

## ОПТИКА СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

УДК 535.2:621.373.826

# Когерентность бесселева пучка в турбулентной атмосфере

И.П. Лукин\*

*Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН  
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1*

Поступила в редакцию 29.12.2010 г.

Исследуются характерные особенности формирования бесселева оптического пучка в турбулентной атмосфере. Анализ задачи основывается на решении уравнения для функции взаимной когерентности второго порядка поля бесселева пучка оптического излучения. Для средней интенсивности бесселева пучка получено условие, которое является количественным критерием возможности формирования данного пучка на протяженной трассе в турбулентной атмосфере. Изучено поведение степени когерентности бесселева оптического пучка в зависимости от параметров пучка и характеристик турбулентной атмосферы. Обнаружено, что при низких уровнях флуктуаций в турбулентной атмосфере степень когерентности бесселева пучка имеет характерный осциллирующий вид, где число максимумов и минимумов при одинаковом уровне атмосферной турбулентности однозначно зависит от параметра бесселева пучка (компоненты волнового вектора, ортогональной направлению распространения оптического излучения). При высоких уровнях флуктуаций в турбулентной атмосфере степень когерентности бесселева пучка описывается одномасштабной спадающей кривой, которая по мере возрастания уровня флуктуаций на трассе формирования лазерного пучка становится ближе к аналогичной характеристике сферической волны.

*Ключевые слова:* бесселев пучок, оптическое излучение, атмосферная турбулентность, средняя интенсивность, когерентность; Bessel beam, optical radiation, atmospheric turbulence, average intensity, coherence.

Современный уровень развития лазерной техники позволяет генерировать (пассивными или активными методами) пучки практически с любыми необходимыми для практики распределениями амплитуды и фазы оптического излучения [1, 2]. Вместе с тем при распространении в случайно-неоднородной среде (турбулентной атмосфере или дискретной рассеивающей среде) хорошо изучены лишь гауссовы оптические пучки, а также предельные случаи неограниченных плоских и сферических оптических волн. Делать однозначные выводы на основе имеющихся представлений о характере распространения в случайно-неоднородных средах пучков с иными распределениями амплитуды и фазы оптического излучения не представляется возможным, поэтому возникает настоятельная необходимость изучения распространения пучков различного функционального вида в случайно-неоднородных средах [3–8]. Подобные работы представляют интерес при разработке систем оптической связи, локации и транспортировке энергии, функционирующих в турбулентной атмосфере [9].

Принципиальные достоинства бездифракционных бесселевых пучков, как известно [10, 11], заключаются в том, что бесселев пучок отличается от гауссова возможностью компенсировать дифракционную расходимость, а геометрические размеры бесселева пучка и распределение интенсивности в нем легко изменяются, варьируясь в широких пределах. В настоящей статье на основе решения уравнения для

функций взаимной когерентности второго порядка анализируются особенности формирования бесселевых оптических пучков в случайно-неоднородной (турбулентной) среде и изучаются функциональные особенности поведения модуля нормированной функции взаимной когерентности (степени когерентности) таких пучков в сравнении с плоской и сферической волнами.

Для бесселева пучка, распространяющегося в направлении оси  $OX$ , начальное распределение поля ( $x = 0$ ) записывается следующим образом [12–14]:

$$U_0(\rho) = E_0 J_0(\beta\rho), \quad (1)$$

где  $E_0$  – амплитуда оптического пучка в центре излучающей апертуры;  $\beta = \sqrt{k^2 - k_x^2}$  – компонента волнового вектора, ортогональная направлению распространения оптического излучения;  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число оптического излучения;  $\lambda$  – длина волны оптического излучения в вакууме;  $k_x$  – компонента волнового вектора по направлению распространения оптического излучения;  $\rho = \{y, z\}$  – поперечная к направлению распространения оптического излучения пространственная координата;  $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$  – модуль этой координаты;  $J_0(\cdot)$  – функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Рассмотрим формирование бесселева оптического пучка в крупномасштабной, по сравнению с длиной волны оптического излучения, случайно-неоднородной среде [15, 16]. В этом случае интегральное

\* Игорь Петрович Лукин (lukin\_ip@iaio.ru).

выражение для функции взаимной когерентности второго порядка поля оптического пучка  $U(x, \mathbf{\rho})$  в точках наблюдения  $\{x, \mathbf{\rho}_1\}$  и  $\{x, \mathbf{\rho}_2\}$  имеет вид [15, 16]:

$$\begin{aligned} \Gamma_2(x, \mathbf{\rho}_1, \mathbf{\rho}_2) &= \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{\rho}) = \langle U(x, \mathbf{\rho}_1) U^*(x, \mathbf{\rho}_2) \rangle = \\ &= \langle U(x, \mathbf{R} + \mathbf{\rho}/2) U^*(x, \mathbf{R} - \mathbf{\rho}/2) \rangle = \\ &= \frac{k^2}{4\pi^2 x^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{\rho}'_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{\rho}'_2 \Gamma_2^{(0)}(\mathbf{\rho}'_1, \mathbf{\rho}'_2) \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{ik}{x} \mathbf{R} [\mathbf{\rho} - (\mathbf{\rho}'_1 - \mathbf{\rho}'_2)] - \frac{ik}{2x} \mathbf{\rho} (\mathbf{\rho}'_1 + \mathbf{\rho}'_2) + \right. \\ &\left. + \frac{ik}{2x} (\mathbf{\rho}'_1{}^2 - \mathbf{\rho}'_2{}^2) - \frac{\pi k^2 x}{4} \int_0^1 d\xi H[\xi \mathbf{\rho} + (1 - \xi)(\mathbf{\rho}'_1 - \mathbf{\rho}'_2)] \right\}, \quad (2) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_2^{(0)}(\mathbf{\rho}'_1, \mathbf{\rho}'_2) &= U_0(\mathbf{\rho}'_1) U_0^*(\mathbf{\rho}'_2); \\ H(\eta) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{\kappa} \Phi_\varepsilon(\mathbf{\kappa}) [1 - \cos(\mathbf{\kappa}\eta)]; \end{aligned}$$

$\Phi_\varepsilon(\mathbf{\kappa})$  – спектр флуктуаций диэлектрической проницаемости случайно-неоднородной среды распространения оптического излучения;  $x$  – расстояние от источника до приемника;  $\mathbf{R} = (\mathbf{\rho}_1 + \mathbf{\rho}_2)/2$  и  $\mathbf{\rho} = \mathbf{\rho}_1 - \mathbf{\rho}_2$  – суммарная и разностная координаты точек наблюдения.

При дальнейшем анализе решения уравнения (2) с начальным условием (1) спектр флуктуаций диэлектрической проницаемости случайно-неоднородной среды распространения оптического излучения возьмем колмогоровским [15], т.е. чисто степенного типа ( $\sim \kappa^{-11/3}$ ). В этом случае выполняется следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{\pi k^2 x}{4} \int_0^1 d\xi H[\xi \mathbf{\rho} + (1 - \xi)(\mathbf{\rho}'_1 - \mathbf{\rho}'_2)] &\cong \\ \cong \rho_0^{-5/3} \int_0^1 d\xi |\xi \mathbf{\rho} + (1 - \xi)(\mathbf{\rho}'_1 - \mathbf{\rho}'_2)|^{5/3} \quad (3) \end{aligned}$$

( $\rho_0$  – радиус когерентности плоской оптической волны в турбулентной среде). На однородной трассе в турбулентной атмосфере с колмогоровским спектром случайных неоднородностей радиус когерентности плоской волны равен [15, 16]:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \left( 2^{-5/3} \frac{18}{5} 0,033 \pi^2 \frac{\Gamma(7/6)}{\Gamma(11/6)} C_\varepsilon^2 k^2 x \right)^{-3/5} = \\ &= (0,3643 C_\varepsilon^2 k^2 x)^{-3/5}, \quad (4) \end{aligned}$$

где  $C_\varepsilon^2$  – структурный параметр флуктуаций диэлектрической проницаемости турбулентной атмосферы.

