

В.П. Будак, Д.В. Лисицин, В.А. Селиванов, Г.Г. Церетели

## РАСЧЕТ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ИЗЛУЧЕНИЯ, ОТРАЖЕННОГО ПЛОСКИМ СЛОЕМ МУТНОЙ СРЕДЫ

Изложен метод уточнения векторного обобщения малоугловой модификации метода сферических гармоник для задней полусферы углов визирования. Уточнение базируется на методах теории возмущений. Приводятся численные результаты проведенного уточнения. Получен и проанализирован предельный переход от векторной малоугловой модификации метода сферических гармоник к форме малоуглового приближения, известной из работ Л.С. Долина и обобщенной на случай поляризации Э.П. Зеге и Л.И. Чайковской. Это делает малоугловую модификацию метода сферических гармоник общей формой малоуглового приближения.

Анализ результатов дистанционного зондирования подстилающей поверхности оптическими методами может быть эффективнее, если привлечь априорную информацию, полученную из расчетов поляризационных характеристик излучения, отраженного плоским слоем мутной среды. Как показано в [1], малоугловая модификация метода сферических гармоник (далее по тексту: МСГ – малоугловая модификация метода сферических гармоник, СГ – сферические гармоники) позволяет рассчитывать поля поляризационных характеристик излучения с удовлетворительной точностью при широком варьировании оптических параметров. Однако приближение, во-первых, накладывает достаточно жесткие ограничения на вид матрицы рассеяния среды: медленное монотонное убывание ее углового спектра при разложении по обобщенным сферическим функциям, и, во-вторых, имеет значительную погрешность в задней полусфере углов визирования излучения.

Подавляющее большинство природных образований представляет собой гетерогенные структуры с внедрениями крупных частиц, которые в соответствии с теорией Г. Ми имеют матрицы рассеяния, весьма близкие по свойствам к требованиям МСГ [2, 3]. Для уточнения полученного в рамках МСГ решения векторного уравнения переноса излучения (ВУПИ) представим матрицу рассеяния в виде суммы двух компонент:

$$\overset{\leftrightarrow}{X}(\mu) = a \overset{\leftrightarrow}{X}_m(\mu) + (1+a) \overset{\leftrightarrow}{X}_b(\mu), \quad (1)$$

где  $\overset{\leftrightarrow}{X}_m(\mu)$  – малоугловая часть матрицы рассеяния, имеющая медленно и монотонно убывающий угловой спектр;  $\overset{\leftrightarrow}{X}_b(\mu)$  – возмущение малоугловой матрицы, имеющее в угловом спектре незначительное число гармоник ( $k \leq 3 \div 5$ );  $(1-a)$  – малый параметр возмущения,  $a \lesssim 1$ ;  $\mu$  – косинус угла рассеяния.

Для удобства дальнейших преобразований представим ВУПИ в плоской геометрии для вектор-параметра Стокса  $\mathbf{L}(\tau, \hat{\mathbf{I}})$  в операторной форме:

$$\mathbb{D} \mathbf{L} = \mathbf{S} \mathbf{L}, \quad (2)$$

где  $\mathbb{D} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial \tau} + \hat{\mathbf{I}}$  – дифференциальный оператор переноса излучения в малоугловом приближении в векторной форме (1);  $\mu_0$  – косинус угла падения параллельного потока излучения на плоский слой;  $\mu_0 = (\hat{\mathbf{I}}_0, \hat{\mathbf{z}})$ ,  $\hat{\mathbf{z}}$  – единичный вектор вдоль оси  $OZ$ , направленной вниз перпенди-

кулярно границе слоя;  $\tau = \int_0^z \varepsilon(z) dz$  – оптическая толщина;  $\mathbb{S}\mathbf{L} = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint \overleftrightarrow{S}(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') \mathbf{L}(\tau, \hat{\mathbf{l}}) d\hat{\mathbf{l}}'$  – инте-

грал столкновений;  $\overleftrightarrow{S}$  – фазовая матрица. Остальные использованные обозначения сохранены из статьи [1].

