

Т.А. Шереметьева, Г.Н. Филиппов

Метод моделирования случайных возмущений волнового фронта с широким диапазоном масштабов флуктуаций

*НИИ комплексных испытаний оптико-электронных приборов и систем ВНЦ «ГОИ им. С.И. Вавилова»,
г. Сосновый Бор, Ленинградской обл.*

Поступила в редакцию 9.03.2000 г.

Представлен метод численного моделирования стохастического поля с широким диапазоном пространственных неоднородностей. Метод позволяет сочетать модальный подход, основанный на разложении случайного однородного изотропного поля по функциям Карунена–Лоэва–Обухова, со спектральным подходом или с подходом скользящего среднего. Преимущества этого метода относительно других известных методов генерации случайных полей проявляются, в частности, в случае, когда необходимо создавать случайное поле с широким диапазоном неоднородностей на сравнительно небольших областях. Такая необходимость возникает, например, при моделировании волнового фронта лазерного пучка во время прохождения его через атмосферу.

Теоретические исследования распространения волн в случайно-неоднородных средах проводятся с использованием подходов, основанных на решении волнового стохастического уравнения, либо на решениях уравнений для статистических моментов поля. Однако уже для статистических моментов четвертого порядка решение соответствующего дифференциального уравнения представляет собой сложную математическую задачу, для которой пока известны лишь некоторые асимптотические решения. Поэтому в нелинейной оптике важным инструментом исследования распространения волн в случайно-неоднородных средах является метод статистических испытаний, основанный на модели фазовых экранов [1].

Численное формирование фазовых экранов – случайных полей с заданной статистикой – в таком методе исследований является ключевым. Для формирования однородного изотропного случайного поля обычно используют спектральный метод, реже – метод скользящего среднего. Спектральный метод позволяет формировать поля, наибольший масштаб флуктуаций которых не превышает половины расчетной области. С другой стороны, существуют ограничения и на наименьший масштаб флуктуаций: шаг сетки должен быть меньше шестой части наименьшего масштаба. В совокупности эти условия существенно ограничивают диапазон пространственных флуктуаций, воспроизводимых этим методом. Метод скользящего суммирования применяют для моделирования мелкомасштабных флуктуаций [2]. Для расширения диапазона спектрального метода в области крупномасштабных флуктуаций в [3] предложен алгоритм вложенных сеток, в [4] – метод субгармоник. Модификация этих методов, развитая в [5], повышает точность воспроизведения низкочастотных пространственных флуктуаций [6]. При реализации этих методов следует контролировать число итераций, достаточное для воспроизведения поля с заданной корреляционной функцией. Количество используемых итераций тем больше, чем больше задаваемый внешний масштаб [6].

Известен модальный подход, при котором случайное поле формируется как суперпозиция базисных функций.

На практике ограничение числа базисных функций приводит к ограничению воспроизведения пространственных масштабов. Модальный подход адекватно воспроизводит крупномасштабные флуктуации [6].

В данной статье представлен метод формирования однородного изотропного случайного гауссовского поля с широким диапазоном масштабов флуктуаций на основе сочетания спектрального и модального подходов. В пределах расчетной области стохастическое поле S представляется суммой двух (или более) статистически независимых полей [7]:

$$S(\rho) = S_{H1}(\rho) + S_{H2}(\rho) + \dots + S_{HN}(\rho) + S_B(\rho). \quad (1)$$

Каждому из полей соответствует своя корреляционная функция $B_{H1}(\rho - \rho')$, а совокупность этих полей образует поле с корреляционной функцией $B(|\rho - \rho'|)$, соответствующей заданному спектру. При этом выполняется соотношение

$$B(|\rho - \rho'|) = B_{H1}(|\rho - \rho'|) + B_{H2}(|\rho - \rho'|) + \dots + B_{HN}(|\rho - \rho'|) + B_B(|\rho - \rho'|).$$

Стохастические поля S_{Hi} , соответствующие первым членам этого ряда, формируют на основе модального подхода, и они соответствуют низкочастотным и среднечастотным составляющим моделируемого поля. Последнее поле S_B формируют методом скользящего среднего или спектральным методом, и оно отвечает высокочастотной составляющей. Первые члены ряда (1) формируют на основе резлечения по функциям Карунена–Лоэва–Обухова.