Чтобы упростить исходное интегральное выражение (2) для поперечной функции взаимной ко-

герентности второго порядка поля Бесселя оптического пучка (1), функцию Бесселя представим в следующем интегральном виде [17]:

$$J_0(\beta \sqrt{y^2 + z^2}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \exp[-i\beta y \cos(\varphi) - i\beta z \sin(\varphi)].$$

В результате такого преобразования четырехкратный интеграл выражения (2) превратится в шестикратный интеграл. Удобство перехода к варианту представления выражения (2) в форме 6-кратного интеграла состоит в том, что теперь удается легко преобразовать его в двукратный интеграл, применив метод стационарной фазы [18] к вычислению интегралов по векторным переменным  $\mathbf{\rho}'_1$  и  $\mathbf{\rho}'_2$ . Действительно, интегралы по векторным переменным  $\mathbf{\rho}'_1$  и  $\mathbf{\rho}'_2$  являются интегралами, содержащими большой параметр  $k$  ( $k \rightarrow \infty$ ) в комплексной экспоненте подынтегральной функции:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{\rho}'_1 f_1(\mathbf{\rho}'_1) \exp[ikS_1(\mathbf{\rho}'_1)], \quad (5)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{\rho}'_2 f_2(\mathbf{\rho}'_2) \exp[ikS_2(\mathbf{\rho}'_2)], \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} S_1(\mathbf{\rho}'_1) &= S_1(y'_1, z'_1) = \\ &= -\frac{\beta}{k} [y'_1 \cos(\varphi) + z'_1 \sin(\varphi)] + \frac{1}{2x} (y'^2_1 + z'^2_1), \\ S_1(\mathbf{\rho}'_2) &= S_2(y'_2, z'_2) = \\ &= \frac{\beta}{k} [y'_2 \cos(\psi) + z'_2 \sin(\psi)] - \frac{1}{2x} (y'^2_2 + z'^2_2); \end{aligned}$$

$f_1(\mathbf{\rho}'_1)$  и  $f_2(\mathbf{\rho}'_2)$  – функции, у которых периоды осцилляций заведомо выше, чем периоды осцилляций экспоненциальных членов подынтегральных функций. Проанализировав интегралы (5) и (6), можно показать, что данные интегралы имеют в области интегрирования по одной невырожденной стационарной точке с координатами:  $\left\{ \frac{x\beta}{k} \cos(\varphi), \frac{x\beta}{k} \sin(\varphi) \right\}$

для интеграла (5) и  $\left\{ \frac{x\beta}{k} \cos(\psi), \frac{x\beta}{k} \sin(\psi) \right\}$  для интеграла (6), а вторые производные от функций  $S_1(y'_1, z'_1)$  и  $S_2(y'_2, z'_2)$  по  $\partial y'^2$ ,  $\partial z'^2$  и  $\partial y' \partial z'$  в этих стационарных точках соответственно равны  $\frac{1}{x}$ ,  $\frac{1}{x}$ ,

$$0 \text{ и } -\frac{1}{x}, -\frac{1}{x}, 0.$$

В силу всего вышесказанного, с учетом соотношения (3) и (4), интегральное выражение для поперечной функции взаимной когерентности второго порядка поля Бесселя оптического пучка (2) с начальным распределением (1) может быть сведено к двукратному интегралу по угловым координатам  $\varphi$  и  $\psi$ :

$$\begin{aligned}
\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) \cong & \frac{E_0^2}{4\pi^2} \exp\left(\frac{ik}{x} \mathbf{R}\rho\right) \times \\
& \times \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \exp\left\{-i\beta R \cos(\varphi_R - \varphi) + i\beta R \cos(\varphi_R - \psi) - \right. \\
& - i\frac{\beta}{2}\rho \cos(\varphi_\rho - \varphi) - i\frac{\beta}{2}\rho \cos(\varphi_\rho - \psi) - \\
& - q^{5/6} \int_0^1 d\xi \left[ \xi^2 \frac{k}{x} \rho^2 + 2\xi(1-\xi)\beta\rho \cos(\varphi_\rho - \varphi) - \right. \\
& - 2\xi(1-\xi)\beta\rho \cos(\varphi_\rho - \psi) + 2(1-\xi)^2 \frac{x}{k} \beta^2 - \\
& \left. \left. - 2(1-\xi)^2 \frac{x}{k} \beta^2 \cos(\varphi - \psi) \right]^{5/6} \right\}, \quad (7)
\end{aligned}$$

где  $\varphi_R$  и  $\varphi_\rho$  — угловые координаты точек наблюдения суммарной  $\mathbf{R}$  и разностной  $\rho$ ;  $q = x/(k\rho_0^2)$  — параметр, характеризующий турбулентные условия распространения на трассе [16]. Дальнейший анализ задачи будет основываться на этом упрощенном представлении (7) общего решения для поперечной функции взаимной когерентности второго порядка (2) бesselова оптического пучка (1). Основываясь на нем, можно получить информацию о средних статистических характеристиках интенсивности и когерентных свойствах бesselова пучка в турбулентной среде, как численно, так (в ряде случаев) и аналитически.

Известно [1, 14], что при распространении бesselова оптического пучка в однородной среде в ней формируется инвариантная оптическая структура — бездифракционный пучок. Когда отсутствуют случайные неоднородности среды, т.е. при  $H(\eta) \equiv 0$  или (что одно и то же)  $q \equiv 0$ , выражение для поперечной функции взаимной когерентности второго порядка поля бesselова оптического пучка (7) упрощается:

$$\begin{aligned}
\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) \cong & \\
\cong E_0^2 \exp\left(\frac{ik}{x} \mathbf{R}\rho\right) J_0(\beta|\mathbf{R} + \rho/2) J_0(\beta|\mathbf{R} - \rho/2). \quad (8)
\end{aligned}$$

Следовательно, радиальное распределение интенсивности  $[I(x, \mathbf{R}) \equiv \Gamma_2(x, \mathbf{R}, 0) \equiv E_0^2 J_0^2(\beta R)]$  этого пучка определяется квадратом функции Бесселя первого рода нулевого порядка  $J_0^2(\beta R)$ . Соответственно интенсивность бesselова пучка на его оптической оси ( $I(x, 0) \equiv E_0^2$ ) будет постоянной величиной, не зависящей от эволюционной координаты  $x$ , а радиус центральной части бesselова пучка, определенный по первому нулю функции Бесселя первого рода нулевого порядка, будет постоянным на всей протяженности бesselова пучка:

$$R_c \cong 2,4048/\beta. \quad (9)$$

Если радиус центральной части бesselова пучка определить по уменьшению интенсивности бesselова

пучка в  $e$  раз от максимального значения на его оптической оси, то коэффициент в формуле (9) будет 1,3258.

