

МЕТОДЫ И СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ.
ОБРАБОТКА ДАННЫХ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

УДК 551.46.

С.Р. Анваров, С.М. Пригарин

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ
СТРУКТУРЫ ПОВЕРХНОСТИ МОРСКОГО ВОЛНЕНИЯ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ**

На основе спектральных методов приближенного моделирования случайных полей построена пространственно-временная модель поверхности морского волнения. Эта модель используется для исследования статистических свойств оптического излучения, отраженного морской поверхностью. В отличие от [1, 2], где моделировалась только пространственная структура, численная модель, предложенная в данной статье, учитывает временную изменчивость случайного поля возвышений водной поверхности.

**1. Описание спектральных методов численного моделирования
пространственно-временных однородных случайных полей**

Рассмотрим задачу моделирования однородного гауссовского поля $w(x, y, t)$ с нулевым средним $Mw(x, y, t) \equiv 0$, где переменная t играет роль времени: при фиксированном t функция $w(x, y, t)$ – однородное случайное поле, а для фиксированной точки (x, y) функция $w(x, y, t)$ – стационарный случайный процесс.

Однородное гауссовское поле однозначно задается своей корреляционной функцией $K(x, y, t) = Mw(0, 0, 0) w(x, y, t)$ или спектральной мерой $F(d\lambda dv d\mu) = f(\lambda, \nu, \mu) d\lambda dv d\mu$ с плотностью $f(\lambda, \nu, \mu)$ (может быть обобщенной)

$$f(\lambda, \nu, \mu) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{R^3} \cos(\lambda x + \nu y + \mu t) K(x, y, t) dx dy dt$$

или

$$K(x, y, t) = \int_P \cos(\lambda x + \nu y + \mu t) f(\lambda, \nu, \mu) d\lambda dv d\mu,$$

где P – полупространство в R^3 , $P \cup (-P) = R^3$, $P \cap (-P) = \{0\}$, на котором сосредоточена спектральная мера, а символами λ, ν, μ обозначены декартовы координаты в полупространстве P . Для однородного случайного поля запишем спектральное представление [3] в виде

$$w(x, y, t) = \int_P \cos(\lambda x + \nu y + \mu t) \xi(d\lambda dv d\mu) - \int_P \sin(\lambda x + \nu y + \mu t) \eta(d\lambda dv d\mu),$$

где ξ и η – ортогональные гауссовские стохастические меры на P , такие, что для $A, B \subset P$ выполнено

- $M\xi(A) = M\eta(B) = 0$;
- $M\xi^2(d\lambda dv d\mu) = M\eta^2(d\lambda dv d\mu) = f(\lambda, \nu, \mu) d\lambda dv d\mu$;
- $M\xi(A) \eta(B) = 0$;
- $M\xi(A) \xi(B) = M\eta(A) \eta(B) = 0$, при $A \cap B = \emptyset$.

Исходя из спектрального представления поля, приближенные модели для $w(x, y, t)$ вида

$$w_n(x, y, t) = \sum_{i=1}^n a_i [\xi_i \cos(\lambda_i x + \nu_i y + \mu_i t) + \eta_i \sin(\lambda_i x + \nu_i y + \mu_i t)]$$

назовем спектральными. Здесь $a_i > 0$, (ξ_i, η_i) – независимые одинаково распределенные случайные векторы на плоскости такие, что $M\xi_i = M\eta_i = M\xi_i \eta_i = 0$, $D\xi_i = D\eta_i = 1$.

Г.А. Михайловым [4] предложен общий принцип приближенного моделирования гауссовских однородных полей на основе расслоения и рандомизации спектра (когда векторы $(\lambda_i, \nu_i, \mu_i)$ выбираются случайным образом в непересекающихся областях с распределениями, индуцированными спектральной мерой $F(d\lambda d\nu d\mu)$), позволяющий точно воспроизвести корреляционную функцию поля. Рандомизированные спектральные модели гауссовских полей используются при решении широкого класса задач методом статистического моделирования.