Определяются собственные функции $\psi_k(\rho)$ (функции Карунена–Лоэва–Обухова) и собственные значения Λ_k интегрального оператора, ядром которого является корреляционная функция $B(\rho, \rho') = B(|\rho - \rho'|)$ моделируемого стохастического поля $S(\rho)$:

$$\iint w(\rho') B(\rho, \rho') \psi_k(\rho') d^2 \rho' = \Lambda_k \psi_k(\rho); \quad (2)$$

$$B(\rho, \rho') = \langle |S(\rho) - \langle S(\rho) \rangle| \cdot |S(\rho') - \langle S(\rho') \rangle| \rangle,$$

Угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций поля;

$$w(\rho) = \begin{cases} 1, & |\rho| \leq R, \\ 0, & |\rho| \geq R. \end{cases}$$

В работе [8] предложен способ нахождения функций Карунена–Лоэва–Обухова $\psi_k(\rho)$ через разложение по функциям Бесселя $J_e(x)$. В этом методе функции $\psi_k(\rho)$ получают в следующем виде:

$$\psi_k(\rho) = K_e^j(\rho) \exp(i e \theta) = \sum_{p=0}^P d_e^j J_e \left(\frac{\mu_p \rho}{2R} \right) \exp(i e \theta), \quad (3)$$

$$\rho = (\rho, \theta).$$

Здесь P – число, задающее порядок аппроксимации; d_e^j – компоненты собственных векторов матрицы C с элементами:

$$c_{pp\bar{y}}^e = -\pi a_p \int_0^R J_e \left(\mu_p \frac{\rho}{2R} \right) J_e \left(\mu_{p\bar{y}} \frac{\rho}{2R} \right) \rho d\rho,$$

где μ_p – корни уравнения $J_0(x) = 0$; $J_0(x)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка;

$$a_p = \frac{2}{R^2 [J_0(\mu_p)]^2} \int_0^R \rho D_s(\rho) J_0 \left[\mu_p \frac{\rho}{2R} \right] d\rho.$$

Собственные числа λ_e^j расставляются в порядке убывания $\Lambda_1 > \Lambda_2 > \dots > \Lambda_k$, где Λ_1 определяется следующим образом: $\Lambda_1 = \max \lambda_e^j$. В соответствии с полученным порядком производят сортировку собственных функций.

Полученная последовательность $\psi_k(\rho)$, $k = 1, 2, \dots, K$ и будет последовательностью функций, близких к функциям Карунена–Лоэва–Обухова с точностью, определяемой величиной параметра P . Поле задается с помощью K функций $\psi_k(\rho)$, соответствующих K наибольшим собственным значениям, следующим образом:

$$S_{H1}(\rho) = \sum_{k=0}^K b_k \psi_k(\rho), \quad (4)$$

где b_k – независимые нормально распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией Λ_k ; $\psi_k(\rho)$ – соответствующие собственные функции интегрального оператора.

Известно, что чем больше взято собственных функций, тем точнее поле $S_{H1}(\rho)$ воспроизводит поле $S(\rho)$, заданное корреляционной функцией $B(\rho - \rho')$. На практике мы должны довольствоваться конечным числом собственных функций. Поле, заданное таким конечным рядом, имеет корреляционную функцию $B_1(\rho - \rho')$, близкую, но не равную заданной корреляционной функции. Для формирования заданного поля такое поле $S_{H1}(\rho)$ можно дополнить другим, статистически независимым полем $S_{H2}(\rho)$, корреляционная функция которого $B_2(\rho - \rho')$ равна разности

корреляционных функций $B(\rho - \rho')$ исходного поля $S(\rho)$ и корреляционных функций $B_{H1}(|\rho - \rho'|)$ поля первого приближения $S_{H1}(\rho)$.

Поскольку модальный метод воспроизводит фактически крупномасштабные флуктуации, то корреляционная функция $B_2(|\rho - \rho'|)$ отлична от нуля на области меньшего размера, чем корреляционная функция $B(|\rho - \rho'|)$. Если размер этой области еще велик для использования метода скользящего среднего для формирования поля, соответствующего функции $B_2(|\rho - \rho'|)$, то опять применяют модальный подход, но уже на более коротком участке $R_2 < R$.