Характер распространения бesselова оптического пучка в случайно-неоднородной ( $H(\eta) \neq 0$ ) среде имеет существенные особенности по сравнению с распространением в однородной ( $H(\eta) \equiv 0$ ) среде. Распределение средней интенсивности бesselова оптического пучка ( $\langle I(x, 0) \rangle \equiv \Gamma_2(x, 0, 0)$ ) в турбулентной атмосфере на его оптической оси ( $R = 0$ ) описывается следующим интегральным выражением, полученным из (7) при  $R = 0$  и  $\rho = 0$ :

$$\begin{aligned}
\langle I(x, 0) \rangle \cong & \\
\cong \frac{E_0^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \exp\left\{-2^{5/6} \frac{3}{8} \left(q \frac{x}{k} \beta^2\right)^{5/6} [1 - \cos(\varphi)]^{5/6}\right\}. \quad (10)
\end{aligned}$$

Если для подынтегральной функции воспользоваться аппроксимацией вида

$$\exp\{-\text{const}[1 - \cos(\varphi)]^{5/6}\} \approx \exp\{-\text{const}^{6/5}[1 - \cos(\varphi)]\},$$

которая эквивалентна квадратичной аппроксимации, используемой в монографии [16], то вместо формулы (10) получим аналитическое выражение

$$\langle I(x, 0) \rangle \approx E_0^2 \exp\left[-2\left(\frac{3}{8}\right)^{6/5} q \frac{x}{k} \beta^2\right] I_0\left[2\left(\frac{3}{8}\right)^{6/5} q \frac{x}{k} \beta^2\right], \quad (11)$$

где  $I_0(\cdot)$  — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

На рис. 1 представлены результаты численных расчетов средней интенсивности бesselова пучка на его оптической оси, нормированной на соответствующее значение интенсивности в однородной среде,  $\langle I(x, 0) \rangle / I(x, 0)$  в зависимости от параметра  $\sqrt{qx/k} \beta = x\beta/(k\rho_0)$ , пропорционального длине трассы распространения оптического излучения  $x$ .

Расчеты проведены по формулам (10) и (11), чему соответствуют сплошная и пунктирная линии на рис. 1. Хорошо видно, что средняя интенсивность бesselова пучка на его оптической оси максимальна в начальной точке трассы распространения (т.е. при  $x = 0$   $\langle I(x, 0) \rangle \cong E_0^2$ ) и монотонно убывает по мере возрастания длины трассы распространения  $x$ , спадая до 0. Если определить продольную протяженность бesselова пучка по уменьшению нормированной средней интенсивности на его оптической оси  $\langle I(x, 0) \rangle$  в  $e$  раз относительно этой же характеристики в однородной среде  $I(x, 0)$ , то из соотношений (9) и (10) следует, что в случайно-неоднородной среде условие  $\langle I(x, 0) \rangle / I(x, 0) \cong e^{-1}$  выполняется, когда

$$x = x_{cr} \cong 1,5818k\rho_0/\beta. \quad (12)$$

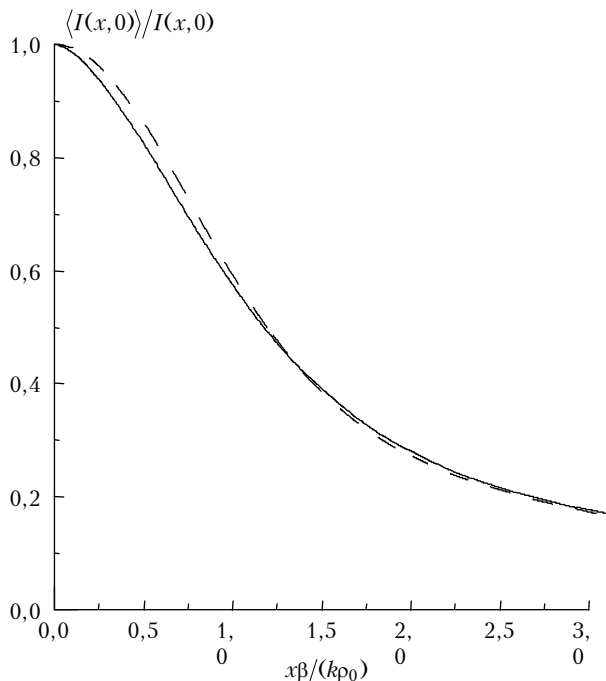


Рис. 1. Средняя интенсивность на оптической оси бesselова пучка, распространяющегося в турбулентной среде, нормированная на интенсивность этого же пучка в однородной среде (сплошная линия – точный расчет, штриховая – расчет с использованием квадратичной аппроксимации)

При использовании квадратичной аппроксимации (11) коэффициент в формуле (12) будет достаточно близким, он равен 1,5584 (различие коэффициентов составляет  $\cong 1,5\%$ ). Следовательно, в отличие от однородной среды бesselов пучок, сформированный в случайно-неоднородной среде, оказывается ограниченным в продольном направлении. Подобная ситуация обусловлена интерференционным характером формирования бesselова пучка, так как при распространении в случайно-неоднородной среде из-за ухудшения когерентности интерферирующих элементарных плоских волн происходит фактическое исчезновение результирующего бesselова пучка. В силу вышесказанного, о бездифракционном бesselовом пучке в случае распространения оптического излучения в турбулентной атмосфере приходится говорить лишь в ограниченной пространственной области в направлении распространения оптического излучения:  $0 \leq x \leq x_{cr}$ .

Таким образом, оказывается, что с уменьшением величины радиуса когерентности оптической волны в случайно-неоднородной среде  $\rho_0$  уменьшается продольная протяженность бesselова пучка в турбулентной атмосфере. Можно считать, что в области от  $x = 0$  до  $x \cong x_{cr}$  бesselов пучок на своей оптической оси имеет интенсивность, мало отличающуюся от той, что была в однородной среде, а при выполнении условия  $x \geq x_{cr}$  средняя интенсивность на оптической оси бesselова пучка уже близка к нулю. Выражение (12) показывает, что случайные неоднородности турбулентной атмосферы приводят к значительному уменьшению расстояния, на котором при

распространении бesselов пучок имеет интенсивность, близкую к однородной среде. Однако даже при достаточно высоких уровнях флуктуаций в случайно-неоднородной среде распространения оптического излучения протяженность сформированного в случайно-неоднородной среде бesselова пучка остается сравнимой с длиной трассы распространения (так как выполняется условие  $x_{cr} \geq x$ ) до тех пор, пока верно соотношение

$$\rho_0 \geq 0,6322\beta \frac{x}{k}. \quad (13)$$

Отметим, что для квадратичной аппроксимации в формуле (13) коэффициент равен 0,6417. Полученное по убыванию средней интенсивности пучка на его оптической оси в случайно-неоднородной среде соотношение (13) можно считать количественным критерием существования бesselова оптического пучка, сформированного в турбулентной атмосфере.

Поведение средней интенсивности бesselова пучка в его поперечном сечении к направлению распространения оптического излучения вблизи оптической оси представлено на рис. 2.