Уравнение (2) задачи отражения поляризованного излучения слоем мутной среды дополним краевыми условиями

$$\begin{cases} \mathbf{L}(\tau, \hat{\mathbf{l}}) \Big|_{\Gamma_1} = \mathbf{L}_0 \delta(\hat{\mathbf{l}} - \hat{\mathbf{l}}_0), \\ \mathbf{L}(\tau, \hat{\mathbf{l}}) \Big|_{\Gamma_2} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\mathbf{L}_0$  – вектор-параметр падающего излучения;  $\Gamma_1 = \{z = 0, \hat{\mathbf{l}} \in \Omega_+\}$ ;  $\Gamma_2 = \{z = H, \hat{\mathbf{l}} \in \Omega_-\}$ ;  $\Omega_+$  и  $\Omega_-$  – нижняя и верхняя полусферы визирования соответственно ( $\Omega_+ \cup \Omega_- = \Omega$ );  $H$  – полная толщина слоя.

В соответствии с (1) оператор  $\mathbb{S}$  в уравнении (2) также разделяется на две части:

$$\mathbb{S} = a \mathbb{S}_M + (1 - a) \mathbb{S}_B. \quad (4)$$

Будем искать решение краевой задачи (2) – (3) в виде ряда теории возмущений

$$\mathbf{L}(\tau, \hat{\mathbf{l}}) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - a)^n \mathbf{L}_{(n)}(\tau, \hat{\mathbf{l}}). \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в ВУПИ (2), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\mathbb{D} - a \mathbb{S}_M - (1 - a) \mathbb{S}_B) (1 - a)^n \mathbf{L}_{(n)}(\tau, \hat{\mathbf{l}}) = 0. \quad (6)$$

Из равенства (6) следует равенство нулю коэффициентов при одинаковых степенях  $(1 - a)$ , что эквивалентно системе рекуррентных краевых задач:

$$\begin{aligned} n = 0: \quad & \mathbb{D} \mathbf{L}_{(0)} = a \mathbb{S}_M \mathbf{L}_{(0)}, \quad (7) \\ & \begin{cases} \mathbf{L}_{(0)}(\tau, \hat{\mathbf{l}}) \Big|_{\Gamma_0} = \mathbf{L}_0 \delta(\hat{\mathbf{l}} - \hat{\mathbf{l}}_0), \\ \mathbf{L}_{(0)}(\tau, \hat{\mathbf{l}}) \Big|_{\Gamma_2} = 0; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = k \geq 1: \quad & \mathbb{D} \mathbf{L}_{(k)} = a \mathbb{S}_M \mathbf{L}_{(k)} + \mathbb{S}_B \mathbf{L}_{(k-1)}, \quad (8) \\ & \begin{cases} \mathbf{L}_{(k)}(\tau, \hat{\mathbf{l}}) \Big|_{\Gamma_1} = 0, \\ \mathbf{L}_{(k)}(\tau, \hat{\mathbf{l}}) \Big|_{\Gamma_2} = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

где  $\Gamma_0 = \{z = 0, \hat{\mathbf{l}} \in \Omega\}$ , что является необходимым условием для перехода к МСГ [1, 4].

Нетрудно видеть, что первая краевая задача (7) полностью соответствует условиям применимости МСГ и ее решение для случая плоской геометрии можно записать в виде

$$\mathbf{L}_{(0)}(\tau; \nu, \varphi) = \sum_{n=-1}^{+1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} e^{i2n\varphi} \overleftrightarrow{Y}_l^{2n}(\nu) \overleftrightarrow{\ell}_l(\tau) \mathbf{f}_l^{2n}(0), \quad (9)$$

где  $\{\overset{\leftrightarrow}{Y}_l^m(\nu)\}$  – обобщенные сферические функции [1];  $\nu = (\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}_0)$ ;  $\mathbf{f}_l^m(0)$  – коэффициенты разложения правой части верхнего граничного условия краевой задачи (7) по обобщенным сферическим функциям, которые в плоскости референции  $(\hat{\mathbf{I}} \times \hat{\mathbf{I}}_0)$  для падающего излучения яркости  $L$ , степени поляризации  $p$ , эллиптичности  $q$  [6], плоскости поляризации, совпадающей с плоскостью  $(\hat{\mathbf{I}}_0 \times \hat{\mathbf{z}})$ ,  $\forall l$  имеют вид

$$\mathbf{f}_l^0(0) = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - q \\ 1 + q \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_l^m(0) = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ 0 \\ p \end{bmatrix}; \quad (10)$$