Такой процесс может быть продолжен до тех пор, пока спектральный диапазон корреляционной функции-остатка не станет удобным для применения спектрального метода или метода скользящего среднего. При достижении такой ситуации для формирования последнего поля S_B применяется спектральный метод или метод скользящего среднего и процесс формирования поля $S(\rho)$ заканчивается. Количество полей, формируемых модальным методом, должно быть выбрано из соображений оптимизации вычислительного процесса. Если размер области, на которой необходимо задать поле, существенно меньше области, на которой исходная корреляционная функция отлична от нуля, то выгодно, с точки зрения организации вычислительного процесса, формировать несколько полей модальным методом, уменьшая последовательно область их определения. Именно при генерации случайного поля с широким диапазоном неоднородностей на сравнительно небольших областях проявляется преимущество представляемого метода относительно других известных методов численной генерации случайных полей. Такой случай возникает, например, при моделировании волнового фронта лазерного пучка при прохождении его через атмосферу.

Итак, процесс моделирования случайного поля состоит из следующих этапов:

1. Для формирования поля модальным способом определяют собственные функции $\psi_k(\rho)$ и собственные значения Λ_k корреляционной функции $B(\rho - \rho')$.
2. Формируют поле $S_{H1}(\rho)$ в соответствии с (4).
3. Определяют разницу между корреляционной функцией $B(\rho - \rho')$ и достигнутой корреляционной функцией $B_{H1}(\rho - \rho')$:

$$B(\rho - \rho') - B_{H1}(\rho - \rho') = \Delta B(\rho - \rho').$$

4. Анализируют возможность применения спектрального метода или метода скользящего среднего для моделирования поля с корреляционной функцией $\Delta B(\rho - \rho')$ и применяют эти методы, в противном случае повторяют действия 1–4 для поля $\Delta S(\rho)$ с корреляционной функцией $\Delta B(\rho - \rho')$.

Этапы формирования случайного поля, отраженные в виде этапов приближения корреляционной функции поля, представлены на рис. 1 в левом столбце.

Способ представления случайного поля в виде совокупности случайных полей, соответствующих различным по масштабам неоднородностей вкладам, полезен для исследования влияния этих вкладов на моделируемые процессы. В частности, влияние каждого этапа приближения корреляционной функции можно наглядно продемонстрировать на модели прохождения лазерного пучка через среду со случайными флуктуациями показателя преломления.