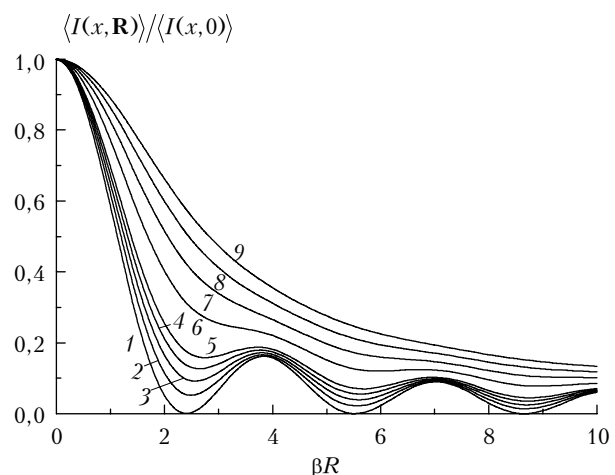


Рис. 2. Нормированная средняя интенсивность в поперечном сечении бesselова оптического пучка  $\langle I(x, \mathbf{R}) \rangle / \langle I(x, 0) \rangle$  при различных значениях параметра  $q \frac{x}{k} \beta^2$ , зависящего от уровня флуктуаций в турбулентной атмосфере:  $q \frac{x}{k} \beta^2 = 0$  (1), 0,25 (2), 0,5 (3), 0,75 (4), 1 (5), 2 (6), 3 (7), 4 (8), 5 (9)

Результаты рассчитаны численно по формуле (7) при  $\rho = 0$ :

$$\langle I(x, \mathbf{R}) \rangle \cong \frac{E_0^2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \exp[-i\beta R \cos(\varphi)] \int_0^{2\pi} d\psi \times \exp\left\{i\beta R \cos(\psi) - 2^{5/6} \frac{3}{8} \left(q \frac{x}{k} \beta^2\right)^{5/6} [1 - \cos(\varphi - \psi)]^{5/6}\right\}. \quad (14)$$

Кривые нормированной средней интенсивности бesselова оптического пучка  $\langle I(x, \mathbf{R}) \rangle / \langle I(x, 0) \rangle$  зависят

от смещения точки наблюдения с оптической оси пучка  $R$ . Они рассчитаны по формулам (10) и (14) для нескольких значений уровня флуктуаций в турбулентной атмосфере, определяемого параметром  $q(x/k)\beta^2 = x^2\beta^2/(k^2\rho_0^2) \sim (C_\varepsilon^2)^{6/5}$ . Видно, что поперечное распределение средней интенсивности бesselева оптического пучка (по крайней мере в пределах максимума нулевого порядка) слабо чувствительно к влиянию случайных неоднородностей среды до тех пор, пока сохраняется кольцевая структура бesselева пучка. Как только периферические максимумы и минимумы оказываются «замытыми», сразу же начинается быстрое уширение центральной части бesselева пучка.

Подобная ситуация наступает тогда, когда параметры задачи принимают такие значения, что начинает нарушаться условие (13) (на рис. 2 моменту перехода от выполнения условия к его нарушению соответствуют кривые 6 и 7). Следовательно, можно сделать вывод, что пока выполняется условие (13), бesselев оптический пучок, распространяющийся в случайно-неоднородной среде, все еще сохраняет свою пространственную структуру (как в продольном, так и в поперечном направлениях) и практически неизменную ширину своей центральной части, т.е. остается бездифракционным пучком и в случайно-неоднородной среде. Таким образом, из рис. 2 следует, что условие (13) является количественным критерием возможности сформировать бездифракционный пучок с аксиальной симметрией в случайно-неоднородной турбулентной среде в смысле «средней интенсивности оптического излучения».

Так как зависимость средней интенсивности бesselева пучка от поперечной координаты  $R$  не имеет однопараметрического характера, то, для того чтобы полнее понять особенности поведения радиуса центральной части бesselева пучка в турбулентной атмосфере, оценим его при трех возможных способах определения этой величины. Конкретно радиус центральной части бesselева пучка  $R_{cr}$  определим на трех уровнях нормированной средней интенсивности бesselева оптического пучка  $\langle I(x, \mathbf{R}) \rangle / \langle I(x, 0) \rangle$ : на низком  $e^{-1}$ , среднем  $1/2$  и высоком  $(1 - e^{-1})$ . Полученные численные оценки по формулам (10) и (14) для радиуса центральной части бesselева пучка представлены на рис. 3.

Необходимо отметить, что (для всех трех определений радиуса центральной части бesselева пучка) наблюдается уширение оптического пучка случайно-неоднородной средой и заметна существенная зависимость характера этого уширения от уровня флуктуаций случайно-неоднородной среды на трассе распространения, определяемого структурным параметром флуктуаций диэлектрической проницаемости турбулентной атмосферы:  $q \frac{x}{k} \beta^2 \sim (C_\varepsilon^2)^{6/5}$ . В области малых уровней флуктуаций случайно-неоднородной среды [когда выполняется условие (13)] радиус бesselева пучка при любых способах определения изменяется слабо ( $R_{cr} \cong R_c$ ). Однако при высоких

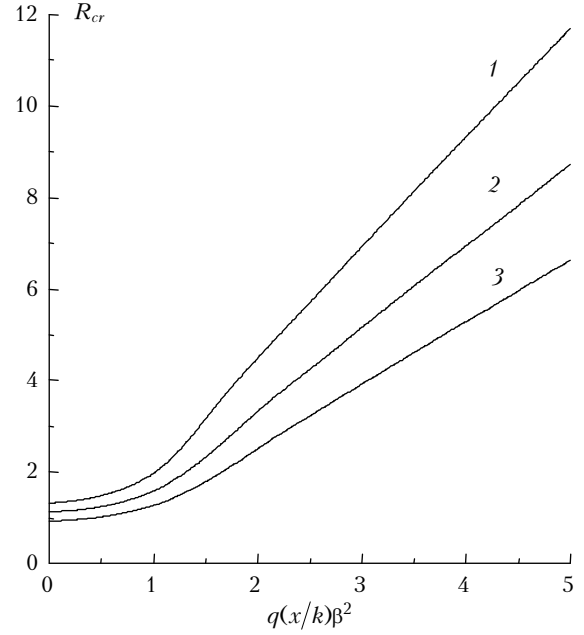


Рис. 3. Радиус центральной части бesselева пучка в турбулентной атмосфере, определенный для трех уровней нормированной средней интенсивности  $\langle I(x, \mathbf{R}) \rangle / \langle I(x, 0) \rangle = e^{-1}$  (1),  $1/2$  (2) и  $(1 - e^{-1})$  (3)

уровнях флуктуаций [когда уже нарушается условие (13)] скорость уширения бesselева пучка значительно увеличивается. Заметно, что чем ниже уровень средней интенсивности оптического излучения, по которому определяют радиус пучка, тем больше уширение с ростом параметра  $q \frac{x}{k} \beta^2$ . Это связано с влиянием периферических максимумов бesselева пучка, которые, имея существенно меньшие, чем главный максимум, амплитуды, при искажении бesselева пучка атмосферной турбулентностью дают вклад, наиболее сильно проявляющийся именно на низких уровнях интенсивности оптического излучения.

Информация о поперечной функции взаимной когерентности второго порядка поля оптической волны позволяет нам не только проанализировать поведение средней интенсивности оптического пучка, но и оценить радиус когерентности оптического излучения в турбулентной атмосфере [15, 16]. Если пространственные координаты функции взаимной когерентности второго порядка поля бesselева оптического пучка определены, так как это представлено в выражении (2), то нормированная функция взаимной когерентности второго порядка (комплексная степень когерентности) бesselева пучка должна иметь следующий вид:

$$\gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) = \frac{\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho)}{\sqrt{\langle I(x, \mathbf{R} + \rho/2) \rangle \langle I(x, \mathbf{R} - \rho/2) \rangle}}. \quad (15)$$

При этом надо отметить, что нормировка функции взаимной когерентности производится не на значение интенсивности в какой-либо одной пространственной

точке, а на среднее геометрическое значение интенсивностей в исследуемых точках поля. Такая нормировка позволяет в большинстве случаев исключить из комплексной степени когерентности вклад регулярных изменений поля.