Поля $w_n(x, y, t)$ – однородные. Для сильной однородности (инвариантности конечномерных распределений относительно сдвигов) необходима и достаточна изотропность векторов (ξ_i, η_i) на плоскости; при этом для моделирования может оказаться более экономичным представление

$$w_n(x, y, t) = \sum_{i=1}^n a_i r_i \cos(\lambda_i x + \nu_i y + \mu_i t + \varphi_i),$$

где $r_i = \sqrt{\xi_i^2 + \eta_i^2}$, а φ_i – равномерно распределенные на $[0, 2\pi]$ и независимые от r_i случайные величины. Далее будем предполагать, что векторы (ξ_i, η_i) гауссовские. Пусть спектральное пространство разбито на непересекающиеся множества: $P = \sum_{i=1}^n \Lambda_i$, $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \emptyset$, при $i \neq j$. Рассмотрим следующую модель: $a_i^2 = F(\Lambda_i)$, $(\lambda_i, \nu_i, \mu_i)$ – случайные векторы, распределения которых сосредоточены в соответствующих областях Λ_i и индуцированы спектральной мерой F . Эта модель является рандомизированной и имеет корреляционную функцию, совпадающую с корреляционной функцией моделируемого поля $w(x, y, t)$. В [5] доказана сходимость конечномерных распределений для данной модели при условии $\max_{i \leq n} F(\Lambda_i) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В [6] исследованы вопросы слабой сходимости спектральных моделей гауссовских однородных полей.

2. Статистическая модель поверхности морского ветрового волнения

2.1. Экспериментальные данные о статистических свойствах ветрового волнения водной поверхности свидетельствуют о том, что оно с высокой степенью точности может быть описано однородным гауссовским случайным полем возвышений $w(x, y, t)$ относительно среднего уровня [7].

Зафиксируем координаты x, y и будем рассматривать морское волнение как случайный процесс:

$$u(t) = w(x, y, t).$$

Тогда процесс $u(t)$ будет гауссовским и стационарным с корреляционной функцией

$$K_x(t) = K(0, 0, t)$$

и спектральной плотностью

$$f_\mu(\mu) = \int_{R^2} f(\lambda, \nu, \mu) d\lambda d\nu.$$

Если же зафиксировать t и рассматривать морское волнение как случайное поле $v(x, y)$, то поле $v(x, y) = w(x, y, t)$ будет однородным гауссовским с корреляционной функцией

$$K_{x,y}(x, y) = K(x, y, 0)$$

и спектральной плотностью

$$f_{\mu\nu}(\lambda, \nu) = \int_R f(\lambda, \nu, \mu) d\mu.$$

Наряду с параметрами λ, ν в качестве спектральных удобно рассматривать параметры θ, ρ :

$$\lambda = \rho \cos \theta, \quad \nu = \rho \sin \theta, \quad \rho^2 = \lambda^2 + \nu^2, \quad \theta = \arg(\lambda + i\nu).$$

Соответствующие спектральные плотности связаны соотношениями

$$f_{\lambda\nu}(\lambda, \nu) = \frac{1}{\rho(\lambda, \nu)} f_{\rho\theta}(\rho(\lambda, \nu), \theta(\lambda, \nu));$$

$$f_{\rho\theta}(\rho, \theta) = \rho f_{\lambda\nu}(\lambda(\rho, \theta), \nu(\rho, \theta)).$$

Если f_ρ – безусловная спектральная плотность по ρ , т.е.

$$f_{\rho\theta}(\rho, \theta) = f_\rho(\rho) f_{\theta|\rho}(\theta|\rho); \quad \int_0^{2\pi} f_{\theta|\rho}(\theta|\rho) d\theta = 1; \quad f_\rho(\rho) = \int_0^{2\pi} f_{\rho\theta}(\rho, \theta) d\theta, \quad (1)$$

то плотности f_ρ и f_μ связаны соотношениями

$$f_\rho(\rho) = 0,5 \sqrt{\frac{g}{\rho}} f_\mu(\mu(\rho)), \quad \mu(\rho) = \sqrt{g\rho},$$

$$f_\mu(\mu) = \frac{2\mu}{g} f_\rho(\rho(\mu)), \quad \rho(\mu) = \mu^2/g, \quad (2)$$

где g – ускорение свободного падения.

Таким образом, для описания пространственной структуры случайного поля морского волнения достаточно задать <частотный> спектр f_μ и <угловой> спектр $f_{\theta|\rho}$.