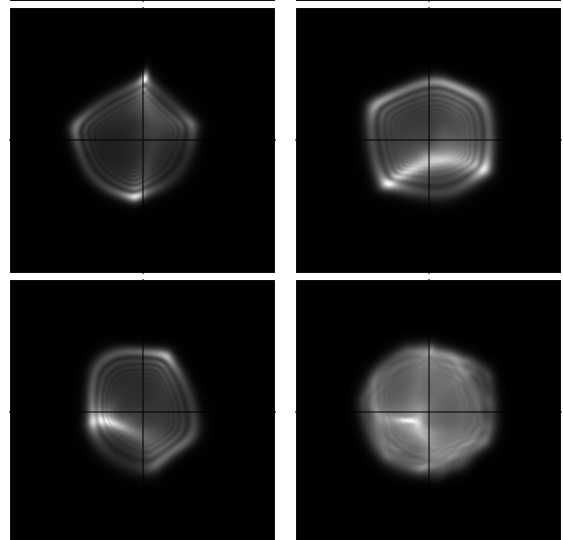
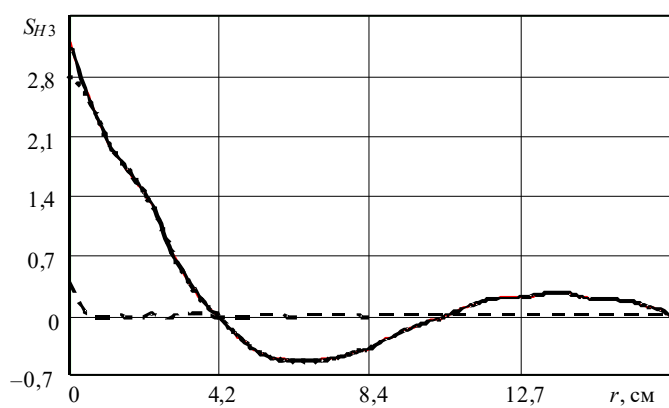
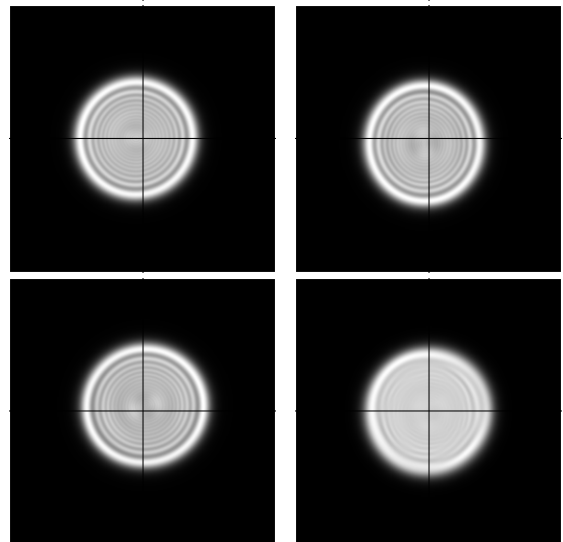
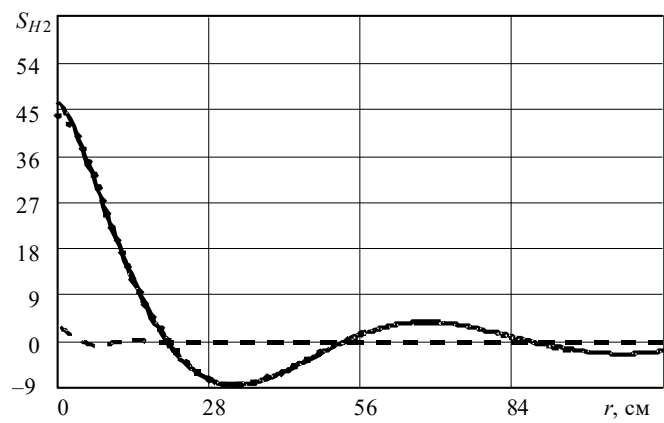
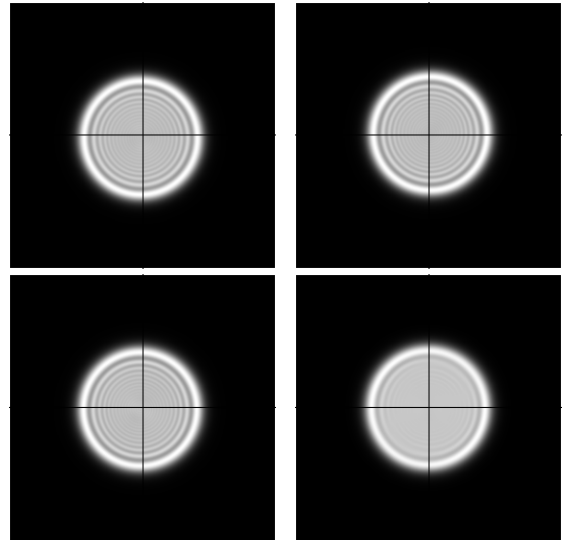
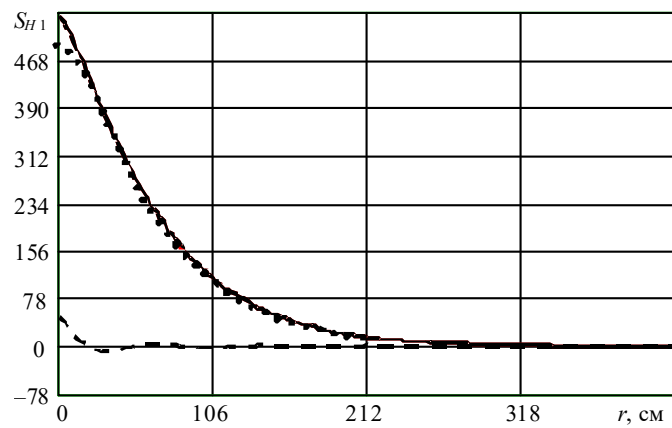