Известно [15, 16], что характерный масштаб модуля нормированной поперечной функции взаимной когерентности второго порядка (степени когерентности) бesselева пучка  $\text{mod}[\gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho)]$  по разностной поперечной пространственной переменной  $\rho$  позволяет оценить радиус когерентности оптического излучения. Используя определение комплексной степени когерентности (15) и интегральное выражение для поперечной функции взаимной когерентности второго порядка поля бesselева оптического пучка (7) вместе с формулой для средней интенсивности данного пучка (14), получим конкретное выражение для вычисления степени когерентности бesselева пучка в турбулентной атмосфере:

$$\begin{aligned} \text{mod}[\gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho)] &= \\ &= \sqrt{\frac{\{\text{Re}[\bar{\Gamma}_2(x, \mathbf{R}, \rho)]\}^2 + \{\text{Im}[\bar{\Gamma}_2(x, \mathbf{R}, \rho)]\}^2}{\langle I(x, \mathbf{R} + \rho/2) \rangle \langle I(x, \mathbf{R} - \rho/2) \rangle}}, \quad (16) \end{aligned}$$

где

$$\bar{\Gamma}_2(x, \mathbf{R}, \rho) = \exp\left(-\frac{ik}{x}\mathbf{R}\rho\right)\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho);$$

при этом  $\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho)$  определяется формулой (8), а  $\langle I(x, \mathbf{R} + \rho/2) \rangle$  и  $\langle I(x, \mathbf{R} - \rho/2) \rangle$  – выражением (14).

На рис. 4 представлены результаты расчета степени когерентности бesselева пучка на его оптической оси ( $R = 0$ ) по формулам (8), (14) и (16) для  $\sqrt{x/k}\beta = 1$  при различных уровнях флуктуаций диэлектрической проницаемости воздуха в турбулентной атмосфере:  $q = 0,05$  (1), 0,1 (2), 0,25 (3), 0,5 (4), 0,75 (5), 1,0 (6), 2,0 (7), 3,0 (8), 4,0 (9), 5,0 (10).

Данные (рис. 4) наглядно демонстрируют чувствительность функционального вида этой характеристики к уровню флуктуаций в турбулентной атмосфере. При низких уровнях флуктуаций в турбулентной атмосфере ( $q \rightarrow 0$ ) зависимость степени когерентности бesselева оптического пучка от разностной поперечной пространственной переменной  $\rho$  носит немонотонный характер (см. рис. 4). Это связано с проявлением влияния регулярной структуры поля бesselева пучка при этих условиях на функцию взаимной когерентности второго порядка.

Как видно из рис. 4, при  $\sqrt{x/k}\beta = 1$  немонотонность степени когерентности бesselева пучка явно проявляется лишь в области слабых флуктуаций турбулентной атмосферы (практически для  $\sqrt{x/k}\beta = 1$  при  $q < 0,75$ ), а при больших  $q$  ( $q \rightarrow \infty$ ) степень когерентности бesselева пучка представляется спадающей кривой. Характер этой кривой подобен соответствующим зависимостям в турбулентной атмосфере для плоской и сферической волн, или гауссо-

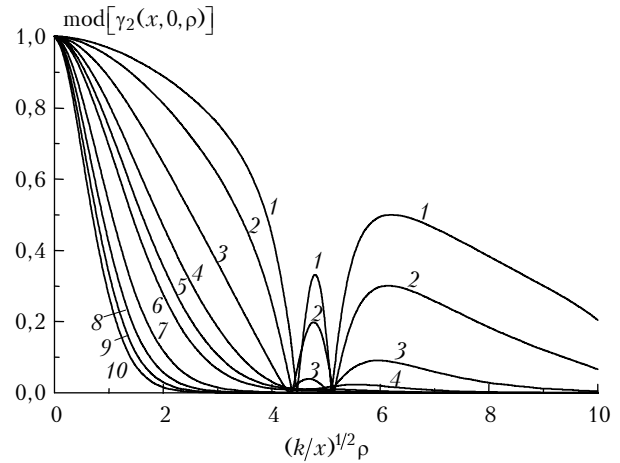


Рис. 4. Степень когерентности бesselева пучка для  $\sqrt{x/k}\beta = 1,0$  на его оптической оси при различных уровнях флуктуаций в турбулентной атмосфере:  $q = 0,05$  (1), 0,1 (2), 0,25 (3), 0,5 (4), 0,75 (5), 1,0 (6), 2,0 (7), 3,0 (8), 4,0 (9), 5,0 (10)

ва пучка. На рис. 5 представлена степень когерентности бesselева пучка при  $\sqrt{x/k}\beta = 0,1$  с такими же значениями, как и на рис. 4, параметра  $q$ , характеризующего влияние случайных неоднородностей среды.

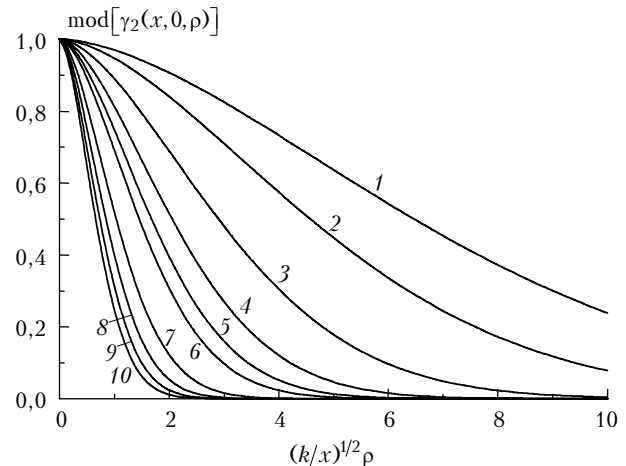


Рис. 5. То же, что и на рис. 4, для бesselева пучка с параметром  $\sqrt{x/k}\beta = 0,1$

Если сравнить рис. 4 и 5, то станет ясно, что у бesselевых пучков с поперечным размером центрального максимума, большим по сравнению с диаметром первой зоны Френеля ( $R_c > \sqrt{x/k}$ ), степень когерентности при любых значениях  $q$ , приведенных на рис. 5, ведет себя монотонно, т.е. в данном случае при низких уровнях турбулентности осцилляций степени когерентности бesselева пучка не наблюдается.

Результаты анализа зависимости степени когерентности бesselева пучка в турбулентной атмосфере при низких уровнях флуктуаций случайных неоднородностей турбулентной атмосферы от пространственной структуры самого бesselева пучка представлены на рис. 6 и 7.