$\overset{\leftrightarrow}{\ell}_l(\tau)$  – угловой спектр матричной поверхностной функции Грина  $\overset{\leftrightarrow}{\ell}(\tau; \hat{\mathbf{I}}_0 \rightarrow \hat{\mathbf{I}})$  (матрицы переноса [6]):

$$\mathbf{L}_{(0)}(\tau; \hat{\mathbf{I}}) = \oint \overset{\leftrightarrow}{R}(\hat{\mathbf{I}} \times \hat{\mathbf{I}}' \rightarrow \hat{\mathbf{I}} \times \hat{\mathbf{I}}_0) \overset{\leftrightarrow}{\ell}(\tau; \hat{\mathbf{I}}' \rightarrow \hat{\mathbf{I}}) \overset{\leftrightarrow}{R}(\hat{\mathbf{I}}' \times \hat{\mathbf{I}}_0 \rightarrow \hat{\mathbf{I}} \times \hat{\mathbf{I}}') \mathbf{L}_0 \delta(\hat{\mathbf{I}}' - \hat{\mathbf{I}}_0) d\hat{\mathbf{I}}', \quad (11)$$

где  $\overset{\leftrightarrow}{R}$  – ротатор, причем разложение матрицы переноса, как видно из (9) и (11), имеет вид, аналогичный разложению матрицы рассеяния среды:

$$(\overset{\leftrightarrow}{\ell}(\tau; \hat{\mathbf{I}}' \rightarrow \hat{\mathbf{I}}))_{rs} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (\overset{\leftrightarrow}{\ell}_l(\tau))_{rs} P_{rs}^l((\hat{\mathbf{I}}', \hat{\mathbf{I}})). \quad (12)$$

Связь обобщенных полиномов Лежандра  $P_{rs}^l$  с  $\overset{\leftrightarrow}{Y}_l^m$  рассмотрена в [1]. В решении (9) при использовании МСГ и в соответствии с (7) необходимо провести замену альбедо однократного рассеяния среды  $\Lambda$  на  $a\Lambda$ .

Краевая задача (9) аналогична задаче (7), но с нулевыми граничными условиями и функцией источников в правой части уравнения. По определению матрицы переноса и на основании связи [7] поверхностной функции Грина с объемной решение задачи (9) можно записать в виде интеграла суперпозиции (для случая  $\hat{\mathbf{I}} \in \Omega_+$ )

$$\mathbf{L}_{(1)}(\tau; \hat{\mathbf{I}}) = \int_{\tau}^{\tau_0} \oint \frac{1}{|(\hat{\mathbf{I}}', \hat{\mathbf{z}})|} \overset{\leftrightarrow}{R}(\hat{\mathbf{I}} \times \hat{\mathbf{I}}' \rightarrow \hat{\mathbf{I}}_0 \times \hat{\mathbf{I}}) \overset{\leftrightarrow}{\ell}(\tau' - \tau; \hat{\mathbf{I}}' \rightarrow \hat{\mathbf{I}}) \overset{\leftrightarrow}{R}(\hat{\mathbf{I}}' \times \hat{\mathbf{I}}_0 \rightarrow \hat{\mathbf{I}} \times \hat{\mathbf{I}}') \mathbb{S}_m \mathbf{L}_0(\tau', \hat{\mathbf{I}}) d\hat{\mathbf{I}}' d\tau'. \quad (13)$$

После подстановки значения оператора  $\mathbb{S}_m$  и с учетом теоремы оптической взаимности для матрицы переноса согласно [7–8] имеем

$$\frac{1}{|(\hat{\mathbf{I}}', \hat{\mathbf{z}})|} \overset{\leftrightarrow}{\ell}(\tau' - \tau; \hat{\mathbf{I}}' \rightarrow \hat{\mathbf{I}}) = - \frac{1}{(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{z}})} \overset{\leftrightarrow}{\ell}(\tau' - \tau; -\hat{\mathbf{I}} \rightarrow -\hat{\mathbf{I}}') \quad (14)$$

