б.

На рис. 4, а кроме пиков, обусловленных эффектом радуги, видны и пики интенсивности нижних ветвей при 0° для $p = 4$ и при 180° для $p = 5$ и 6. Отметим, что для этих пиков произведение $\gamma_p \sin\theta$ стремится к определенному пределу, который для больших значений p имеет малые значения. Для $p = 2$ пика нижней ветви не существует. Однако при $m \geq \sqrt{2}$ начинают проявляться уже пики верхней ветви. Эта ситуация иллюстрируется на рис. 5, на котором приводятся произведения $\gamma_{2,1} \sin\theta$ для ряда значений m .

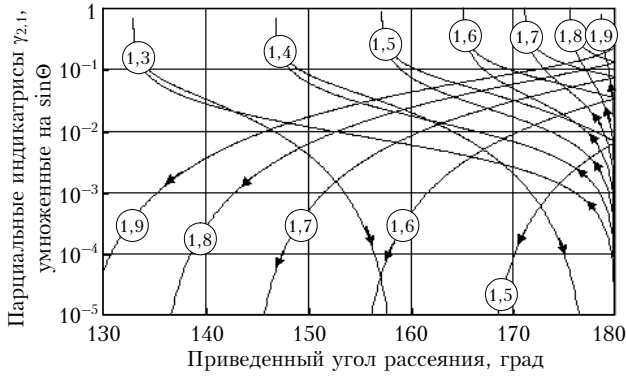


Рис. 5. Зависимость парциальных индикатрис $\gamma_{2,1}$ от приведенного угла рассеяния для показателей преломления $m = 1,3 \div 1,9$ (цифры у кривых)

Из представленных на рис. 5 кривых видно, что рассеяние в направлении назад от парциальной индикатрисы с $p = 2$ резко увеличивается с ростом m , при этом пик обратного рассеяния и пики радуги сближаются. Это обстоятельство используется в работе [5] для объяснения явления глории в облаках.

3. Представление зависимости индикатрис ГО от угла рассеяния

В определяющих формулах парциальных индикатрис рассеяния (1), (6), (7) представлена их зависимость от углов α и Θ одновременно. При заданном α угол Θ определяется по соотношению (1), что позволяет вычислять значения γ_p от полученного по этому соотношению угла Θ . Для получения же суммарных индикатрис необходимо иметь значения γ_p при заданных углах θ , для чего возникает необходимость определять значение угла $\alpha(\Theta)$.

3.1. Парциальные индикатрисы рассеяния при $p = 0, 1$

В явном виде зависимость γ только от угла θ может быть получена только для $p = 0$ и 1. Действительно, для этих значений p уравнение (1) имеет аналитическое решение для обратной зависимости α от θ , которое с использованием промежуточного обозначения $q = \cos(\theta/2)$ записывается в следующем виде:

$$\sin \alpha = q; p = 0; 0 \leq \theta \leq \pi; \quad (22)$$

$$\sin \alpha = m \sqrt{\frac{1 - q^2}{m^2 + 1 - 2mq}}; p = 1; \quad (23)$$

$$0 \leq \theta \leq 2 \arccos \frac{1}{m}$$

Эти формулы и позволяют с использованием определяющих формул (1)–(10) рассчитывать индикатрисы $\gamma_{0,k}(\theta)$ и $\gamma_{1,k}(\theta)$. Ввиду важности парциальных индикатрис при $p = 0$ и 1 выпишем ниже их выражения в окончательном виде. Для этого в выражения (6)–(8) подставим соотношения (3), (4) для коэффициентов отражения и пропускания и (22) и (23) для $\alpha(\theta)$. В результате получаем следующие выражения для $\gamma_{0,k}(\theta)$ и $\gamma_{1,k}(\theta)$:

$$\gamma_{0,1}(\theta) = \frac{1}{4} \left[\frac{\sqrt{m^2 - q^2} - \sqrt{1 - q^2}}{\sqrt{m^2 - q^2} + \sqrt{1 - q^2}} \right]^2, \quad (24)$$