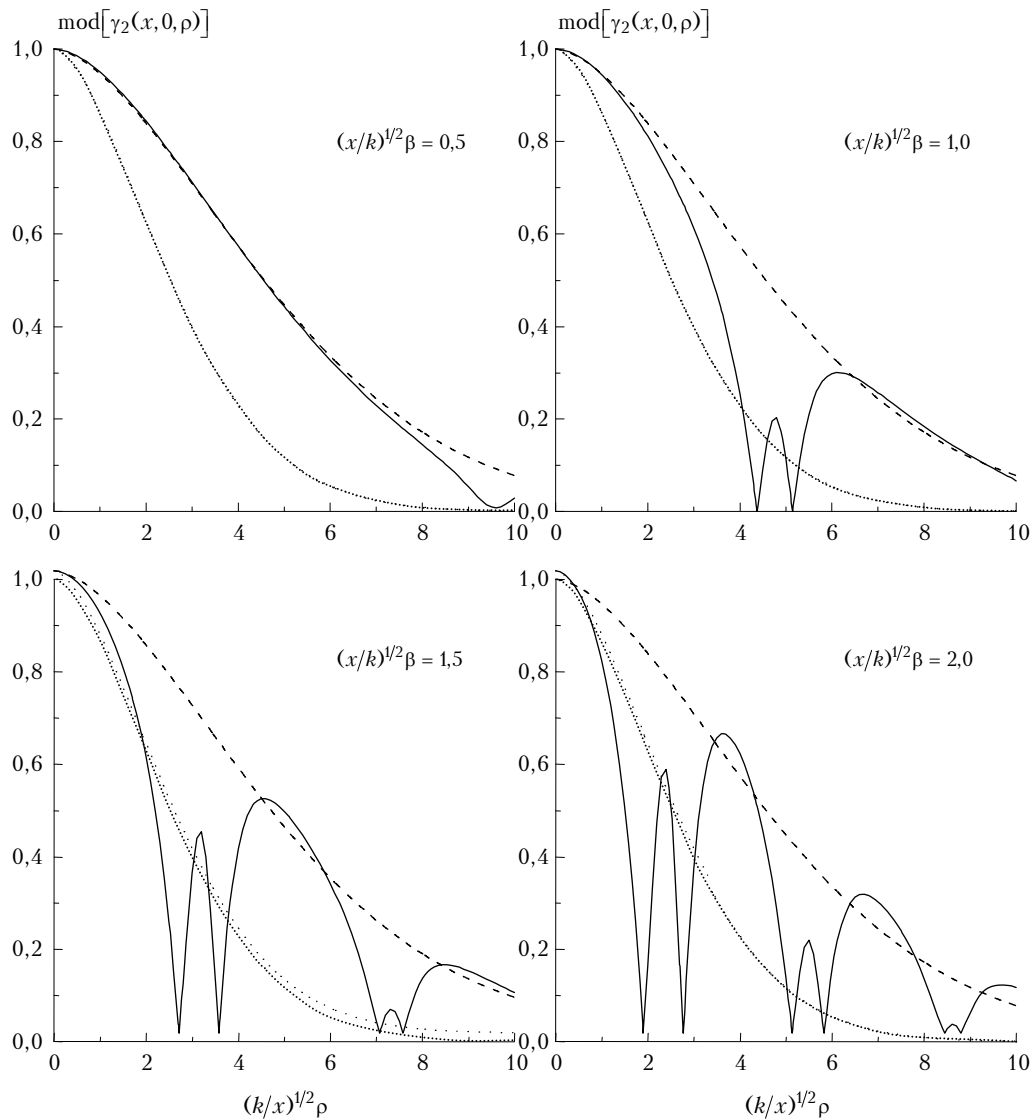


Рис. 6. Степень когерентности бесселева пучка на его оптической оси (сплошные линии), плоской (пунктирные) и сферической (штриховые) волн при  $q = 0,1$

Для двух малых значений параметра  $q$  ( $q = 0,1$  — рис. 6 и  $q = 0,25$  — рис. 7) приведены результаты численных расчетов степени когерентности бесселева оптического пучка, соответствующих четырем разным соотношениям компоненты волнового вектора, ортогональной направлению распространения оптического излучения, и диаметра первой зоны Френеля:  $\sqrt{x/k} \beta = 0,5$  (а),  $1,0$  (б),  $1,5$  (в),  $2,0$  (г). В данном случае речь идет о бesselевых пучках, у которых на расстоянии, пропорциональном диаметру первой зоны Френеля  $\sim \sqrt{x/k}$ , укладывается несколько максимумов распределения интенсивности оптического излучения бesselева пучка, число их соответственно кратно  $0,5$ ;  $1,0$ ;  $1,5$  и  $2,0$ .

Расчитанные численно по формуле (16) данные, приведенные на рис. 6 и 7, показывают, что с увеличением параметра  $\sqrt{x/k} \beta$  растет количество

максимумов и минимумов, прорисовываемых на графиках степени когерентности. Фактически в этих условиях поперечная функция взаимной когерентности второго порядка поля бesselева пучка оптического излучения существенно зависит от параметров самого бesselева пучка  $\beta$ , а не только от условий распространения оптического излучения в турбулентной среде.

Отметим, что рост влияния атмосферной турбулентности (с увеличением  $q$ ) уменьшает количество наблюдаемых максимумов и минимумов на графиках степени когерентности при одном и том же значении параметра бesselева пучка  $\sqrt{x/k} \beta$ . Представленные на рис. 6 и 7 степени когерентности плоской и сферической волн в турбулентной атмосфере наглядно демонстрируют, что для данных условий графики степени когерентности бesselева пучка в основном лежат между аналогичными характеристиками