после чего выражение (13) примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{(1)}(\tau; \hat{\mathbf{I}}) &= \frac{\Lambda}{4\pi\eta_0} \int_{\tau}^{\tau_0} \oint \overset{\leftrightarrow}{R}(\hat{\mathbf{I}} \times \hat{\mathbf{I}}' \rightarrow \hat{\mathbf{I}}_0 \times \hat{\mathbf{I}}) \overset{\leftrightarrow}{\ell}(\tau' - \tau; \hat{\mathbf{I}}' \rightarrow \hat{\mathbf{I}}) \overset{\leftrightarrow}{R}(\hat{\mathbf{I}}' \times \hat{\mathbf{I}}_0 \rightarrow \hat{\mathbf{I}} \times \hat{\mathbf{I}}') \oint \overset{\leftrightarrow}{R}(\hat{\mathbf{I}}'' \times \hat{\mathbf{I}}' \rightarrow \hat{\mathbf{I}}_0 \times \hat{\mathbf{I}}') \times \\ &\times \overset{\leftrightarrow}{X}_m(\hat{\mathbf{I}}'', \hat{\mathbf{I}}') \overset{\leftrightarrow}{R}(\hat{\mathbf{I}}'' \times \hat{\mathbf{I}}_0 \rightarrow \hat{\mathbf{I}}'' \times \hat{\mathbf{I}}') \mathbf{L}_0(\tau', \hat{\mathbf{I}}') d\hat{\mathbf{I}}'' d\hat{\mathbf{I}}' d\tau', \end{aligned}$$

где  $\eta_0 = -(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{z}})$ .

Отсюда на основании теоремы сложения для обобщенных полиномов Лежандра [5] получим

$$L_{(1)}(\tau; \nu, \varphi) = \frac{\Lambda}{4\pi\eta_0} \sum_{n=-1}^{+1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} e^{i2n\varphi} \overset{\leftrightarrow}{Y}_l^{2n}(\nu) \overset{\leftrightarrow}{\ell}_l^{(1)}(\tau) f_l^{2n}(0),$$

где  $\overset{\leftrightarrow}{\ell}_l^{(1)}(\tau) = \int_{\tau}^{\tau_0} \overset{\leftrightarrow}{\ell}(\tau' - \tau) \overset{\leftrightarrow}{X}_B^{(l)} \overset{\leftrightarrow}{\ell}_l(\tau') d\tau'$  – угловой спектр матрицы переноса первого порядка теории возмущения.

В соответствии с полученным в [1] решением ВУПИ в МСГ последний интеграл вычисляется явно и в результате находим

$$\overset{\leftrightarrow}{\ell}_l^{(1)}(\tau) = \frac{\Lambda\mu_0}{4\pi} \sum_{i,j=1}^{+4} \frac{\exp\{-(\tau/\mu_0)(1 - \Lambda(\alpha + \Delta_i))\}}{(\eta_0 + \mu_0)(1 - \alpha\Lambda) - \Lambda(\Delta_i\eta_0 + \Delta_j\mu_0)} \frac{\overset{\leftrightarrow}{V}_i \overset{\leftrightarrow}{X}_B^{(l)} \overset{\leftrightarrow}{V}_j}{4\Delta_i \Delta_j} \{1 - \exp[-(\tau_0 - \tau)/(\eta_0\mu_0)] \times$$

$$\times ((\eta_0 + \mu_0)(1 - \alpha\Lambda) - \Lambda(\Delta_i\eta_0 + \Delta_j\mu_0))\}, \quad (15)$$

где  $\overset{\leftrightarrow}{V}_i, \alpha, \Delta_i$  – введенные в [1] матрицы и коэффициенты;  $\overset{\leftrightarrow}{X}_B^{(n)}$  – угловой спектр матрицы  $\overset{\leftrightarrow}{X}_B(\mu)$ .

Полученное решение (15), аналогичное нулевому приближению МСГ [1], также обладает свойствами симметрии точного решения. В дальнейшем для краткости, по аналогии с [9 – 11], будем его называть квазиоднократным.