Рис. 1. Этапы приближения корреляционной функции и влияние степени приближения на распределение интенсивности пучка $\lambda = 1,06$ мкм диаметром 3 см в ближней зоне (690 см): — исходная корреляционная функция; — приближенная корреляционная функция; - - - - - остаток приближения

В правом столбце рис. 1 представлены распределения интенсивности лазерного пучка в плоскости наблюдения после прохождения пучка через фазовый экран флуктуаций показателя преломления. Фазовый экран для каждого этапа представляет собой составное случайное поле с корреляционной функцией, соответствующей данному этапу приближения. Для каждого этапа приведено по три реализации распределения интенсивности и сумма этих трех реализаций, демонстрирующая сдвиги пучка как целого. Кроме того, этот метод формирования случайного поля позволяет усложнять модель случайного поля, вводя анизотропию поля на избранных масштабах неоднородностей. Это полезно, например, при исследовании атмосферной турбулентности, которая может иметь анизотропию неоднородностей показателя преломления на низких пространственных частотах.

Типичные реализации распределения интенсивности лазерных пучков разных диаметров при прохождении через фазовый экран приведены на рис. 2 для дальней зоны наблюдения.

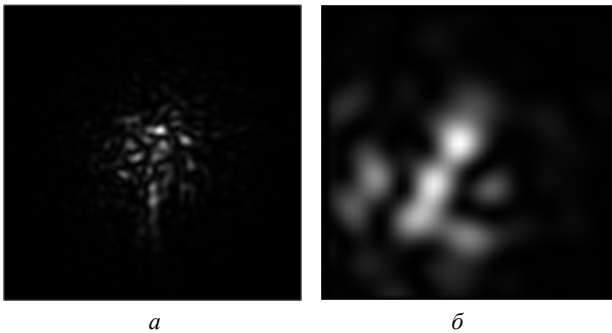


Рис. 2. Реализации распределения интенсивности лазерных пучков при прохождении через случайный фазовый экран со спектром (5) и с параметрами: $\alpha = 11/3$, $C_n^2 = 1,74 \cdot 10^{-9} \text{ м}^{-2/3}$, $l_0 = 0,15 \text{ см}$, $L_0 = 100 \text{ см}$, $dZ = 1 \text{ м}$; $\Lambda = 1,06 \text{ мкм}$; *a* – пучок диаметром 30 мм; *б* – 10 мм

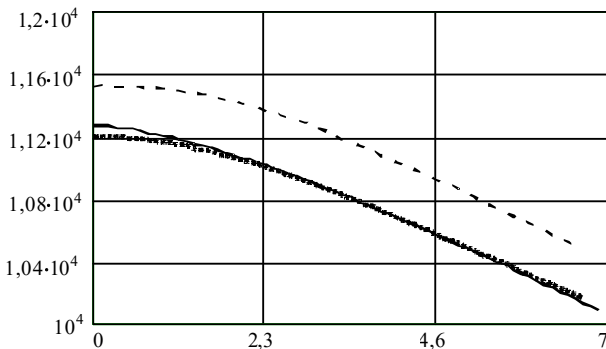


Рис. 3. Оценка корреляционной функции случайного поля по набору реализаций поля для корреляционной функции, соответствующей спектру вида (5) при $\alpha = 2/3$, $C_n^2 = 1,3 \cdot 10^{-9} \text{ м}^{-2/3}$, $L = 25 \text{ см}$, $l_0 = 0,24 \text{ см}$; — — — — корреляционная функция; - - - - - оценка по набору из 5000 реализаций сечений поля; — оценка по набору из 500000 реализаций сечений поля

Проверка правильности работы алгоритма была проведена при помощи статистического оценивания функции корреляции поля по набору реализаций этого поля. Рис. 3 показывает функцию корреляции, соответствующую спектру

$$\Phi 1_n^u(\mathbf{p}) = A(\alpha) C_n^2 L^{(3+\alpha)} \exp \{-p^2 l_0\} |1 + p^2 L^2|^{-(3+\alpha)/2}, \quad (5)$$