$$\gamma_{0,2} = \frac{1}{4} \left[\frac{m^2 \sqrt{1 - q^2} - \sqrt{m^2 - q^2}}{m^2 \sqrt{1 - q^2} + \sqrt{m^2 - q^2}} \right]^2; 0 \leq \theta \leq \pi;$$

$$\gamma_{1,1}(\theta) = \left(\frac{2m}{m^2 - 1} \right)^4 \frac{(mq - 1)^3 (m - q)^3}{4q(m^2 + 1 - 2mq)^2}, \quad \gamma_{1,2}(\theta) = \frac{\gamma_{1,1}}{q^4}; \quad (25)$$

$$0 \leq \theta \leq 2 \arccos \frac{1}{m}.$$

Отметим, что К.С. Шифриним аналогичные формулы без вывода приведены в монографии [1] и отличаются от (24) и (25) отсутствием множителя 4 в знаменателе ввиду указанного выше различия в определении индикатрисы.

3.2. Описание зависимости $\alpha(\Theta)$ для $p \geq 2$

Для $p \geq 2$ аналитическую зависимость $\alpha(\Theta)$, а следовательно и $\gamma(\theta)$, построить не удастся. Поэтому нами была исследована возможность построения оптимальных итерационных схем решения зависимости $\alpha(\Theta)$, наличие которой и позволяет рассчитывать зависимость $\gamma(\theta)$. При этом вместо широко применяемого в итерационных процедурах метода Ньютона [9], использующего только первую производную, исследовалась эффективность применения последующих членов разложения в ряд Тейлора. Ограничиваясь первыми тремя производными, определяемыми соотношениями (15), и опуская индексы p , приходим к соотношению

$$\alpha(\Theta) = \alpha_0 + \alpha'(\alpha_0)(\Theta - \Theta_0) + \alpha''(\alpha_0)(\Theta - \Theta_0)^2 / 2 + \alpha'''(\alpha_0)(\Theta - \Theta_0)^3 / 6. \quad (26)$$

Для этого соотношения необходимо в начальной точке Θ_0 знать значение α_0 , поскольку производные выражаются через углы падения. Такими точками являются углы $\alpha = 0$, при которых согласно (1) имеется однозначное соотношение. В первой итерации по соотношению (26) получается приближенное значение угла падения α_1 для заданного

значения угла рассеяния. Это значение α_1 и рассчитанное по соотношению (1) значение Θ_1 служат в качестве α_0 и Θ_0 для следующей итерации с использованием того же выражения (26). Окончание итерационного процесса определяется условием достижения заданной разности $\Theta - \Theta_k$. Эта итерационная схема тестировалась для расчета нижних дополнительных ветвей, определяемых целочисленным значением величины s . Результаты этого тестирования для $m = 1, 1\div 1,9$ и $p \leq 9$ показывают, что при начальном значении $\alpha = 0$ максимальное количество итераций для достижения совпадения первых семи значащих цифр заданного и полученного значений углов рассеяния для всех дополнительных ветвей не превышает 3.

Отметим, что разложение (26) принципиально не может описать углы рассеяния в главной ветви, поскольку оно описывает только однозначные функции. А при $p \geq m$ в области радуг одному углу рассеяния соответствуют два угла α . Для получения зависимости $\alpha(\Theta)$ в этой области отметим, что в точке Θ_{pr} первый член разложения приращения угла рассеяния по углам α определяется второй производной, а именно:

$$\Delta\Theta_{pr} = \Theta - \Theta_{pr} = \frac{1}{2}\Theta''_{pr}\Delta\alpha^2 + \frac{1}{6}\Theta'''_{pr}\Delta\alpha^3 + \dots, \quad (27)$$

$$\Delta\alpha = \alpha - \alpha_{pr}.$$

Для получения обратной зависимости используем следующую итерационную процедуру. В качестве первой итерации берем для $\Delta\alpha$ решение уравнения (27) с одним членом в правой части. Затем после выноса за скобки в правой части $\Delta\alpha^2$ оставшуюся величину $\Delta\alpha$ заменяем на предыдущее решение. Разлагая в ряд квадратный корень, получающийся при решении вновь полученного уравнения, для обратной зависимости получаем соотношение

$$\alpha^{v,n} - \alpha_{pr} = \pm g_1\sqrt{\Theta - \Theta_{pr}} - g_2(\Theta - \Theta_{pr}) \pm g_3\sqrt{(\Theta - \Theta_{pr})^3}, \quad (28)$$