На рис. 1 нанесены кривые для степени линейной поляризации в толще мутной среды в случае нормального падения ( $\mu_0 = 1$ ) естественного света на слой. Угол визирования  $\theta$  отсчитывается от оси  $OZ$ ,  $\cos \theta = (\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{z}})$ . В качестве точного использовано решение С. Чандрасекара. Кривая «возмущение» соответствует квазиоднократному приближению. Представление (1) для рэлеевской матрицы рассеяния реализовано в соответствии с [1]. Из приведенных на рисунках графиков видно, что квазиоднократное приближение существенно уточняет МСГ для задней полусферы визирования и его точность достаточна для решения многих задач дистанционного зондирования окружающей среды.

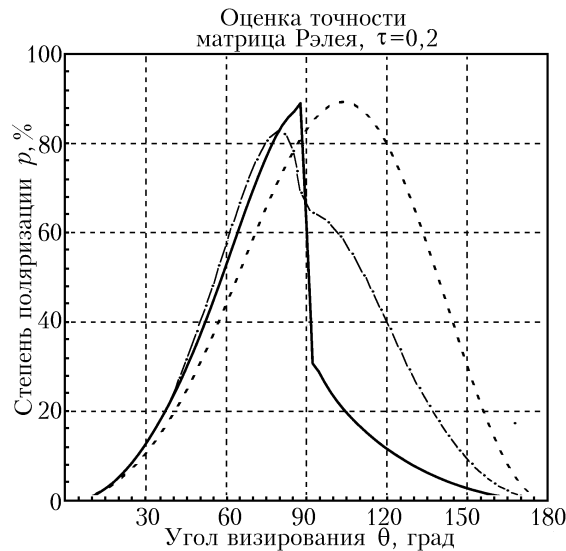


Рис. 1. Сравнение расчетов степени поляризации светового поля в плоском слое мутной среды: сплошная кривая – точное решение, штриховая – «малоугловое», штрихпунктирная – «возмущение»

Из литературы известна форма малоуглового приближения [12], в том числе попытка его обобщения на векторный случай ВУПИ [9 – 11]. Однако это обобщение не описывает полностью все свойства частично поляризованного излучения, включенные в МСГ. В [4] проанализирована связь скалярного варианта МСГ с формой [12]. Рассмотрим связь векторного обобщения МСГ [1] с приближением [9 – 11]. Она основана на предельном переходе от обобщенных сферических функций к соответствующим функциям Бесселя  $\forall m, n$  [5]:

$$\lim_{v \rightarrow 1} P_{mn}^k(v) = i^{m-n} J_{m-n}(\rho l_{\perp}), \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (16)$$

где  $l_{\perp}$  – длина проекции  $\mathbf{I}_{\perp}$  единичного вектора направления визирования  $\hat{\mathbf{I}}$  на плоскость, ортогональную направлению начала отсчета угла визирования;  $v = \cos(l_{\perp}/\rho)$  – косинус угла визирования  $\gamma$ ;  $\rho$  – длина  $\hat{\mathbf{I}}$ , равная радиусу вышеупомянутой сферы:  $\rho \equiv 1$ , однако при  $v \rightarrow 1$  (т.е.  $l_{\perp} \rightarrow \gamma$ )  $l_{\perp} \ll \rho$  и основное условие предельного перехода выполняется.

Аналогично проделанному в [12] в векторном случае для бесконечно широкого светового пучка в плоскопараллельном слое в СР-представлении поляризации [13] перейдем от векторов  $\hat{\mathbf{I}}$  к радиусам-векторам  $\mathbf{I}_{\perp}$  и допустим, что

$$\begin{cases} \mathbf{L}(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = \mathbf{L}(\tau, \mathbf{I}_{\perp}) = \mathbf{L}(\tau, \mathbf{I}_{\perp}, \varphi); \\ \overleftrightarrow{\mathbf{X}}(\hat{\mathbf{I}}', \hat{\mathbf{I}}) \approx \overleftrightarrow{\mathbf{X}}(\Delta_{\perp}), \end{cases} \quad (17)$$