где

$$A(\alpha) = \frac{\Gamma(2+\alpha)}{4\pi^2} \sin(\alpha\pi/2)$$

с параметрами $\alpha = 2/3$, $C_n^2 = 1,3 \cdot 10^{-9} \text{ м}^{-2/3}$, $L = 25 \text{ см}$, $l_0 = 0,04 \text{ см}$ (непрерывная линия) и две ее оценки, полученные по набору реализаций: оценка по 5000 реализаций поля – штриховая линия, и оценка по 500000 реализаций – пунктирная линия. Из рис. 3 видно, что метод хорошо представляет моделируемое случайное поле. Максимальное отклонение оценки корреляционной функции от заданного значения при достаточном числе испытаний составляет менее 1% дисперсии. Оценивание структурной функции продемонстрировано на рис. 4.

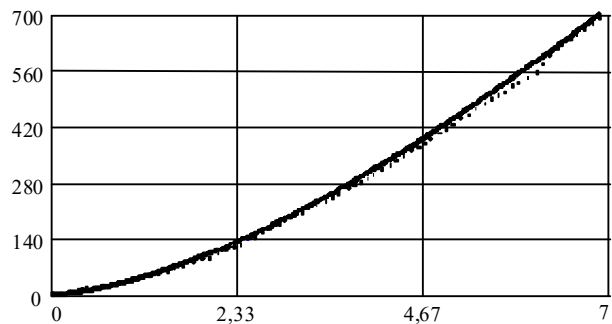


Рис. 4. Оценка структурной функции случайного поля для спектра вида (5) при $\alpha = 2/3$, $C_n^2 = 1,3 \cdot 10^{-9} \text{ м}^{-2/3}$, $L = 25 \text{ см}$, $l_0 = 0,24 \text{ см}$ по набору реализаций поля; — — — — структурная функция; — оценка по набору из 5000 реализаций поля

Итак, представлен метод численного моделирования реализаций однородного изотропного случайного поля с заданной корреляционной функцией, характеризующейся широким диапазоном пространственных неоднородностей. Имеется возможность внесения анизотропии поля только для отдельных диапазонов частот. Этот метод удобен для анализа влияния различных масштабов на исследуемые процессы и может найти применение для статистических испытаний в задачах распространения лазерных пучков в турбулентной среде. Его можно использовать также для анализа влияния различных факторов на статистические характеристики лазерного пучка, проходящего через среду со случайными неоднородностями.

1. Кандидов В.П. // УФН. 1996. Т. 166. № 12. С. 1309–1338.
2. Fleck J.A., Morris J.R., Feit M.D. // Appl. Phys. 1976. V. 10. P. 129.
3. Noll R.J. // J. Opt. Soc. Am. 1976. V. 66. P. 207.
4. Herman B.J., Strugala L.A. // SPIE. 1990. V. 1221. P. 183–192.
5. Lane R.G., Glinde mann A., Dainty J.C. // Waves in random media. 1992. V. 2. N 3. P. 209–224.
6. Кандидов В.П. // Оптика атмосферы и океана. 1998. Т. 11. № 1. С. 91–95.
7. Шереметьева Т.А., Филиппов Г.Н. // Междунар. конф. «Прикладная Оптика-98»: Тезисы докл. СПб.: Изд. ГОИ, 1998. С. 58–59.
8. Аксенов В.П., Исаев Ю.Н. // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. № 7. С. 947–954.

T.A. Sheremet'eva, G.N. Filippov. **Simulation method for random wave front disturbances with wide range the of fluctuation scales.**

The method of numerical simulation of a stochastic field with a wide range of spatial inhomogeneities is proposed. This method allows one to combine the modal approach based on expansion of random homogeneous isotropic field in terms of the Karunen–Loyev–Obukhov functions with a spectral approach or approach of moving average. Advantages of this method relative to other known methods of random field generation manifest themselves, in particular, in the case when a random field with a wide range of inhomogeneities in fairly small areas is to be induced. This need arises for example, in simulation of the laser beam wave front when it propagates through the atmosphere.