где

$$g_1 = \sqrt{\frac{2}{\Theta''_{pr}}} = \frac{p}{\sqrt{p^2 - 1}} \left(\frac{m^2 - 1}{p^2 - m^2} \right)^{1/4},$$

$$g_2 = \frac{\Theta'''_{pr}}{3(\Theta''_{pr})^2} = \frac{m^2 p^2 + 2p^2 - 3m^2}{6(p^2 - 1)(p^2 - m^2)}.$$

Здесь первые два члена в правой части получаются путем указанной выше итерационной процедуры решения уравнения (27). Верхний знак «+» в первом и третьем членах в правой части соответствует $\alpha^v \geq \alpha_{pr}$ (верхняя ветвь), а нижний знак соответствует $\alpha^v \leq \alpha_{pr}$ (нижняя ветвь). Третий член записан с использованием неопределенного пока коэффициента g_3 , поскольку получение его в явном виде затруднительно. Использование же для этого члена степени 3/2 следует из закономерностей итерационной процедуры на следующих этапах.

Для определения величины g_3 в точке $\theta = \theta_{pr}$ можно использовать определенные из уравнения (28) величины значений g_3 в симметричных относительно α_{pr} точках, взяв среднее из них. Определенные таким методом значения g_3 для нескольких значений m представлены в таблице.

Значения коэффициента g_3 при различных значениях m и p

m	p					
	2	3	4	5	6	7
1,2	0,101	0,0408	0,0243	0,0167	0,0125	0,0098
1,3	0,110	0,0406	0,0237	0,0163	0,0121	0,00945
4/3	0,116	0,0409	0,0238	0,0162	0,0120	0,0094
1,4	0,132	0,0421	0,0241	0,0163	0,0120	0,0094
1,5	0,176	0,0452	0,0249	0,0167	0,0122	0,00952
1,6	0,258	0,0496	0,0262	0,0173	0,0126	0,00975
1,7	0,437	0,056	0,0281	0,0180	0,0132	0,0101
1,8	0,940	0,064	0,0302	0,0190	0,0138	0,0106
1,9	3,42	0,0754	0,033	0,0200	0,0145	0,0110
2,0	—	0,0908	0,0364	0,0219	0,0153	0,0116

Для главной ветви соотношение (28) позволяет получить первую итерацию для определения угла α для заданного значения угла рассеяния θ . Для последующих итераций следует использовать уже соотношение (26). Эффективность такой процедуры была исследована численным методом для диапазона $m = 1, 1\div 2,0$ и $p \leq 9$. Поскольку использование представленных в таблице коэффициентов g_3 связано с некоторыми неудобствами, была использована точка $\alpha = \pi/2$ с получаемым из соотношений (1) и (28) значением g_3 в этой точке. При этом оказалось, что последовательно примененные одна итерация по (28) и не более трех итераций по (26) приводят к совпадению заданных и вычисленных по полученным значениям α углов рассеяния с семью значащими цифрами для всех $p \geq 3$. Для $p = 2$ такая сходимость имеет место при $m \leq 1,95$.

4. Суммарные индикатрисы

Разработанная выше процедура восстановления углов α по заданным значениям углов θ была реализована в виде программы на языке Фортран. В программе предусматриваются вычисление парциальных индикатрис $\gamma_{pk}(\Theta)$, перевод углов Θ в диапазон $0 \div \pi$ и последующее их суммирование при одинаковых углах θ . На рис. 6 (слева) представлены полные индикатрисы рассеяния $\gamma(\theta)$ для неполяризованного света, которые определяются соотношением (10). Учитывались парциальные индикатрисы с p от 0 до 7. Острые пики на кривой соответствуют радугам, значения p для которых обозначены цифрами около этих пиков. Дополнительно там же приводятся кривые $\gamma_{01} = \gamma_0 + \gamma_1$, представляющие суммы парциальных индикатрис с $p = 0$ и 1.