где  $\Delta_{\perp}$  – длина вектора  $\mathbf{I}'_{\perp} - \mathbf{I}_{\perp}$  (рис. 2). При этом систему координат удобно связать с направлением  $\hat{\mathbf{I}}_0$  падения излучения на слой – началом отсчета угла визирования. В этом случае сферический треугольник, образованный единичными векторами  $\hat{\mathbf{I}}'$ ,  $\hat{\mathbf{I}}$  и  $\hat{\mathbf{I}}_0$ , становится обыкновенным треугольником в плоскости  $(\mathbf{I}_{\perp} \times \mathbf{I}'_{\perp}) \perp \hat{\mathbf{I}}_0$ , а углы Эйлера [5]  $\chi$ ,  $\delta = \arccos \mu = \arccos(\hat{\mathbf{I}}', \hat{\mathbf{I}})$  (угол рассеяния),  $\chi'$  переходят в углы между сторонами этого треугольника (см. рис. 2), причем очевидно, что для малых углов рассеяния  $\Delta_{\perp} \rightarrow \delta$ . При этом вращения на сфере бесконечно большого радиуса и движения в плоскости становятся эквивалентными, равно как и соответствующие им группы преобразований.

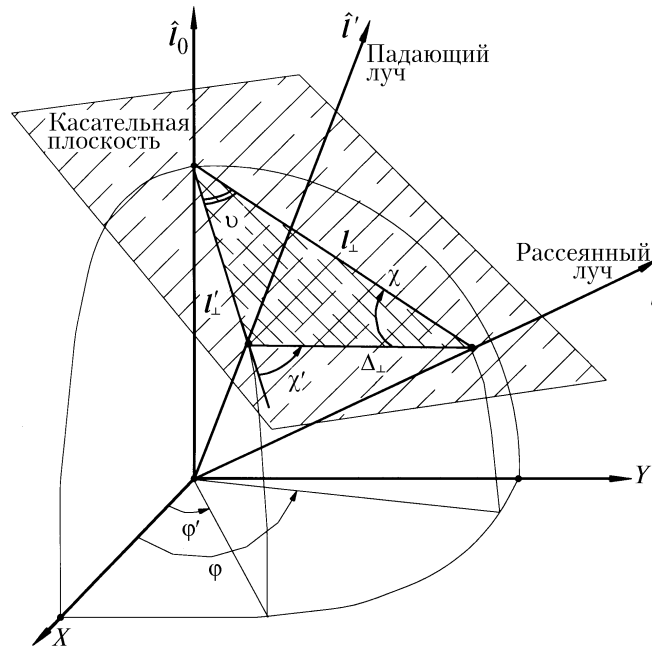


Рис. 2. Замена переменных

Используя предельный переход (16), от матриц  $\overleftrightarrow{\mathbf{Y}}_l^m(v) = \text{Diag}\{P_{2,m}(v); P_{0,m}(v); P_{0,m}(v); P_{2,m}(v)\}$ , используемых для разложения полей  $\mathbf{L}$  в СР-представлении, перейдем к матрицам

$$\overleftrightarrow{\mathbf{Z}}_m(x) = \lim_{v \rightarrow 1} \overleftrightarrow{\mathbf{Y}}_k^m(v) = i^m \text{Diag}\{-J_{m-2}(x); J_m(x); J_m(x); -J_{m+2}(x)\}, \quad (18)$$

где  $x = \rho l_{\perp}$ .

Сделанные допущения позволяют представить поле вектор-параметра Стокса (17) в виде преобразования Ганкеля с матричным ядром  $\overset{\leftrightarrow}{Z}_m$  (18)

$$\mathbf{L}(\tau, l_{\perp}, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \overset{\leftrightarrow}{Z}_m(p l_{\perp}) \mathbf{L}^m(\tau, p) p dp, \quad (19)$$

где  $\mathbf{L}^m(\tau, p)$  – азимутально-пространственный спектр для  $\mathbf{L}(\tau, l_{\perp})$ .

Выразим также элементы матрицы рассеяния (17) через преобразования Ганкеля соответствующих порядков:

$$X_{rs}(\Delta_{\perp}) = \frac{i^{r-s}}{2\pi} \int_0^{\infty} J_{r-s}(q \Delta_{\perp}) X_{rs}(q) q dq, \quad (20)$$

где  $r, s = 2, 0, 0, -2$  [13].