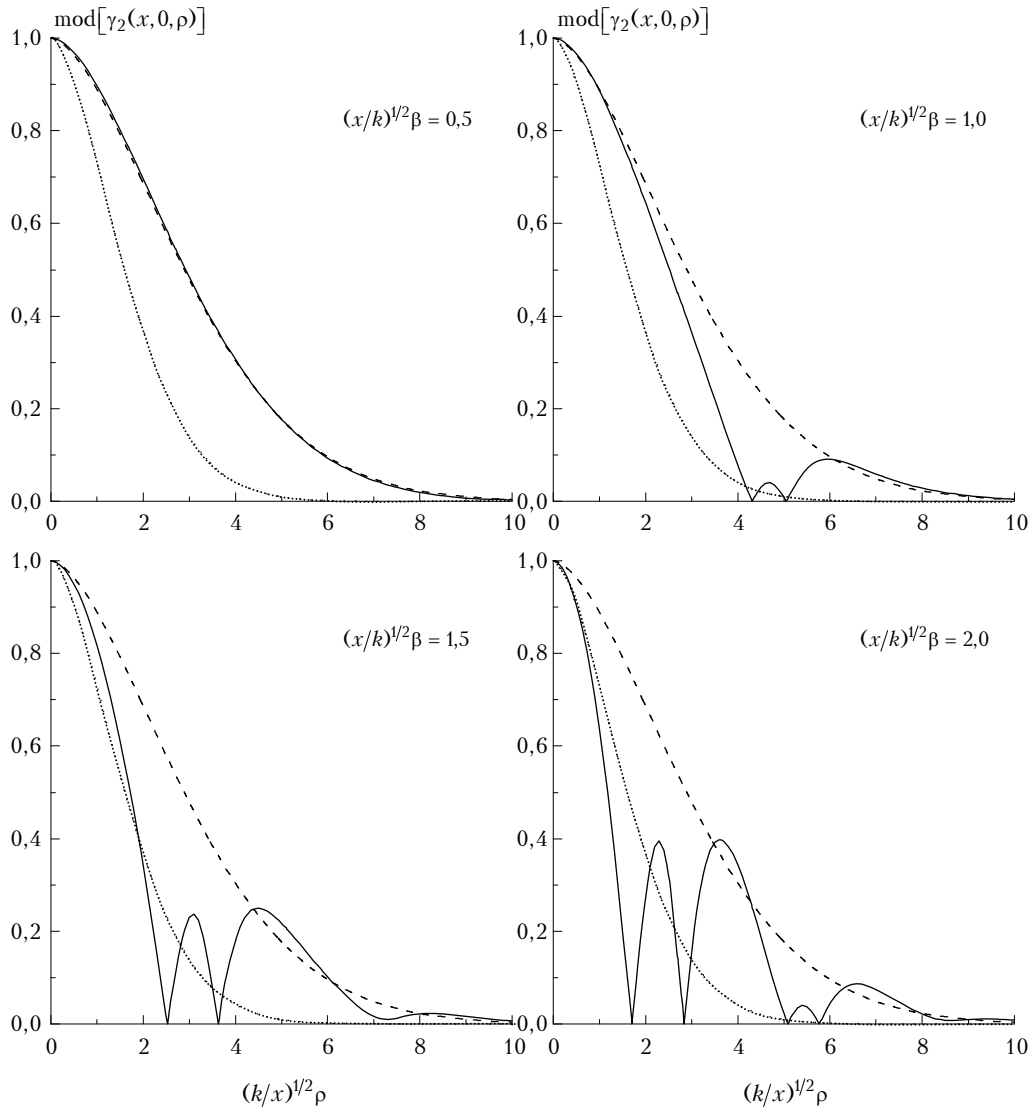


Рис. 7. То же, что и на рис. 6, при  $q = 0,25$

плоской и сферической волн, а огибающая степени когерентности бesselова пучка близка к степени когерентности сферической волны.

Для более ясного понимания особенностей поведения степени когерентности бesselова пучка в турбулентной атмосфере приведем таблицу, в которой значению параметра бesselова пучка  $\sqrt{x/k}\beta$  поставлены в соответствие два значения параметра  $q$  ( $q_m$  — значение параметра  $q$ , при котором для данного параметра бesselова пучка  $\sqrt{x/k}\beta$  исчезают осцилляции на графике степени когерентности, а  $q_s$  — значение параметра  $q$ , при котором для данного  $\sqrt{x/k}\beta$  степень когерентности бesselова пучка совпадает со степенью когерентности сферической волны с точностью не хуже 5,0%).

Таким образом, при низких уровнях флуктуаций в турбулентной атмосфере ( $q \leq q_m$ ) зависимость

$\sqrt{x/k}\beta$	0,1	0,25	0,5	0,75	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0
$q_m$	0,005	0,03	0,25	0,5	0,75	1,5	4	9	16
$q_s$	0,005	0,03	0,25	0,5	2	8	14	28	42

степени когерентности бesselова пучка от разностной поперечной пространственной координаты носит ярко выраженный осциллирующий характер. В работе [19], правда для двумерного случая, также отмечался осциллирующий характер поведения степени когерентности бesselова пучка в турбулентной атмосфере. Подобное же поведение степени пространственной когерентности наблюдается при дифракции некогерентной волны на дифракционной решетке [20]. Причем надо особо подчеркнуть, что увеличение числа штрихов решетки, освещенных оптическим излучением, приводит к увеличению количества максимумов и минимумов на графике степени когерентности дифрагированной волны [20]. В промежуточной области по уровням флуктуаций в турбулентной атмосфере ( $q_m < q < q_s$ ) степень когерентности бesselова



пучка описывается одномасштабной кривой, близкой к степенной экспоненте, а при высоких уровнях флуктуаций в случайно-неоднородной среде, когда  $q \geq q_s$  ( $q_s > q_m$ ), степень когерентности бesselова пучка практически совпадает со степенью когерентности сферической волны.

При низких уровнях флуктуаций в турбулентной атмосфере  $q \leq q_m$  (см. рис. 4–7) когерентность в бesselовом пучке выше, чем в плоской волне ( $\cong \exp[-(\rho/\rho_0)^{5/3}]$ ), но ниже, чем в сферической ( $\cong \exp[-(3/8)(\rho/\rho_0)^{5/3}]$ ). При высоких уровнях флуктуаций в турбулентной атмосфере  $q > q_m$  (см. рис. 4–7) степень когерентности бesselова пучка становится ближе к аналогичной характеристике сферической волны, причем с увеличением параметра  $q$  эти характеристики быстро сближаются (при  $q \geq q_s$  они уже практически совпадают).

При изучении поведения когерентности лазерных пучков, распространяющихся в турбулентной атмосфере, для упрощения математических выкладок нередко используют квадратичную аппроксимацию функции, описывающей влияние случайно-неоднородной среды [16]. Если в нашем случае воспользоваться аппроксимацией, используемой выше при получении формулы (11), то для степени когерентности бesselова пучка на его оптической оси в турбулентной атмосфере будет получено следующее выражение:

$$\begin{aligned} \text{mod}[\gamma_2(x, 0, \rho)] &= \\ &= \sqrt{\frac{\{\text{Re}[\tilde{\Gamma}_2(x, 0, \rho)]\}^2 + \{\text{Im}[\tilde{\Gamma}_2(x, 0, \rho)]\}^2}{\langle I(x, \rho/2) \rangle \langle I(x, -\rho/2) \rangle}} \approx \\ &\approx \sqrt{\frac{\{\text{Re}[F_1(\rho)]\}^2 + \{\text{Im}[F_1(\rho)]\}^2}{F_2(\rho) F_3(\rho)}}, \quad (17) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_1(\rho) &= \exp\left(-\frac{1}{3}q\tilde{\rho}^2\right) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \exp\left[-i\frac{1}{2}\tilde{\beta}\tilde{\rho} \cos(\varphi) - \right. \\ &\quad \left. - i\frac{1}{2}\tilde{\beta}\tilde{\rho} \cos(\psi) - \frac{1}{3}q\tilde{\beta}\tilde{\rho} \cos(\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3}q\tilde{\beta}\tilde{\rho} \cos(\psi) + \frac{2}{3}q\tilde{\beta}^2 \cos(\varphi - \psi)\right], \\ F_2(\rho) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \exp\left[-i\frac{1}{2}\tilde{\beta}\tilde{\rho} \cos(\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + i\frac{1}{2}\tilde{\beta}\tilde{\rho} \cos(\psi) + \frac{2}{3}q\tilde{\beta}^2 \cos(\varphi - \psi)\right], \\ F_3(\rho) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \exp\left[i\frac{1}{2}\tilde{\beta}\tilde{\rho} \cos(\varphi) - \right. \\ &\quad \left. - i\frac{1}{2}\tilde{\beta}\tilde{\rho} \cos(\psi) + \frac{2}{3}q\tilde{\beta}^2 \cos(\varphi - \psi)\right]; \end{aligned}$$

$\tilde{\rho} = (k/x)^{1/2}\rho$ ;  $\tilde{\beta} = (x/k)^{1/2}\beta$ . На рис. 8 представлены результаты сравнения степени когерентности для бesselова пучка с параметром  $\sqrt{x/k}\beta = 1,5$  на его оптической оси при  $q = 0,1$ .