Опишем стохастическую структуру морской поверхности с учетом изменения во времени. Рассмотрим случай монохроматической волны, когда спектр сосредоточен в одной точке (λ, ν, μ) с весом A^2 . В этом случае спектральное представление гауссовского пространственно-временного поля будет иметь вид

$$w(x, y, t) = A [\xi \cos(\lambda x + \nu y + \mu t) - \eta \sin(\lambda x + \nu y + \mu t)],$$

где ξ, η – независимые стандартные нормальные величины; A^2 – дисперсия поля. Можно переписать это в виде

$$w(x, y, t) = Ar \cos(\lambda x + \nu y + \mu t + \varphi) = Ar \cos[\rho(x \cos \theta + y \sin \theta) + \mu t + \varphi],$$

где $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ – случайная величина с распределением Рэлея; $\varphi = \arg(\xi + i\eta)$ – случайная величина, равномерно распределенная на $[0, 2\pi]$, причем r и φ независимые. Реализация этого поля – синусоидальная волна длины $2\pi/\rho$ с амплитудой Ar , <бегущая> в направлении – $\text{sign}(\mu)\theta$. В соответствии со спектральной моделью произвольное гауссовское однородное поле представляется как суперпозиция таких полей.

$$w(x, y, t) = \sum_k A_k [\xi_k \cos(\lambda_k x + \nu_k y + \mu_k t) - \eta_k \sin(\lambda_k x + \nu_k y + \mu_k t)].$$

Из линейной гидродинамической теории волн известно, что для монохроматической волны $\mu^2 = g\rho \text{th}(\rho H)$. Рассмотрим случай глубокой воды, $\rho H \gg 1$, H – глубина водоема, тогда мы получим $\mu^2 = g\rho$.

Опишем, следуя [8], ряд аппроксимаций спектров морского волнения. Частотный спектр пологой зыби в широком диапазоне частот хорошо описывается функцией

$$f_\mu = 6 d_0 (\mu_{\max}/\mu)^5 \mu^{-1} \exp[-1,2(\mu_{\max}/\mu)^5],$$

где d_0 – дисперсия поля возвышений; μ_{\max} – частота спектрального максимума (здесь и далее предполагается, что частотный спектр задан на положительной полуоси, т.е. $f_\mu(\mu) = 0$, при $\mu < 0$). В случае ветрового волнения высокочастотный спектр более насыщен. В спектре выделяют гравитационный (частота до 5 Гц, длина волны свыше 7 см), гравитационно-капиллярный (частота от 5 до 50 Гц, длина волны от 7 до 0,7 см), капиллярный (частота до 10^4 – 10^6 Гц) и вязкий диапазоны. В гравитационно-капиллярном и капиллярном диапазонах спектр аппроксимируют соответственно функциями $f_\mu(\mu) = a\mu^{-4}$ и $f_\mu(\mu) = b\mu^{-7/3}$. В гравитационном диапазоне выделяют, в свою очередь, участок основного максимума спектра, переходный и равновесный интервалы.

Аппроксимация частотного спектра в гравитационном диапазоне, учитывающая разделение на три интервала, имеет вид

$$f_\mu(\mu) = \begin{cases} (n+1)d_0(\mu_1)(\mu_{\max}/\mu)^n \mu^{-1} \exp\left\{-\frac{(n+1)}{n}\left[\left(\frac{\mu_{\max}}{\mu}\right)^n - \left(\frac{\mu_{\max}}{\mu_1}\right)^n\right]\right\}, & \mu \leq \mu_1, \\ f_\mu(\mu_1) + \frac{f_\mu(\mu_2) - f_\mu(\mu_1)}{\mu_2 - \mu_1}(\mu - \mu_1), & \mu \in (\mu_1, \mu_2), \\ 7,8 \cdot 10^{-3} g^2 \mu^{-5}, & \mu \in (\mu_2, \mu_3) \end{cases} \quad (3)$$

где μ_{\max} , n , μ_1 , μ_2 , $d_0(\mu_1)$ – параметры ветрового волнения ($\mu_3 \approx 30 \text{ с}^{-1}$ – верхняя граница частотного спектра гравитационных волн, $g = 9,8 \text{ м/с}^2$).