При переходе от матриц  $\overset{\leftrightarrow}{X}(\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{l}}) = \overset{\leftrightarrow}{X}(\mu)$  к матрицам  $\overset{\leftrightarrow}{X}(\Delta_{\perp})$  следует учесть, что в области малых углов  $\mu \simeq 1 - 0,5 \Delta_{\perp}^2$ .

Далее, подставляя выражения (19) и (20) в интегральную часть оператора ВУПИ и используя простые геометрические соотношения (см. рис. 2), имеем для  $r$ -го элемента ее вектор-столбца

$$\begin{aligned} \{\mathbb{S} \mathbf{L}\}_r &= \frac{\Lambda}{4\pi} \oint e^{-ir\chi} \sum_s X_{rs}(\Delta_{\perp}) e^{is\chi'} L_s(\tau, l'_{\perp}) d^2 l'_{\perp} = \frac{\Lambda}{4\pi} \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_s e^{is\varphi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} i^{r-s} e^{-ir\chi} \times \\ &\times J_{r-s}(q \Delta_{\perp}) e^{is\chi'} X_{rs}(q) q dq \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i(m-s)\varphi} \int_0^{\infty} i^{s-m} J_{s-m}(p l_{\perp}) L_s^m(\tau, p) p dp l'_{\perp} dl'_{\perp} d\varphi' = \\ &= \frac{\Lambda}{2(2\pi)^3} \sum_s e^{i(r+s)\varphi} \sum_{m,n} i^{r-m} e^{-in\varphi} \int_0^{\infty} J_{s-n}(q l_{\perp}) X_{rs}(q) dq \int_0^{\infty} L_s^m(\tau, p) \int_0^{\infty} J_{r-n}(l'_{\perp} q) J_{s-m}(l'_{\perp} p) l'_{\perp} \times \\ &\times dl'_{\perp} \int_0^{2\pi} e^{i(m+n-r-s)\varphi'} d\varphi' p dp = \frac{\Lambda}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m i^{r-m} e^{im\varphi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} J_{r-m}(q l_{\perp}) \sum_s X_{rs}(q) L_s^m(\tau, q) q dq, \end{aligned}$$

или в матричной форме:

$$\mathbb{S} \mathbf{L}(\tau, l_{\perp}) = \frac{\Lambda}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \frac{(-1)^m}{2\pi} \int_0^{\infty} \overset{\leftrightarrow}{Z}_m(q l_{\perp}) \overset{\leftrightarrow}{X}(q) \mathbf{L}^m(\tau, q) q dq. \quad (21)$$

В (21) использовано условие ортогональности функций Бесселя

$$\int_0^{\infty} J_m(xy) J_n(xz) x dx = \frac{(-1)^m}{y} \delta_{mn} \delta(y-z),$$

где  $\delta_{mn}$  – символ Кронекера;  $\delta(y-x)$  – функция Дирака.

Для матриц  $\overset{\leftrightarrow}{Z}$  это условие можно переписать в виде

$$\int_0^{\infty} \overset{\leftrightarrow}{Z}_m(xy) \overset{\leftrightarrow}{Z}_n(xz) x dx = \frac{(-1)^m}{y} \delta_{mn} \delta(y-z) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{1}}, \quad (22)$$

где  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{1}} = \text{Diag}\{1; 1; 1; 1\}$ .

Теорема сложения для функций Бесселя [5], играющая ключевую роль при выводе (21), в используемых обозначениях (см. рис. 2) записывается:

$$e^{-ir\chi} J_{r-s}(q \Delta_{\perp}) e^{is\chi} = e^{ir\vartheta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{r-n}(q l'_{\perp}) J_{s-n}(q l_{\perp}) e^{-in\vartheta}. \quad (23)$$

Преобразуем дифференциальный оператор переноса (2) в «малоугловом» виде, пренебрегая в нем слагаемым с множителем  $l_{\perp}^2$  для малых углов рассеяния [12]. Далее подставим выражения (19) и (21) в соответствующие части ВУПИ, умножим обе части на  $\overleftrightarrow{Z}_n(p l_{\perp}) e^{in\varphi}$  и проинтегрируем в пределах допустимых значений переменных  $l_{\perp}$  и  $\varphi$ . Тогда на основе условия ортогональности (22) получим для азимутально-пространственного спектра матричной функции Грина систему из 4 дифференциальных уравнений:

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial \tau} \overleftrightarrow{\ell}(\tau; p) = - \left[ \mathbf{1} - \frac{1}{4\pi} \overleftrightarrow{X}(p) \right] \overleftrightarrow{\ell}(\tau; p). \quad (24)$$

Система (24) полностью идентична полученной в МСГ, и, очевидно, ее решение сохраняет все обсуждаемые в [1] свойства решения по МСГ и его симметрию.