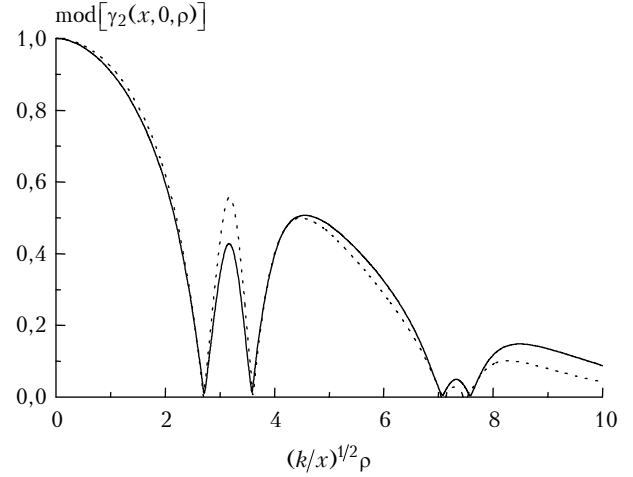


Рис. 8. Степень когерентности бesselова пучка с  $\sqrt{x/k}\beta = 1,5$  на его оптической оси при  $q = 0,1$ , рассчитанная по точным формулам (16) (сплошная линия) и с использованием квадратичной аппроксимации (17) (пунктирная)

Показательно, что до тех пор, пока огибающая степени когерентности бesselова пучка лежит выше уровня  $1/2$ , результаты точного расчета (сплошная линия) дают меньшие значения величины степени когерентности, чем данные аппроксимации (пунктирная линия), а при уровнях огибающей степени когерентности бesselова пучка ниже уровня  $1/2$  — выше. Однако следует заметить, что качественно квадратичная аппроксимация в целом верно описывает поведение степени когерентности бesselова пучка, а отклонение величины степени когерентности находится на вполне приемлемом для практических оценок уровне.

Проведенный анализ показал, что при определенных условиях центральная часть бesselова пучка сохраняет свою ширину и интенсивность на всем протяжении трассы распространения в турбулентной атмосфере, т.е. обеспечивается эффект «бездифракционного распространения» бesselова пучка. Этот эффект достигается за счет боковой подкачки энергии оптического пучка в центральный максимум из периферических максимумов. Такая подкачка энергии в центр пучка приводит к быстрой деградации периферии оптического пучка. Тем не менее до тех пор, пока бesselов пучок сохраняет свою оригинальную функциональную форму, а именно пока выполняется условие (13), такой пучок оказывается возможным использовать и в случайно-неоднородной (турбулентной) среде. При этом степень когерентности бesselова пучка со значениями параметра  $\sqrt{x/k}\beta \leq 0,75$  при низких уровнях турбулентности на трассе распространения  $q \leq q_m$  представляет собой осциллирующую функцию, а при высоких уровнях

$q \geq q_m = q_s$  является монотонно спадающей функцией, близкой к степени когерентности сферической волны, в то время как степень когерентности бесселева пучка для значений  $\sqrt{x/k}\beta > 0,75$  при низких уровнях турбулентности ( $q < q_m$ ) также имеет осциллирующий характер, а при высоких ( $q \geq q_m$ ) — описывается одномасштабной кривой, которая лишь при  $q \geq q_s$  ( $q_s > q_m$ ) совпадает со степенью когерентности сферической волны. Специально отметим, что по мере увеличения параметра бесселева пучка  $\sqrt{x/k}\beta$  различие величин  $q_m$  и  $q_s$  будет быстро возрастать.

1. Хонина С.Н. Простой способ эффективного формирования различных бездифракционных лазерных пучков // Компьютерная оптика. 2009. Т. 33, № 1. С. 70–78.
2. Абрамочкин Е.Г., Волостников В.Г. Спиральные пучки света // Успехи физ. наук. 2004. Т. 174, № 12. С. 1273–1300.
3. Seshadri S.R. Average characteristics of a partially coherent Bessel–Gauss optical beam // J. Opt. Soc. Amer. A. 1999. V. 16, N 12. P. 2917–2927.
4. Shchegrov A.V., Wolf E. Partially coherent conical beams // Opt. Lett. 2000. V. 25, N 3. P. 141–143.
5. Fischer P., Brown C.T.A., Morris J.E., Lopez-Mariscal C., Wright E.M., Sibbett W., Dholakia K. White light propagation invariant beams // Opt. Express. 2005. V. 13, N 17. P. 6657–6666.
6. Lopez-Mariscal C., Bandres M.A., Gutierrez-Vega J.C. Observation of the experimental propagation properties of Helmholtz–Gauss beams // Opt. Eng. 2006. V. 45, N 6. P. 068001-1–068001-8.
7. Carbajal-Domingues A., Bernal J., Martin-Ruiz A., Nicoff G.M. Generation of  $J_0$  Bessel beams with controlled spatial coherence features // Opt. Express. 2010. V. 18, N 8. P. 8400–8405.
8. Маракасов Д.А., Рычков Д.С. Метод расчета моментов функции распределения Вигнера лазерных пучков в турбулентной атмосфере // Оптика атмосф. и океана. 2011. Т. 24, № 11. С. 951–953.
9. Zhu K., Zhou G., Li X., Zheng X., Tang H. Propagation of Bessel–Gaussian beams with optical vortices in turbulent atmosphere // Opt. Express. 2008. V. 16, N 26. P. 21315–21320.
10. Киселев А.П. Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравнения (Обзор) // Оптика и спектроскопия. 2007. Т. 102, № 4. С. 661–681.
11. Andrews D.L. Structured light and its applications: An introduction to phase-structured beams and nanoscale optical forces. N.Y.: Academic press, 2008. 341 p.
12. Лукин И.П. Когерентные свойства бесселева пучка в случайно-неоднородной среде // Электронный журнал «Исследовано в России». 2009. Т. 12, № 063. С. 751–760. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2009/063.pdf>
13. Лукин И.П. Флуктуации фазы бессель-гауссовых пучков в случайно-неоднородных средах // Оптика атмосф. и океана. 2010. Т. 23, № 1. С. 66–70.
14. Лукин И.П. Флуктуации бесселева пучка в случайно-неоднородной среде // Изв. Том. политехн. ун-та. 2010. Т. 316, № 2. С. 63–67.
15. Рытов С.М., Крайцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.
16. Бельский М.С., Лукин В.П., Миронов В.Л., Покасов В.В. Когерентность лазерного излучения в атмосфере. Новосибирск: Наука, 1985. 176 с.
17. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
18. Федорук М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
19. Chen B., Chen Z., Pu J. Propagation of partially coherent Bessel–Gaussian beams in turbulent atmosphere // Opt. & Laser Technol. 2008. V. 40, N 6. P. 820–827.
20. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981. 640 с.

**I.P. Lukin. Coherence of Bessel beam in the turbulent atmosphere.**

In this article characteristic features of formation of the Bessel optical beam in turbulent atmosphere are analyzed. The problem of the analysis is based on the solution of the equation for the mutual coherence function of the second-order field of a Bessel beam of optical radiation. For average intensity of Bessel beam the condition, the which is the quantitative criterion of the possibility of formation of the given beam on an extended line in the turbulent atmosphere is derived. The behavior of a degree of coherence of the Bessel optical beam depending on parameters of a beam and characteristics of turbulent atmosphere is examined. It was revealed that at low levels of fluctuations in the turbulent atmosphere the degree of coherence of the Bessel optical beam has the characteristic oscillating appearance where the number of maxima and minima for identical level of the atmospheric turbulence unambiguously depends on Bessel beam parameter (a component of wave vector, orthogonal to a propagation direction of optical radiation). At high levels of fluctuations in the turbulent atmosphere the degree of coherence of a Bessel beam is described by an one-scale decreasing curve, which in process of increase of the level of fluctuations on the line of formation of a laser beam becomes closer to the similar characteristic of a spherical wave.