Кроме того, различными авторами предлагались аппроксимации частотного спектра в гравитационном диапазоне без разделения на отдельные области. В основном это аппроксимация вида

$$f_\mu(\mu) = A \mu^{-k} \exp(B \mu^{-n}). \quad (4)$$

В этом случае дисперсия поля возвышений d_0 и частота максимума спектра μ_{\max} находятся из соотношений

$$d_0 = A B^{(n-k)/n} \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{k-1}{n}\right), \quad B = \frac{k}{n} \mu_{\max}^n,$$

а выражение (4) можно записать в виде

$$f_\mu(\mu) = n \left(\frac{k}{n}\right)^{(k-1)/n} d_0 \mu_{\max}^{k-1} \mu^{-k} \exp\left[-\frac{k}{n} \left(\frac{\mu_{\max}}{\mu}\right)^n\right] / \Gamma\left(\frac{k-1}{n}\right).$$

В качестве примера приведем аппроксимацию Пирсона–Московица

$$f_\mu(\mu) = 8,1 \cdot 10^{-3} g^2 \mu^{-5} \exp\left[-0,74 \left(\frac{g}{V\mu}\right)^4\right],$$

где V – скорость ветра на высоте 10 м над уровнем моря, м/с.

Частотный спектр (4) соответствует спектру

$$f_\rho(\rho) = 0,5 g^{-(k-1)/2} A \rho^{-(k+1)/2} \exp(-B(g\rho)^{-n/2}).$$

Что касается углового спектра $f_{\theta|\rho}$, то чаще всего предполагают

$$f_{\theta|\rho}(\theta|\rho) = 2^m \frac{\Gamma^2\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma(m+1)} \cos^m(\theta),$$

где m зависит от ρ , а $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. В дальнейшем использовалась упрощенная аппроксимация

$$f_{\theta|\rho}(\theta|\rho) = \frac{2}{\pi} \cos^2\theta. \quad (5)$$

Для численного моделирования использовались спектры (3) и (5) с параметрами (см.[8])

$$n = 5, \quad \mu_1 = 1,8 \mu_{\max} \tilde{\mu}^{-0,7}; \quad \mu_2 = 2,0 \mu_{\max} \tilde{\mu}^{-0,7};$$

$$\tilde{\mu} = V\mu_{\max}/g; \quad d_0 = 0,00127 g^{-2} V^4 \tilde{\mu}^{-3,19},$$

где μ_{\max} – частота спектрального максимума спектра f_{μ} ; V – скорость ветра (м/с) на высоте 10 м над уровнем моря. Статистические свойства морского волнения в рамках принятой модели определяются скоростью ветра V и частотой спектрального максимума μ_{\max} .

3. Алгоритм численного моделирования поверхности морского волнения

Численное моделирование поверхности морского волнения проводилось на основе метода расщепления и рандомизации спектра [4]. Приведем выражение для приближенной модели $w^*(x, y, t)$ со спектром (2), (3), (5), которое использовалось при расчетах

$$w^*(x, y, t) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N a_{ij} [r_{ij} \cos(x \rho_i \cos \theta_i + y \rho_i \sin \theta_i + \mu_i t + \phi_{ij}) + r'_{ij} \cos(x \rho_i \cos \theta_i - y \rho_i \sin \theta_i + \mu_i t + \phi'_{ij})].$$

Здесь ρ_i – случайные величины, распределенные с плотностью, пропорциональной f_{ρ} , в соответствующих множествах A_i ,

$$A_i = [\rho^*(i-1)/(M-1), \rho^*i/(M-1)],$$

$$i = 1, \dots, M-1, \quad A_m = [\rho^*, \infty];$$

θ_i – случайные величины, распределенные в интервалах

$$B_j = [\pi(j-1)/(2N), \pi j/(2N)]$$

с плотностью, пропорциональной $f_{\theta|\rho}$ из (5); r_{ij}, r'_{ij} – случайные величины с распределением Рэлея; ϕ_{ij} и ϕ'_{ij} – равномерно распределены на $[0, 2\pi]$,

$$\mu_i = \sqrt{\rho_i g}, \quad a_{ij}^2 = \int_{A_i} \int_{B_j} f_{\rho\theta}(\rho, \theta) d\rho d\theta.$$