Если пренебречь внедиагональными элементами в SP-представлении матрицы  $\overleftrightarrow{X}(p)$ , то можно видеть, что решение системы (24) перейдет в полученное в [9 – 11]. При малоугловой модификации СГ и его следствии (24) сохраняется полная матрица рассеяния (пренебрегается только малостью обратного рассеяния) и благодаря использованию СР-представления точно учитываются все повороты плоскости референции в каждом акте рассеяния. В малоугловых методах [9 – 11] для нулевого приближения используется чисто диагональная матрица, описывающая ослабление поляризации падающего пучка в близких к его оси направлениях, что пригодно, например, для решения задач о трансформациях лазерных пучков. Полная матрица рассеяния позволяет МСГ описывать как преобразование в акте рассеяния поляризованного света, так и «генерацию» средой линейной поляризации из естественного света за счет «перекачки» энергии из некогерентной части в когерентную, что существенно для решения задач оптического дистанционного зондирования.

Термин же «малоугловая модификация» понимается в смысле малой скорости убывания амплитуд  $\overleftrightarrow{\ell}_k(\tau)$  от номера  $k$ . В скалярном варианте это эквивалентно в области углового распределения требованию сильной вытянутости тела яркости. В векторном же случае вытянутость характерна лишь для энергетического компонента вектор-параметра Стокса, однако свойство спектра сохраняется для всех его компонент.

Таким образом, обобщенная в [1] на случай учета поляризации излучения МСГ является наиболее общей формой малоуглового приближения. Применение к МСГ квазиоднократного приближения позволяет в аналитически простой форме с достаточной для практики точностью описывать поля поляризационных характеристик излучения во всех углах визирования и в достаточно широких пределах варьирования оптических характеристик среды.

1. Астахов И.Е., Будаков В.П., Лисицин Д.В., Селиванов В.А. // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. № 6. С. 753–761.
2. Хюлст ван де Г. Рассеяние света малыми частицами. М.: ИЛ, 1961. 636 с.
3. De Rooij W.A., van der Stap C.C.A.H. // Astronomy & Astrophysics. 1984. V. 131. P. 237–248.
4. Будаков В.П., Сармин С.Э. // Оптика атмосферы. 1990. Т. 3. № 9. С. 981–987.
5. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965. 588 с.
6. Розенберг Г.В. // УФН. 1977. Т. 121. № 1. С. 97–138.
7. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М.: Мир, 1973. 256 с.
8. Perrin F. // Journ. Chem. Phys. 1942. V. 10. P. 415–427.
9. Зега Э.П., Чайковская Л.И. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1985. Т. 21. № 10. С. 1043–1049.
10. Васильков А.П., Кондранин Т.В., Мясников Е.В. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1988. Т. 24. № 8. С. 873–882.
11. Ito S., Oguchi T. // JOSA. 1989. V. 6. № 12. P. 1852–1858.
12. Долин Л.С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1963. Т. 7. № 2. С. 380–382.
13. Kušcer I., Ribarič M. // Optica Acta. 1959. V. 6. № 1. P. 42–51.

V. P. Budak, D. V. Lisitsin, V. A. Selivanov, G. G. Tsereteli. **Calculation of Polarization Characteristics of Radiation Reflected by Plane-parallel Slab of Turbid Medium.**

The improvement way for vectorial generalization of small-angle modification of spherical harmonics approximation for backward viewing hemisphere has been expounded. It is based on perturbations theory method. The numerical results of the improvement carried out are adduced. Besides it is obtained and analyzed the limit transition from vectorial small-angle modification of spherical harmonics approximation to small-angle approximation, obtained by Dolin L.S. and its polarization generalization of Zege E.P. and Chaikovskaya L.I. This fact makes small-angle modification of spherical harmonics approximation to be the general small-angle approximation form.