В правой части рис. 6 представлены значения поляризации, определяемой соотношением

$$P = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad (29)$$

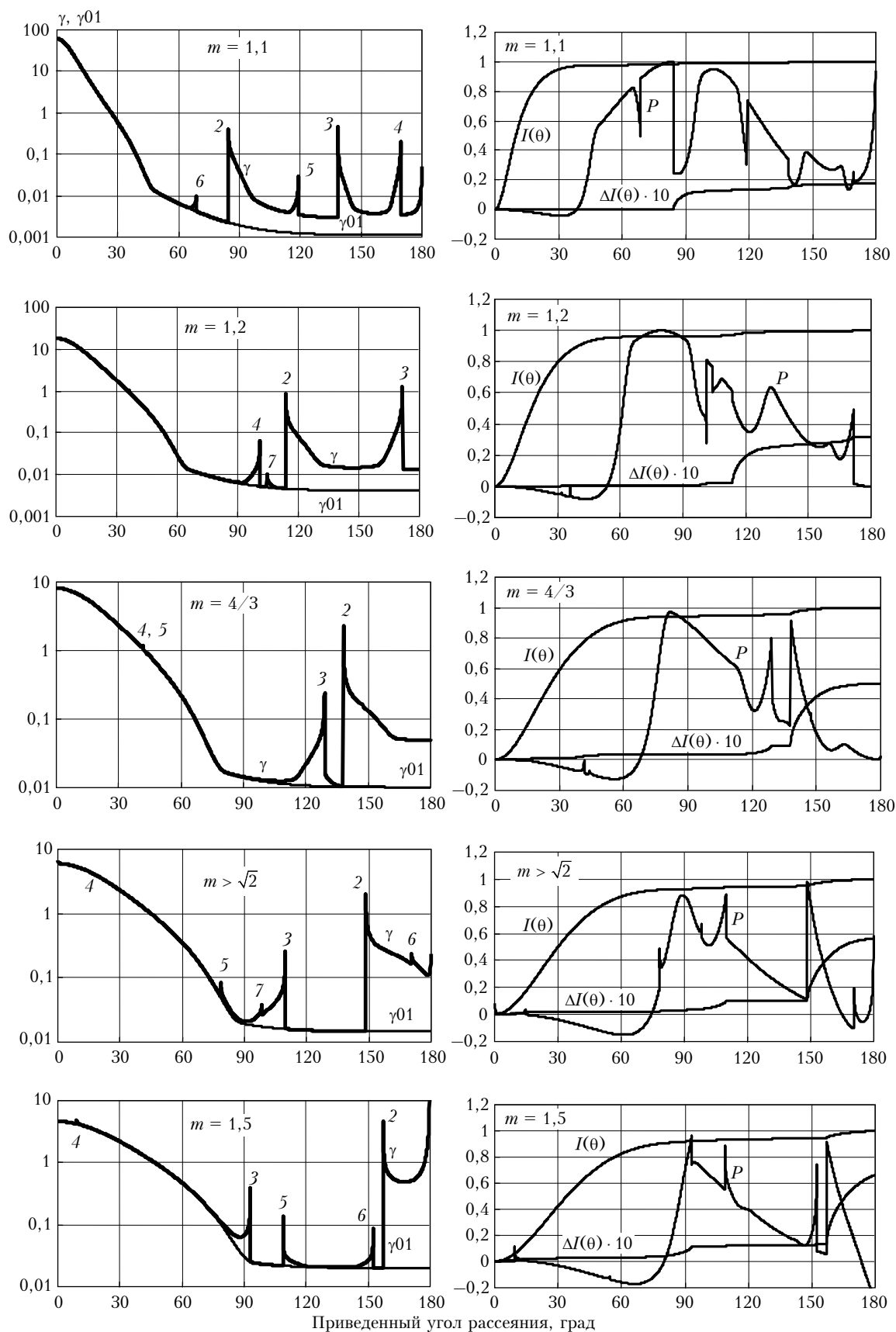


Рис. 6. Значения полной γ и частичной γ_{01} индикатрис рассеяния (слева), текущих значений интеграла $I(\theta)$, разности $\Delta I(\theta) \cdot 10$ и поляризации P (справа) при различных значениях показателя преломления