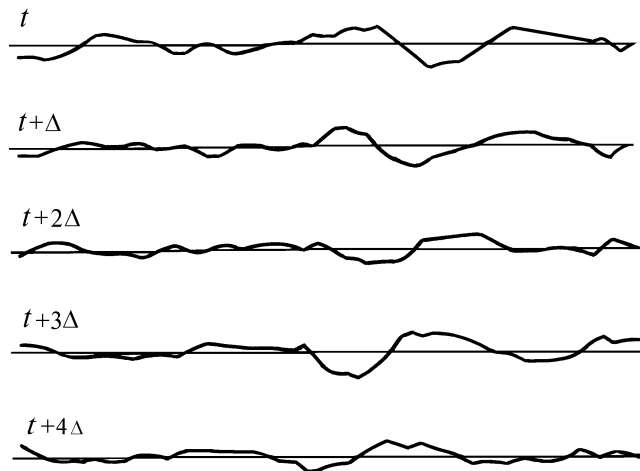


Рис. 1. Модельные реализации рельефа морской поверхности в последовательные моменты времени

Случайные величины ρ_j моделировались методом обратной функции распределения, а θ_j – методом исключения (с линейной мажорантой при $j > N/2$, с постоянной мажорантой при $j \leq N/2$, N – четное). Результаты имитации пространственно-временной структуры морского волнения представлены на рис. 1. Алгоритм моделирования определяется тремя параметрами: M , N , и ρ^* , которые отвечают за точность приближения. Поле w^* имеет требуемую спектральную плотность и является асимптотически гауссовским при

$$\max(M, N) \rightarrow \infty, \quad \rho^* \rightarrow \infty.$$

Эти условия достаточны и для слабой сходимости w^* в пространстве непрерывно дифференцируемых функций [6].

4. Применение численной модели для исследования статистических свойств оптического излучения, отраженного морской поверхностью

В качестве приложения статистической пространственно-временной модели ветрового волнения рассмотрим следующую модельную задачу. Предположим, что колебания уровня возвышенной водной поверхности описывается функцией

$$z = w(x, y, t),$$

где $w(x, y, t)$ – гауссовское однородное поле с нулевым средним и спектром (1)–(3), (5), описанным в п. 2. Из некоторой точки (x_0, y_0, z_0) над поверхностью в направлении, перпендикулярном к плоскости XY , распространяется световой пучок. В той же точке (x_0, y_0, z_0) находится приемник, который регистрирует интенсивность $J(t)$ излучения, отраженного от водной поверхности. Через весовую функцию

$$p(x, y) = \text{const} \exp\{-\alpha[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]\}$$

в модели учитывается уширение падающего на поверхность светового пучка [9]. Считается, что элементарная площадка водной поверхности отражает падающее на нее излучение в приемник, если эта площадка является горизонтальной с точностью до некоторой малой величины ε :

$$\left(1 + \left[\frac{\partial w}{\partial x}(x, y, t)\right]^2 + \left[\frac{\partial w}{\partial y}(x, y, t)\right]^2\right)^{-1/2} \leq 1 - \varepsilon. \quad (6)$$

Таким образом, интенсивность излучения, регистрируемого приемником, определяется из соотношения

$$J(t) = \int_{R^2} \varphi_\varepsilon(x, y, t) p(x, y) dx dy, \quad (7)$$

где значение функции $\varphi_\varepsilon(x, y, t)$ равно единице, если выполнено условие (6), и равно нулю в противном случае. Отметим, что в нашей модели не учитывается взаимодействие светового пучка с атмосферой и не фиксируется излучение, попавшее в приемник после рассеяния водной средой.

В численном эксперименте использовалась модель водной поверхности, представленная в п. 3, а интеграл (7) вычислялся приближенно. По насчитанным реализациям случайного процесса $J(t)$ оценивались его статистические характеристики: корреляционная функция и спектральная плотность. На рис. 2–3 представлены реализации $J(t)$ и результаты вычислений (для значений $\alpha = 0,05$, $\varepsilon = 0,01$), которые демонстрируют качественную зависимость статистических свойств процесса $J(t)$ от скорости ветра над морской поверхностью.

Результаты вычислительного эксперимента позволяют предположить, что предлагаемый в данной статье подход к численной имитации взволнованной водной поверхности может быть полезным для решения оптических задач, связанных с активным и пассивным зондированием акваторий, а также для множества других прикладных задач, требующих учета пространственно-временной стохастической структуры морского волнения.

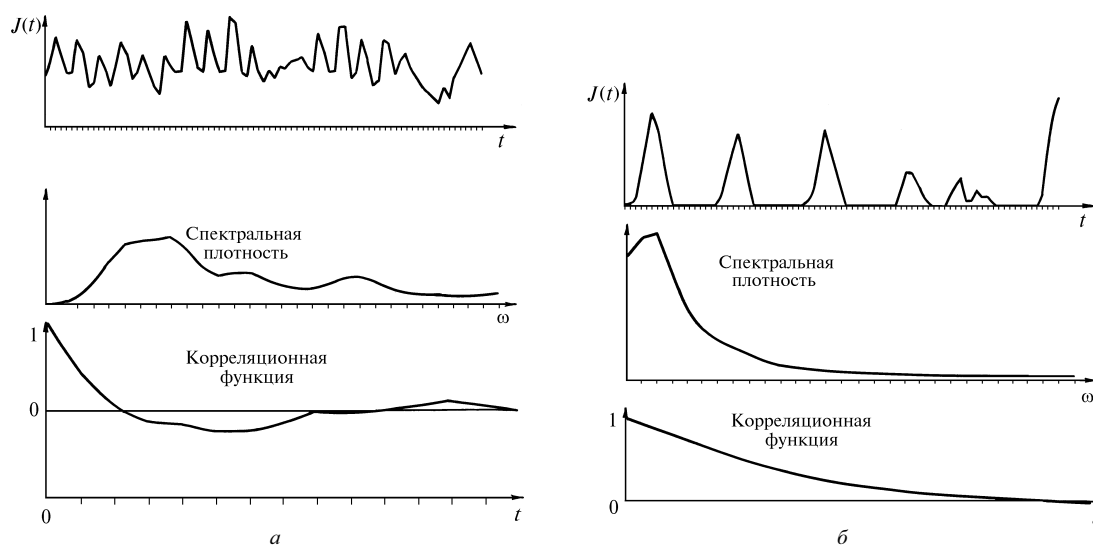


Рис. 2. Интенсивность, спектральная плотность и корреляционная функция сигнала, отраженного поверхностью морского волнения при скорости ветра (а) – 1 м/с, (б) – 6 м/с

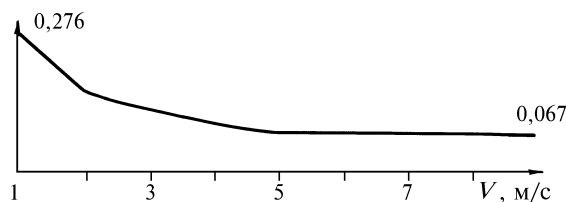


Рис. 3. Зависимость дисперсии спектральной плотности сигнала, отраженного поверхностью морского волнения, от скорости ветра (м/с)

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93–012–500).

1. Каргин Б.А., Пригарин С.М. //Оптика атмосферы и океана. 1992. Т. 5. N 3. С. 285–291.
2. Вергун В.В. Исследование пространственно-временных характеристик оптических сигналов в условиях многократного рассеяния: Автореф. дис. ... канд. физ-мат. наук. Томск. ТГУ. 1993. 20 с.
3. Справочник по теории вероятностей и математической статистики /Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Трубин А.Ф. М.: Наука, 1985.
4. Михайлов Г.А. Численное построение случайного поля с заданной спектральной плотностью //Докл. АН СССР. 1978. Т. 238. N 4. С. 793–795.
5. Войтишек А.В. //Моделирование на вычислительных системах. Новосибирск, 1982. С. 119–129.
6. Prigarin S.M. //Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 1992. V. 7. N 5. P. 441–455.
7. Крылов Ю.М. Спектральные методы исследования и расчета ветровых волн. Л.: Гидрометеиздат, 1966.
8. Давидан И.Н., Лапатухин Л.И., Рожков В.А. Ветровое волнение в мировом океане. Л.: Гидрометеиздат, 1985.
9. Зуев В.Е. Распространение лазерного излучения в атмосфере. М.: Радио и связь, 1981.

Вычислительный центр СО РАН,
г. Новосибирск

Поступила в редакцию
10 ноября 1993 г.

S.R. Anvarov and S.M. Prigarin. **Numerical Simulation of the Spatio-Temporal Structure of the Sea Swell Surface in Optical Problems.**

In this paper we present a spatio-temporal model of the sea swell surface constructed based on the spectral methods of numerical modeling of random fields. This model is then used for studying the statistical properties of optical radiation reflected from the sea surface.