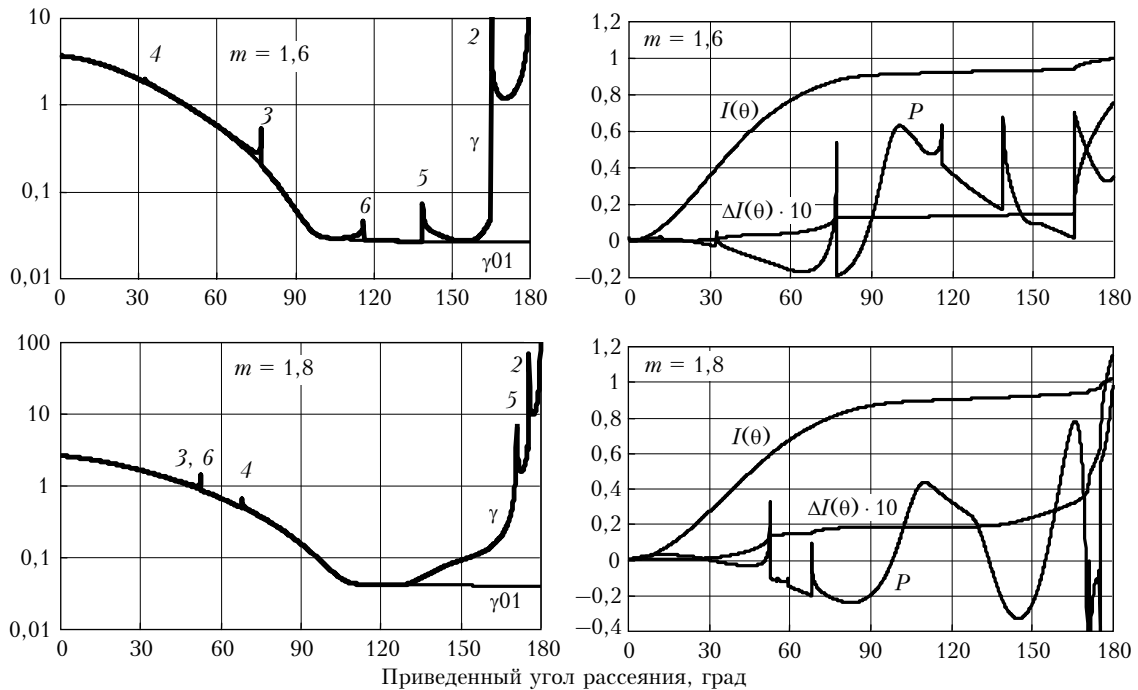


Рис. 6. Окончание

и значения текущего интеграла $I(\theta)$, определяемого формулой

$$I(\theta) = \int_0^{\theta} \gamma(\theta) \sin \theta d\theta. \quad (30)$$

Там же для сравнения приводится

$$\Delta I(\theta) = \int_0^{\theta} (\gamma(\theta) - \gamma_{01}(\theta)) \sin \theta d\theta,$$

представляющая разность этого интеграла и текущего интеграла от γ_{01} .

Из рис. 6 видно, что для малых значений показателя преломления преобладает рассеяние в передние углы, что отмечается в монографии [4]. Для больших величин m рассеяние в направлении назад начинает превышать рассеяние вперед. Объяснение явления увеличения рассеяния назад состоит в том, что, как это следует из данных рис. 5, при $m > \sqrt{2}$ рассеяние верхней ветви с $p = 2$ начинает переходить через угол $\theta = \pi$.

Практически во всей передней полусфере, а также на отдельных участках задней полусферы наблюдается совпадение кривых полной и частичной индикатрис рассеяния. Это означает, что на этих участках могут использоваться аналитические выражения (24), (25) для представления полных индикатрис.

Заключение

Итак, разработана итерационная процедура решения обратной задачи определения угла падения по заданному значению угла рассеяния для парциальных лучей с $p \geq 2$, для которых нет аналитиче-

ского решения. Для дополнительной части нижней ветви, характеризующейся целочисленным значением π , эта задача решается последовательным применением разложения (26) в точке $\alpha = 0$. Для исследованных в работе значений p от 3 до 9 и m от 1,1 до 2,0 количество итераций не превышает трех для достижения машинной точности при использовании одинарной точности. Для главной части нижней ветви и для верхней ветви вначале используется разложение (28), в котором параметр g_3 определяется для $\alpha = \pi/2$, а затем опять применяется разложение (26). Все указанные выше операции проводятся для углов θ , определяемых соотношением (1). Операция приведения углов θ к диапазону $0 - \pi$ осуществляется перед суммированием парциальных лучей и заключается в использовании функции $\arccos(\cos \theta)$.

С применением указанной выше процедуры получены суммарные индикатрисы рассеяния для диапазона $m = 1,1 - 1,8$, которые представлены в графическом виде. Выявлено, что с увеличением показателя преломления от 1,1 до 1,5 наблюдается увеличение угла, в котором сосредоточено 90% рассеянной энергии от ~ 20 до 90° . В большом диапазоне углов рассеяния ($0 - 90^\circ$ и в отдельных поддиапазонах без радуг) значение индикатрисы рассеяния определяется суммой парциальных лучей с $p = 0$ и 1, для индикатрис которых имеются аналитические соотношения. С увеличением значений m при $m > \sqrt{2}$ наблюдается резкое увеличение рассеяния в обратном направлении, обусловленное попаданием рассеяния парциального луча с $p = 2$ в эту область.

1. Шифрин К.С. Рассеяние света в мутной среде. М.; Л.: ГИТТЛ, 1951. 289 с.
2. Хюлтс Ван де. Рассеяние света малыми частицами. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. 536 с.

3. *Борен К., Хафмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 662 с.
4. *Шифрин К.С.* Введение в оптику океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1983. 278 с.
5. *Невзоров В.* Явление глории и природа жидкокапельной фракции в холодных атмосферных облаках // Оптика атмосфер. и океана. 2007. Т. 20. № 8. С. 674–681.
6. *Стерлядкин В.В.* Рассеяние света дождевыми каплями // Оптика атмосфер. и океана. 2000. Т. 13. № 5. С. 534–538.
7. *Глуценко А.С., Стерлядкин В.В.* Оптические свойства дождевых капель. Рассеяние в переднюю полусферу наблюдения при горизонтальном освещении // Оптика атмосфер. и океана. 2005. Т. 18. № 3. С. 207–215.
8. *Ландсберг Г.С.* Оптика. М.: Физматгиз, 1976. 926 с.
9. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Физматгиз, 1969. 608 с.
10. *Laven P.* How are glories formed // Appl. Opt. 2005. V. 44. N 27. P. 5675–5683.

N.P. Romanov. A computational method and properties of phase scattering functions of transparent balls in the geometric optics approximation.

A systematic description of basic laws of scattering within the framework of geometric optics is given in the paper along with a graphical representation for the refractive index $m = 4/3$ of partial phase scattering functions, presenting rays after p transitions inside a ball. Then the computational procedure for partial phase scattering functions in dependence of the scattering angle is studied. The procedure is iterative with the use of expansion of the inverse dependence of the incidence angle on the scattering angle. For a series of m values from 1.1 to 1.8 the graphs of summed phase scattering functions, obtained by this procedure, are presented. It follows from the analysis of the graphs that at the increase of the refractive index from 1.1 to 1.5 a growth of the angle (in which 90% of the scattered energy is concentrated) from ~ 20 to 90° is observed. At growing values of $m > \sqrt{2}$ a sharp increase of scattering in the back direction is observed. This is caused by shifting of a partial beam with $p = 2$ into this region. In a wide range of scattering angles in the frontal semisphere and in different subranges in the back semisphere the value of the summed phase scattering function is determined by the sum of partial phase scattering functions with $p = 0$ and 1, for which analytical expressions exist.